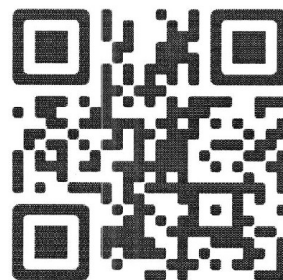


МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)! + n! + (n+1)!$ делится на 289?
2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{м. } (n-1)! + n! + (n+1)! = (n-1)! \cdot (n + n(n+1)) = (n-1)! \cdot (n+1)^2 : 289$$

$289 = 17^2$, 17 — простое число $\Rightarrow$ разложение на простые множители числа $(n-1)! \cdot (n+1)^2$ должно содержать 17 хотя бы 2 раза.

Если $(n+1)^2 = 17^2$, то $n = 16$ (т.к. $n \in \mathbb{N}$)

Если $(n-1)!$ содержит простой множитель 17, то $n \geq 18$, а мы уже убедились, что n может быть равен 16, что меньше 18.

Если $n < 16$, то ни $(n-1)!$, ни $(n+1)^2$ не будут содержать 17 ни одного раза, т.е. $n = 16$ — наименьшее.

Ответ: $n = 16$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$$(x-3)^2 + (x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 - 28 = N^5, \quad N > 8.$$

$x-3, x-2, \dots, x+3$ — семь последовательных натур. чисел, т.е. $\begin{cases} x \geq 4, \\ x \in \mathbb{N} \end{cases}$

При раскрытии скобок удвоенные произведения взаимно уничтожаются, остаётся $7x^2 + 28 - 28 = N^5$

$$7x^2 = N^5 \Rightarrow N: 7 \Rightarrow \text{т.к. } N - \text{натуральное, то}$$

наименьшее возможное $N = 7$, но по условию $N > 8$, т.е. 7-е не

подходит. Если $N = 14$, то $x^2 = 7^4 \cdot 2^5 \rightarrow x \notin \mathbb{N}$

Получаем, что в разложение на простые множители числа N должна входить 7 и ещё одно число в четной степени, большее 1.

Т.к. требуют найти наименьшее N , то $N = 7^1 \cdot 2^2 = 28$

Ответ. $N = 28$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3. $|\sqrt{x^2-x-2}+5| \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-1| + |6-x|$

ОДЗ: $x^2-x-2 \geq 0$; $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$

Пусть $\sqrt{x^2-x-2} = t$, $t \geq 0$, $x-1 = a$, тогда $6-x = -a+5$

$|t+5| - |t+a| - |-a+5| \geq 0$

Заметим, что $t+5-t-a+a-5=0$

$|t+5| = t+5$, т.к. $t \geq 0$.

$t+5 - |t+a| - |-a+5| \geq t+5 - (t+a) - (-a+5)$

$|t+a| + |-a+5| \leq (t+a) + (-a+5)$

Рассмотрим пример: $|a| + |b| \leq a+b$

Если хотя бы одно из чисел a и b отрицательно, то неравенство ~~никогда~~ не будет верно, т.к. ^{слева} сумма будет состоять из абсолютных значений a и b , а ~~ни~~ справа сумма будет меньше этого. Значит, неравенство верно только при $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$, тогда левая

и правая часть будут равны $\Rightarrow \begin{cases} t+a \geq 0 \\ -a+5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-x-2}+x-1 \geq 0 \\ 1-x+5 \geq 0 \end{cases} \quad (1)$

~~Или из (1):~~

из (2): $x \leq 6 \Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [2; 6]$

При всех $x \in [2; 6]$ $\sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x$ — верно ~~т.к. левая часть ≥ 0 , а правая ≤ 0~~

При всех $x \in (-\infty; -1]$ $1-x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x$ ~~не выполняется~~

$x-2 \geq -2x+1$; $x \geq 3 \Rightarrow$ при $x \in (-\infty; -1]$ нет решений. $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2 \geq x^2-2x+1 \\ x^2-x-2 \geq 0 \text{ — учтено} \\ 1-x > 0 \text{ — учтено} \end{cases}$

ответ: $x \in [2; 6]$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

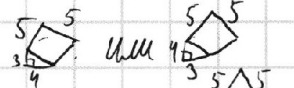
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нч. Рассмотрим все фигуры, удовлетворяющие условию:

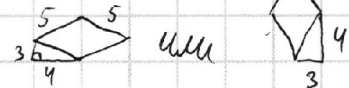
1) квадрат 5×5 со сторонами, параллельными осям.



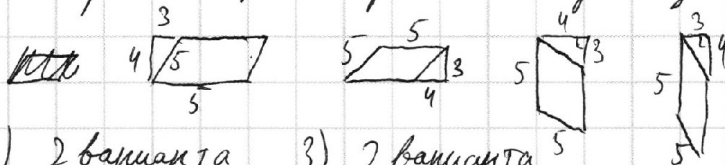
2) квадрат 5×5 со сторонами, не-паралл. осям.



3) ромб, все стороны которого не паралл. осям



4) параллелограмм, две стороны которого параллельны одной из осей, а две другие — нет;



1) 1 вариант; 2) 2 варианта 3) 2 варианта

4) 4 варианта, а также их "отзеркаленные" версии.

Выбирать фигуры можно из квадрата 44×44 .

III Выбираем проекцию на Ox или на Oy стороны, тогда квадрат определяется однозначно. Из отрезка длиной 44 есть 44-4 способа выбрать отрезок длины 5, 44-n+1 способов выбрать отрезок длины n.

1) $40 \cdot 40 = 1600$ способов. 2) оба варианта такого квадрата занимают площадь 7×7 клеток. $2 \cdot 38 \cdot 38 = 2888$ способов

3) оба варианта такого ромба занимают площадь 8×6 клеток.

$2 \cdot 37 \cdot 39 = 2886$ способов $2(38^2 - 1) = 2886$ способов

4) первые 2 вар. такого параллелограмма занимают площадь 8×4 клетки и выбираются $4 \cdot 37 \cdot 41 = 4(39^2 - 4) = 2961 \cdot 4 = 11844$ способами с учётом "отзеркаленных".



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14 (продолжение).

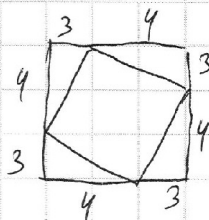
Ещё 2 вар. такого параллелограмма ~~выбира~~ занимают площадь 9×3 кл. и выбираются $4 \cdot 36 \cdot 42 = 4(39^2 - 9) = 4 \cdot 2956 = 11824$ способами с учётом «отзеркаленных».

Всего способов: $1600 + 2888 + 2886 + 11844 + 11824 = 23668 + 5774 + 1600 = 31042$

ответ: 31042.

* примечание: площадью названа не площадь квадрата / ромба / параллелограмма, а прямоугольник со сторонами, параллельными осям, который нужно выделить, чтобы вписать в него данную фигуру.

Пример.



данный квадрат
занимает «площадь»
 7×7 клеток.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2; \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

т.к. $y \in \mathbb{Z}$, левая часть чётная $\Rightarrow x \geq 0$.

Если $x = 0$, то $y^2 = 2048 \Rightarrow y \notin \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow x > 0, y \neq 0$

Левая часть положительна $\Rightarrow y \neq 0$

$$2025 \bmod 23 = 1 \Rightarrow 23(2^x + 88) + 1 = y^2$$

$$1) \quad 23(2^x + 88) = (y-1)(y+1), \quad 2^x + 88 \neq 21, \quad 2^x + 88 \neq 25$$

$$2) \quad 23(2^{x-1} + 44) = (y-1)(y+1), \quad 2^{x-1} + 44 \neq 44$$

$$3) \quad 23(2^{x-2} + 22) = (y-1)(y+1) \quad 2^{x-1} + 44 = 46 \Leftrightarrow 2^{x-1} = 2 \Leftrightarrow x=2, y=47$$

$$2^{x-2} + 22 = 30 \Leftrightarrow 2^{x-2} = 8; \quad \text{невозм.}$$

$$2^{x-2} + 22 = 34 \Leftrightarrow 2^{x-2} = 12; \quad \text{невозм.}$$

$$4) \quad 23(2^{x-3} + 11) = (y-1)(y+1)$$

$$2^{x-3} + 11 = 186; \quad 2^{x-3} = 175; \quad \text{невозм.}$$

$$2^{x-3} + 11 = 182; \quad 2^{x-3} = 171; \quad \text{невозм.}$$

Никак иначе невозможно представить $23(2^x + 88)$, значит, больше решений нет.

$$5) \quad 2 \cdot 23(2^{x-1} + 44) = (y-1)(y+1), \quad \text{решений нет}$$

$$6) \quad 4 \cdot 23(2^{x-2} + 22) = (y-1)(y+1), \quad \text{решений нет}$$

$$7) \quad 6 \cdot 23(2^{x-3} + 11) = (y-1)(y+1), \quad \text{решений нет}$$

$$8) \quad 1 \cdot 23(2^x + 88) = (y-1)(y+1), \quad \text{решений нет.}$$

Ответ: (3; 47).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

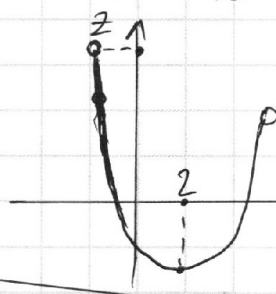
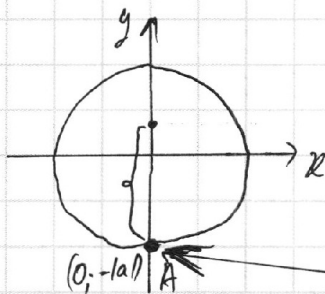
7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + y^2 = a^2$ — уравнение окружности с центром $(0; 0)$ и радиусом $|a|$.

$z = y^2 - 4y - a$ — графиком является парабола с ветвями вверх, поэтому наибольшее значение достигается в точке, наиболее сильно удалённой вправо или влево от вершины ~~координатной~~ xy .



y вершины равен 2, тогда наиболее от вершины удалена левая точка

$y_A = -|a| \Rightarrow$ при $y = -|a|$ достигается наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$. Получаем, что $(|a|)^2 - 4 \cdot (-|a|) - a = 6$

$$a^2 + 4|a| - a = 6.$$

При $a \geq 0$: $a^2 + 3a - 6 = 0$; $\begin{cases} a_1 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2} > 0 \text{ — подходит} \\ a_2 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2} < 0 \text{ — не подходит} \end{cases}$

При $a < 0$: $a^2 - 5a - 6 = 0$; $\begin{cases} a_1 = \frac{5 + 4}{2} = 6 > 0 \text{ — не подходит} \\ a_2 = \frac{5 - 4}{2} = 1 < 0 \text{ — подходит} \end{cases}$

Ответ: $a = -1$; $a = \frac{\sqrt{33} - 3}{2}$.



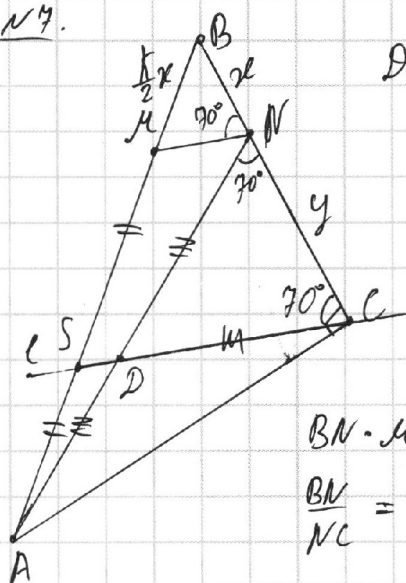
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4.



Дано: $\triangle ABC$; $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$;

$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC.$$

Найти: $\angle CAN$.

Решение:

$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC \quad | : (MA \cdot NC)$$

$$\frac{BN}{NC} = \frac{2BM}{MA}. \quad \text{Пусть } BN = x, NC = y, \text{ тогда } 2BM = kx,$$

$$MA = ky, \text{ т.е. } BM = \frac{k}{2} \cdot x$$

Через точку C проведем прямую ℓ , параллельную MN . Пусть $\ell \cap AB = S$, $\ell \cap AN = D$.

По теореме о пропорциональных отрезках, $\frac{BN}{NC} = \frac{BM}{MS} \cdot \frac{BN}{NC} = \frac{x}{y}$,

потому т.к. $BM = \frac{k}{2} x$, то $MS = \frac{k}{2} y \Rightarrow AS = MS = \frac{k}{2} y$.

$AS = SM$ и $CS \parallel MN$, поэтому $AD = DN$ по теореме Фалеса

$\angle BNM = \angle BCD$ (~~как~~ соответственные при $MN \parallel SC$ и сек. BC) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle DNC$ - равнобедренный ($DN = DC$) по признаку.

$CD = ND = DA \Rightarrow \triangle ANC$ - прямоугольный ($\angle ACN = 90^\circ$) по признаку,

потому т.к. $\angle ANC = 70^\circ$, то $\angle NAC = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$

Ответ: $\angle CAN = 20^\circ$.

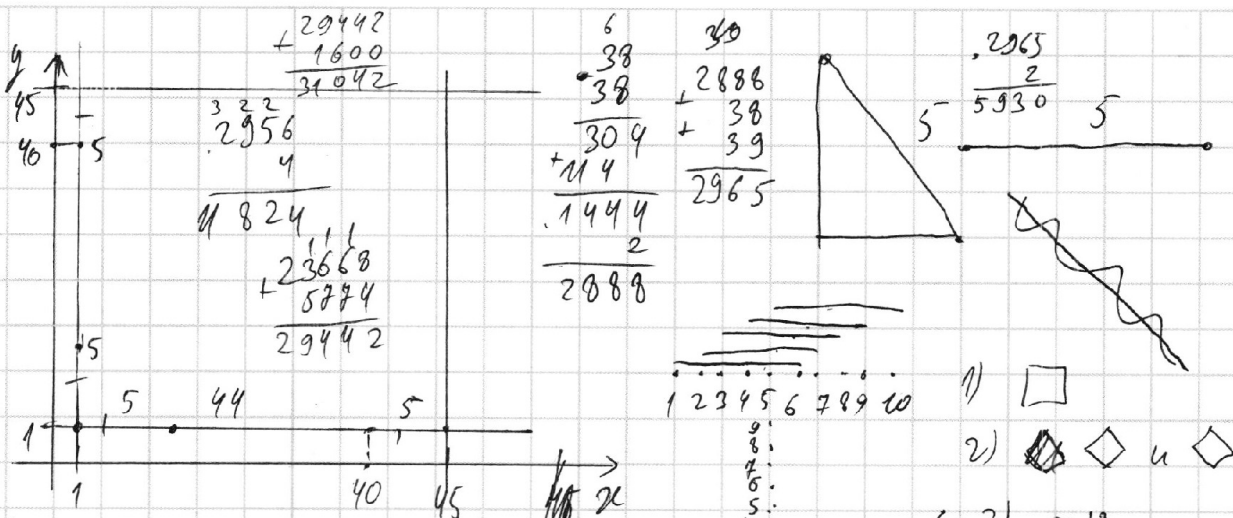


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

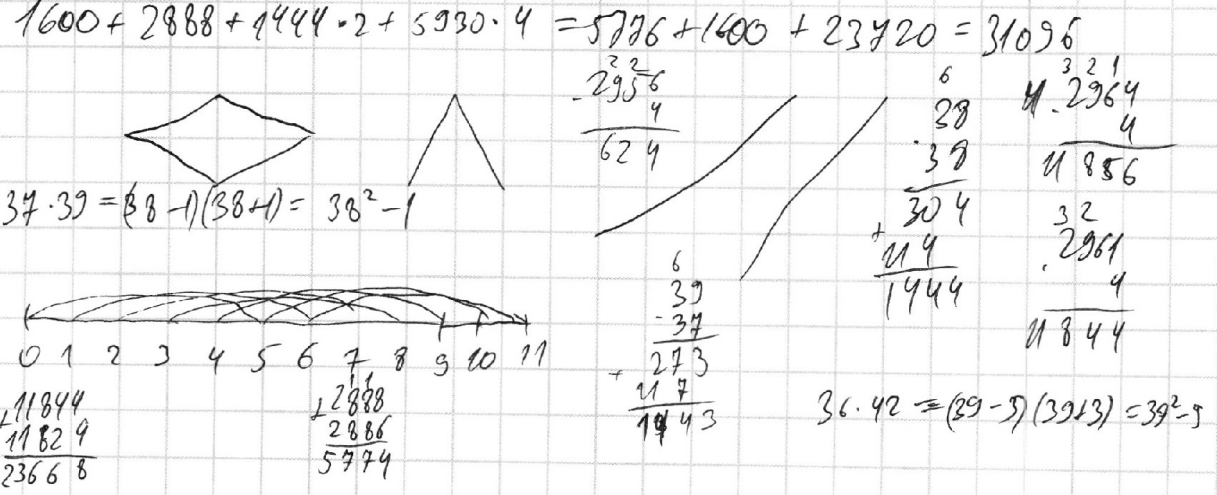
1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



- 1) $40 \cdot 40 = 1600$ квадратов 5×5 .
- 2) 7×7 клеток; $45 - 7 = 38$; $38 \cdot 38 = 2888$
- 3) 8×6 клеток; $45 - 8 = 37$; $37 \cdot 39 = 38^2 = 1444$
 $x \quad y \quad 45 - 6 = 39$
- 4) столько же, но еще 6×8 кл. 1444
 $x \quad y$
- 5) еще 8×4 кл.; $45 - 8 = 37$; $45 - 4 = 41$; $2 \cdot 37 \cdot 41 = 2 \cdot 39^2 = 5930$
 $x \quad y$
 9×3 кл.; $45 - 9 = 36$; $45 - 3 = 42$; $2 \cdot 42 \cdot 36 = 39^2 - 2 = 5930$
- 6) $5930 \cdot 2 = 11860$
 $2888 \cdot 2 = 5776$
 $5930 \cdot 4 = 23720$
 $5776 + 1600 = 7376$
 $23720 + 7376 = 31096$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$$|\sqrt{x^2-x-2}+5| \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-1| + |6-x|$$

$$x^2-x-2 \geq 0 \quad \begin{array}{ccc} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ -1 & 2 & x \end{array} \quad x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$$

$$\sqrt{x^2-x-2}=t; \quad x-1=a; \quad t \geq 0.$$

$$-a = 1-x \\ -a+5 = 6-x$$

$$t+5 \geq |t+a| + |-a+5| \geq 0$$

$$t+5 \geq |t+a| + |-a+5|$$

$$|a|+|b|+|c| \geq a+b+c$$

$$-a-b-c \geq a+b+c$$

$$a+b+c \leq 0$$

$$t+5 \geq |t+a| + |5-a|$$

$$a+b-c \geq a+b+c$$

$$\text{Если } t \geq -a, 5 \geq a; \quad t+5 \geq t+a+5-a$$

$$-c \geq c$$

$$t+5 \geq t+5 \quad \text{верно}$$

$$2c \leq 0$$

$$\text{Если } t \geq -a, 5 < a; \quad t+5 \geq t+a-5+a$$

$$1-a+5 \geq 0$$

$$a \geq 5$$

$$10 \geq 2a; \quad a \leq 5$$

$$x \leq 6$$

противоречие.

$$\text{Если } t < -a, 5 \geq a; \quad t+5 \geq t-a+5-a$$

$$5 \geq x-1 \quad | +1$$

$$6 \geq x$$

$$x \leq 6$$

$$2t \geq -2a; \quad t \geq -a \quad \text{противор.$$

$$t < -a, 5 < a; \quad t+5 \geq -b-a-5+a$$

$$|a|+|b| \leq a+b$$

$$t < -a, -5 > -a$$

$$2t \geq -10$$

$$\text{Если } a \geq 0, b < 0.$$

$$t < -a \leq -5$$

$$t \geq -5$$

$$a-b \leq a+b$$

$$-b \leq b$$

$$2b \geq 0; \quad b \geq 0$$

$$t < -5$$

противор.

$$b \geq 0, c < 0$$

$$\sqrt{x^2-x-2} \geq 1-x$$

$$|b|+|c| \geq b+c$$

$$b \geq 0, c < 0$$

$$1-x \geq 0; \quad x \leq 1$$

$$b-c \geq b+c$$

$$b-c \geq b+c$$

$$-x-2 \geq -2x+1 \quad | +2x$$

$$x \leq 0$$

$$-c \geq c$$

$$x-2 \geq 1$$

$$x \geq 3$$

$$c \leq 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(n-1)! + n! + (n+1)! : 289$$

$$n \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

$$(n-1)! (n+1 + n(n+1)) = (n-1)! ((n+1)(n+1)) = (n+1)^2 (n-1)! : 289$$

$$17^2 = 289$$

$$(n+1)^2 = 289$$

$$n+1 \geq 9$$

$$n=16 \Rightarrow (n+1)^2 = 289;$$

$$\begin{array}{r} 2025 \\ 764 \overline{) 2025} \\ \underline{185} \\ 185 \\ \underline{185} \\ 0 \end{array}$$

$$(n-1)! + (n-1)! \cdot n + (n-1)! \cdot n \cdot (n+1) = (n-1)! (1 + n + n(n+1)) = 1$$

$$= (n-1)! \cdot (n+1)^2$$

$$(n+1)/(n+1) = (n+1)^2$$

$$(n+1)^2 = 289; n+1=17; n=16$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 4 \overline{) 23} \\ \underline{8} \\ 15 \end{array}$$

$$N^2 (x-3)^2 + (x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 - 28 = N^5;$$

$$N > 8; \min(N) = ?$$

$$23(2^x + 88) + 1 = y^2$$

$$(y-1)(y+1) = 46(2^x + 44) \Rightarrow (y-1)(y+1) = 23(2^x + 88)$$

$$x^2 + 12x + 9 + x^2 + 4 + x^2 + 1 + x^2 + x^2 + 1 + x^2 + 4 + x^2 + 9 - 28 = N^5$$

$$7x^2 = N^5; \quad 7x^2 > 0, \text{ т.к. } x \in \mathbb{N} \Rightarrow N \in \mathbb{N}$$

$$N_{\min} = 7$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$$

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) \geq 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

$$N^3. \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \geq \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 + |6 - x|$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} = t, t \geq 0. \quad x - 1 = a. \quad 6 - x = -(x - 6) = -(x - 1 - 5) = -a + 5$$

$$|t + 5| \geq |t + a| + |-a + 5|; \quad |t + 5| - |t + a| - |-a + 5| \geq 0$$

$$|t + 5| \geq |t + a| + |-a + 5|$$

$$t + 5 - |t + a| - |-a + 5| \geq 0$$

$$\text{Если } t + a \geq 0, a - 5 < 0, \text{ то } t + 5 - t - a - a + 5 = 0$$

$$\text{Если } t + a > 0, a - 5 > 0, \text{ то } t + 5 - t - a - a + 5 = -2a + 10 \geq 0 \quad | : (-2)$$

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2; \quad x \geq 0, y \neq 0.$$

$$a - 5 \leq 0$$

$$y^2 \mod 23 = 1$$

$$23k + 1 = y^2; \quad 23k = (y-1)(y+1)$$

$$k \equiv 2 \pmod{4}$$

$$(y^2 - 1) : 23$$

$$y^2 = 24, 44, 70, 93, 116, 139, 162,$$

$$185, 208, 231, 253, 280;$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

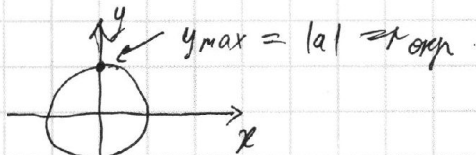
1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad - \text{окр с ц. } (0;0) \text{ и рад. } |a|. \quad \max(y^2 - 4y - a) = 6$$

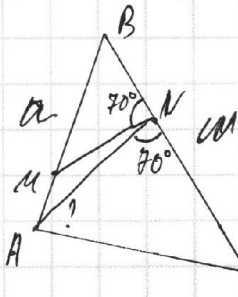
max при наибольшем y .



Ответ:

$y^2 - 4y - a$ - парабола, ветви вверх. Если $a < 0$: $\max y^2 - 4y - a$

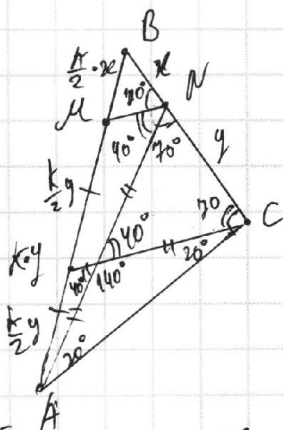
$$\max x_c = \frac{4}{2} = 2 \quad \checkmark \text{ у/б/з}$$



$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC \quad | : (MA \cdot NC)$$

$$\frac{BN}{NC} = \frac{2BM}{MA}$$

$$\frac{2BM}{MA} = \frac{x}{y}$$



$$\sqrt{5}. 23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$y, x \in \mathbb{Z}.$$

$$y^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{лев. ч.} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \geq 0. \quad \text{Если } x = 0, \text{ то } y^2 = 2025 + 23 = 2048 = 2^{11} \Rightarrow y \notin \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq 0$$

$$\forall x \neq 0 \Rightarrow 2^x \text{ оканч на } 2, 4, 8, 6. \Rightarrow 23 \cdot 2^x \text{ оканч на } 6, 2, 4, 8.$$

$$y^2 \text{ оканч на } 1, 4, 9, 6$$

$$\text{лев. ч. } > 0. \Rightarrow y \neq 0. \quad \text{квадрат оканч. на } 1, 4, 9, 6, 5, 0$$

$$y^2 \text{ оканч на } 1 \text{ или на } 9. \Rightarrow \begin{cases} \text{если } y^2 \text{ на } 1, \text{ то } x \bmod 4 = 1 \\ \text{если } y^2 \text{ на } 9, \text{ то } x \bmod 4 = 3 \end{cases}$$

$$\text{Если } x = 1, \text{ то } y^2 = 2048$$

$$\text{Если } x = 3, \text{ то}$$

$$1, 24, 47,$$

$$23k + 1 = y^2$$

$$23k = (y-1)(y+1)$$

$$\begin{array}{r} 2025 \overline{) 23} \\ \underline{184} \\ 185 \\ \underline{184} \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} a^2 + 3a - 6 = 0 \\ D = 9 + 24 = 33 \\ a_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2} \end{array}$$

$$a^2 - 4|a| - a = 6$$

$$a^2 - 4|a| - a - 6 = 0$$

$$\text{Если } a \geq 0: \quad a^2 - 5a - 6 = 0 \quad a^2 - 5a - 6 = 0$$

$$D = 25 + 24 = 49 \quad D = 25 + 24 = 49$$

$$a_1 = \frac{5+7}{2} = 6 \quad \checkmark \text{ 0 VV}$$

$$a_2 = \frac{5-7}{2} = -1$$

$$a^2 + 3a - 6 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot (-6) = 9 + 24 = 33$$

$$a_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2} \quad \checkmark \text{ 0}$$

$$a_2 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2} < 0 \quad \checkmark \text{ VV}$$

$$\text{Ответ: } 20^\circ. \quad x \neq 0, y \neq 0$$

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$(23 \cdot 2^x) \bmod 2 = 0$$

$$2025 \bmod 2 = 1, \quad y^2 \bmod 2 = 1$$

$$23 \cdot 2^x \bmod 23 = 0, \quad 2025 \bmod 23 = 1$$

$$y^2 \bmod 23 = 1 \quad 23 = 1$$