



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)! + n! + (n+1)!$ делится на 289?
2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N , большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - x - 2} + 5 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - x - 2} + x - 1 \right| + |6 - x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $y^2 - 4y - a$ равно 6.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Преобразуем выражение: $(n-1)! + n! + (n+1)! = (n-1)! \cdot$

$$\cdot (1 + n + n(n+1)) = (n-1)! (n^2 + 2n + 1) = (n-1)! (n+1)^2. \quad \text{Заметим,}$$

$$\text{что } 289 = 17^2 \Rightarrow (n-1)! (n+1)^2 : 17, \quad \text{а значит,}$$

хотя бы одно из чисел $1, \dots, n-1, n+1$ делится

$$\text{на } 17 \Rightarrow n+1 \geq 17^* \Rightarrow n \geq 16. \quad \text{Заметим, что } n=16$$

$$\text{не подходит, т.к. } (n+1)^2 = 17^2 : 289 \Rightarrow (n-1)! (n+1)^2 : 289$$

* Можно отдельно рассмотреть случай $n=1$. Тогда

$$(n-1)! + n! + (n+1)! = 0! + 1! + 2! = 1 + 1 + 2 = 4 \neq 289 \Rightarrow$$

$n \geq 2$. Тогда $(n-2)!$ действительно представимо как

$$1 \cdot \dots \cdot (n-2)$$

Ответ: $n = 16$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 2

Пусть семь последовательных натуральных чисел

$$\text{это } a, a+1, \dots, a+6. \text{ Тогда } a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 + (a+4)^2 + (a+5)^2 + (a+6)^2 = a^2 + a^2 + 2a + 1 + a^2 + 4a + 4 + a^2 + 6a + 9 + a^2 + 8a + 16 + a^2 + 10a + 25 + a^2 + 12a + 36 - 28 = 7a^2 + 42a + 91 - 28 =$$

$$7a^2 + 42a + 91 - 28 = 7a^2 + 42a + 63 = 7(a^2 + 6a + 9) = 7(a+3)^2 = N^5 \text{ для какого-то } N > 8.$$

$$= 7(a^2 + 6a + 9) = 7(a+3)^2 = N^5 \text{ для какого-то } N > 8.$$

Пусть $N^5 = 7^k$, где k - какое-то н.ч. число. Тогда

$k \geq 5$ (т.ч. $N > 7$), $k \not\equiv 5$ (т.ч. степень б.х. $\neq 6$ в N^5 кратна 5)

и k - нечетное (т.ч. ст. б.х. $\neq 6$ в $(a+3)^2$ четна) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow k \geq 15 \Rightarrow a+3 \geq 7^3$$

Если у N есть простой делитель p , отличный от

7, то пусть степень его б.х. в N^5 равна α . Тогда

$\alpha \not\equiv 5$ (ст. б.х. в N^5 кратна 5) и $\alpha \not\equiv 2$ (т.ч. $7 \nmid p$, а

ст. б.х. p в $(a+3)^2$ четна) $\Rightarrow \boxed{\alpha \geq 10} \Rightarrow a+3 \geq p^5$. Но

$$\text{еще } a+3 \geq 7^2 \quad (7(a+3)^2 \geq 7 \Rightarrow N^5 \geq 7 \Rightarrow N^5 \geq 7^5 \Rightarrow 7(a+3)^2 \geq 7^5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+3 \geq 7^2), \text{ а значит } a+3 \geq 7^2 \cdot p^5 \geq 49 \cdot 7^5 \Rightarrow N \geq 7 \cdot p^2 \geq$$

$$\geq 7 \cdot 4 = 28$$

Т.к. $7 \cdot 2^2 < 7^3$, то если для любого примера не



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2 (продолжение)

$$\begin{aligned} N &= 7 \cdot 2^2, \text{ то решим } 399929. \text{ Заметим, что } a = \\ &= 7^2 \cdot 2^5 - 3 \text{ и } 9 \times 947, \text{ т.е. тогда сумма кб дробей} \\ &= 7(7^2 \cdot 2^5)^2 = 7^5 \cdot 2^{10} = (7 \cdot 2^2)^5 \end{aligned}$$

То есть на $N = 7 \cdot 2^2$ пример существует, а
меньшего N быть не может

$$\text{Ответ: } N = 7 \cdot 4 = 28$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

Рассмотрим ОДЗ выражения $\sqrt{x^2-x-2}$: $x^2-x-2 \geq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x-2)(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -1 \end{cases}$ (парабола ветвями вверх).

Рассмотрим оба случая

A: $x \geq 2$ Тогда корни существуют и $x-1 \geq 0$. Поэтому,

$$|\sqrt{x^2-x-2}+5| \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-1| + |6-x|$$

$$\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq \sqrt{x^2-x-2}+x-1+|6-x|$$

$$5 \geq x-1+|6-x| \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \geq x-1+6-x \\ 5 \geq x-1+x-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \geq 5 \\ 12 \geq 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x > 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 \geq 5 \\ x \leq 6 \\ x > 6 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 6 \quad \text{Тогда и пункта А находим промежуток } [2; 6]$$

Б: $x \leq -1$ Тогда корни существуют, ~~и~~ и $6-x > 0$. Поэтому:

$$|\sqrt{x^2-x-2}+5| \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-1| + |6-x|$$

$$\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-1| + 6-x \quad \text{т.к. } 1-x \geq 0, \text{ тогда } x \leq -1$$

Решим неравенство: $\begin{cases} \sqrt{x^2-x-2}+x-1 \geq 0 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2 \geq (1-x)^2 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2 \geq 1+x^2-2x \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \text{нет решений, выражение внутри модуля } < 0$

Тогда раскроем модуль:

$$\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq 1-x-\sqrt{x^2-x-2}+6-x$$

$$2\sqrt{x^2-x-2} \geq 2-2x \geq 0, \text{ т.к. } x \leq -1$$

Т.к. $x \leq -1$

$$x^2-x-2 \geq (1-x)^2 \Leftrightarrow x^2-x-2 \geq 1+x^2-2x \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow \text{нет решений}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нз (Продолжения)

Того в пункте А решения: $[2; 6]$, а в пункте Б их нет

В решении выше во всех действиях и равенствах в пунктах А/Б я а по умолчанию учитывал сами условия пунктов А или Б соответственно

Ответ: при x из $[2; 6]$

Ответ: при x из $[2; 6]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

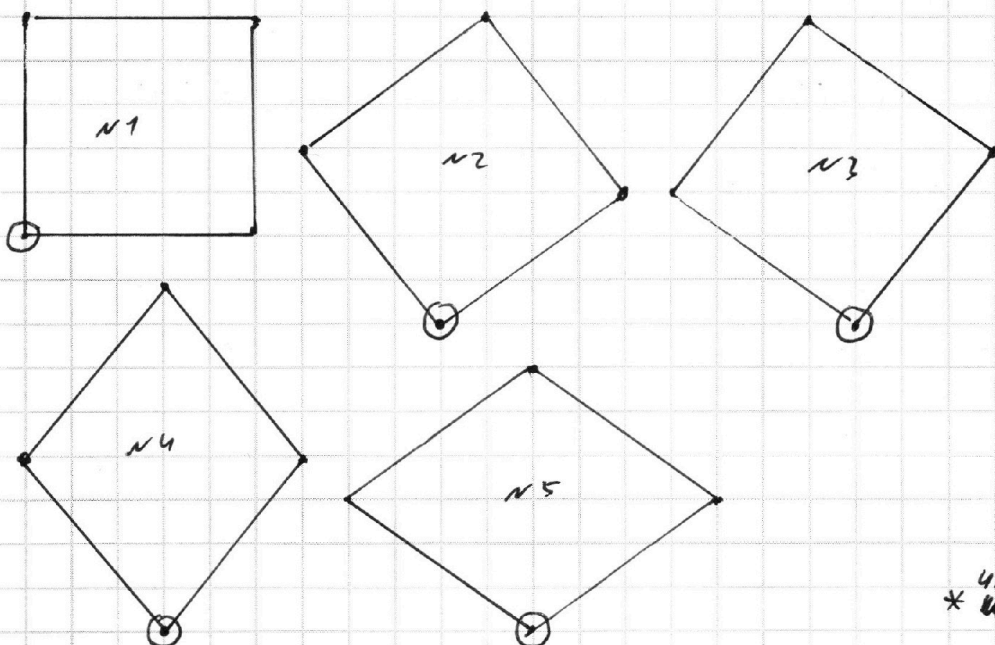
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим две соседние вершины ^{н4} правильного ромба. Пусть их координаты по оси x отличаются на Δx , а по оси y — на Δy . Запишем Т. Пифагора:
 $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = 5^2$, т.е. координаты всех вершин — целые,

то числа Δx и Δy — тоже целые $\Rightarrow$ их квадраты тоже целые. Можно заметить, что тогда либо Δx и Δy квадратов = 0, а других 25, либо Δx и Δy квадратов равен 9, а других 16



* 4 ^{н4} поворота

Рассмотрим все 5 типов ромбов, которые могут подходить. В силу симметрии, ромбов типа 2 и 3 поровну и ромбов типа 4 и 5 поровну.
Посчитаем кол-во ромбов каждого типа.

Тип 1: Пусть одна из вершин имеет коорд (x, y) .

Тогда второй ромб помещался $7 \leq x, y \leq 40 \Rightarrow$

кол-во таких ромбов = $40^2 = 1600$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4 (продолжение)

Тип 2: Если отмеченная вершина имеет координаты (x, y) , то $1 \leq y \leq 38$ и $4 \leq x \leq 41$
 $\Rightarrow$ ромбов такого типа 38^2

Тип 4: Если отмеченная вершина имеет коорд. (x, y) , то $0 \leq y \leq 37$ и $4 \leq x \leq 42 \Rightarrow$ кол-во таких ромбов $= 37 \cdot 39$

Значит ромбов всего: $40^2 + 2 \cdot 38^2 + 2 \cdot 37 \cdot 39$

$$= 40^2 + 4 \cdot 38^2 - 2 = 1600 + 1444 \cdot 4 - 2 = 7374$$

Ответ: ~~38~~ 7374



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 5

Т.к. $2025 = 45^2$, то выражение можно преобразовать:

$$23 \cdot 2^x = (y+45)(y-45) \text{ Пусть одна из скобок имеет}$$

вид $23 \cdot 2^k$, а другая 2^t . Тогда их разность = 90

и делится на $2^{\min(t,k)} \Rightarrow$ т.к. $90 \not\div 4$, то $\min(t,k) \leq 1$

Рассмотрим 4 случая. А) $t=0 \Rightarrow$ одна из скобок

$= 1 \Rightarrow$ вторая $= 91 = 23 \cdot 2^k$, но $91 \not\div 23 \Rightarrow$ такого быть

не может Б) $t=1 \Rightarrow$ одна из скобок $= 2 \Rightarrow$ другая =

$$2 + 90 = 92 = 23 \cdot 2^k \Rightarrow k=2, x = k + t = 3, y = 47$$

В) $k=0 \Rightarrow$ одна из скобок $= 23 \Rightarrow$ вторая $= 113 = 2^t$,

но 113 - не ст. двоек Г) $k=1 \Rightarrow$ одна из скобок $= 46$

$\Rightarrow$ вторая $= 136$, но 136 не ст. двоек.

$$\text{Т.к. } 23 \cdot 2^x \geq 0 \Rightarrow y^2 \geq 45. \text{ Т.к. } y^2 - \text{целое, то } 23 \cdot 2^x -$$

целое $\Rightarrow x \geq 0$ Т.к. $y+45$ и $y-45$ - целые, то k, t - целые

без ограничений. Вообще бы мне я считал, что $y \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y \geq 45 \quad (y^2 \geq 2025) \Rightarrow \text{скобки } y+45 \text{ и } y-45 \text{ обе}$$

неотриц. Обычно, это для пары (x, y) подходит, то $(x, -y)$ - тоже.

Ответ: $(3; 47)$ и $(3; -47)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

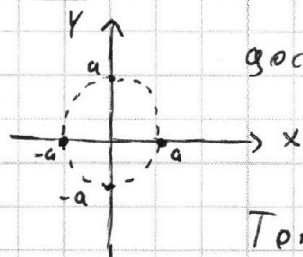
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Заметим, что геом. место точек на плоскости, для которых $x^2 + y^2 = a^2$ это окружность с центром в точке $(0,0)$ и радиусом $|a|$. Заметим, что $y^2 - 4y + a$ от y — это парабола ветвями вверх $\Rightarrow$ Если мы рассмотрим ее значения на каком-то промежутке, то макс. значение достигается в одном из концов. Рассмотрим две случая:
А $a \geq 0$, тогда максимум достигается $y^2 - 4y + a$



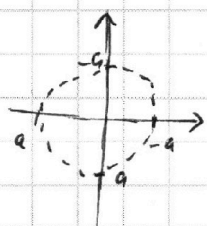
достигается либо в a , либо в $-a$ (из ГИТ $\Rightarrow$, что рассматриваемые для y промежутки это $[-a, a]$).

$$\text{Тогда } \max(a^2 + 4a + a, a^2 - 4a + a) = 6.$$

$$\text{Т.к. } a \geq 0, \text{ то } a^2 + 4a + a \geq a^2 - 4a + a \Rightarrow a^2 + 3a = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{выб } (a+6)(a-1) = 0 \text{ и, т.к. } a \geq 0 \Rightarrow a = 1$$

Б $a \geq 0$ Аналогично мы знаем, что



$$\max(a^2 + 4a + a, a^2 - 4a + a) = 6, \text{ но теперь}$$

$$\text{т.к. } a \geq 0, \text{ то } a^2 - 4a + a \geq a^2 + 4a + a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - 3a = 6 \Leftrightarrow (a-6)(a+1) = 0, \text{ т.к. } a \geq 0$$

$$\Rightarrow a = -1$$

Продолжение А $a^2 + 3a - 6 = 0 \Rightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$. Т.к.

$$a \geq 0, \text{ то } a = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2} \text{ не подходит, } a = \frac{\sqrt{33} - 3}{2} \text{ подходит,}$$

$$\text{т.к. } \sqrt{33} \geq 3$$

$$\text{Ответ: } a = -1 \text{ или } a = \frac{\sqrt{33} - 3}{2}$$

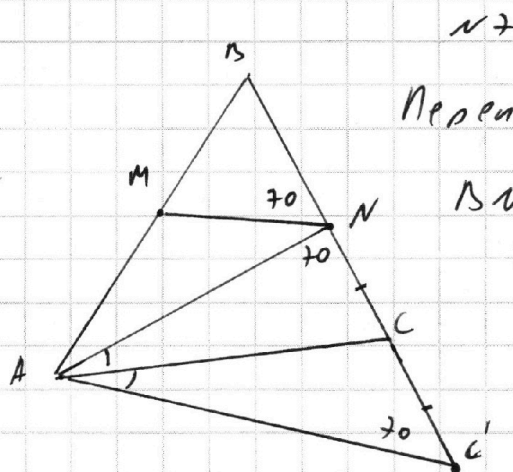


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Переведем условие:

$$BN \cdot MA = 2NM \cdot NC$$

$$\frac{2NM}{MA} = \frac{BN}{NC}$$

$$\frac{NM}{MA} = \frac{BN}{2NC}$$

Отложим на луче NC

за точку C точку C', что $CC' = NC$.

Тогда, т.к. $\frac{NM}{MA} = \frac{BN}{2NC} = \frac{BN}{NC'}$, то по теореме

Фалеса MN и AC' параллельны $\Rightarrow \angle AC'N =$

$= \angle MNB = 70^\circ \Rightarrow \triangle C'AN - \text{р/д}$, а т.к. B на

AC - медиана к основанию, то она же

и биссектриса $\Rightarrow \angle CAN = 90 - \angle CMA = 20^\circ$

Ответ $\angle CAN = 20^\circ$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, showing various calculations, inequalities, and a diagram of a right triangle.

Top left: Factorial identity: $(n-1)! (1+n+n^2+n^3) = (n-1)! (n+1)^2$

Top middle: $2 \cdot 2^2 = 2^3$

Top right: Inequality: $\sqrt{x^2 - x - 2} \geq \sqrt{x^2 - x - 1} + 6 - x$

Middle left: Arithmetic progression calculations:
 $289, 260, 140, 12^2 = 144$
 $89+13, 89+30, 41+13$
 $7 \cdot 2^5, 2^2 \cdot 2^3, 2^2 \cdot 2^5$

Middle right: Long division:
$$\begin{array}{r} 1444 \\ 9 \overline{) 12996} \\ \underline{81} \\ 4896 \\ \underline{4500} \\ 396 \\ \underline{360} \\ 360 \end{array}$$

Bottom left: Quadratic equation and inequality:
 $x^2 + 2x + 4 = 0$
 $x^2 - x - 2 \geq 0$
 $(x-2)(x+1) \geq 0$
Graph of $y = x^2 - x - 2$ with roots at $x = -1$ and $x = 2$.

Bottom middle: Right triangle diagram with sides a, b, c and hypotenuse 5 .
 $a^2 + b^2 = 5^2$
 $x = 1 + (6-x)$

Bottom right: Inequality and calculations:
 $\sqrt{x^2 - x - 2} \geq \sqrt{x^2 - x - 1} + 6 - x$
 $0 \geq x - 1 + 6 - x$
 $0 \geq 5$ (contradiction)
Long division:
$$\begin{array}{r} 2025 \\ 405 \overline{) 8100} \\ \underline{8100} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ 225 \overline{) 10125} \\ \underline{9000} \\ 1125 \\ \underline{1125} \\ 0 \end{array}$$

$$(1+4) \cdot 9 + 16 + 25 + 36 = 45$$

$$30 + 25 + 36 = 91$$

$$30 + 6 = 36$$

$$23 \cdot 2^4 = (45+45)(45-45)$$

