МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10

1. [3 балла] При каком наименьшем натуральным n число $(n-1)!+n!+(n+1)!$ делится на 289?

2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N, большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N.

3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left|\sqrt{x^2-x-2}+5\right| \geqslant \left|\sqrt{x^2-x-2}+x-1\right|+|6-x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1;45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.

5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23\cdot 2^x+2025=y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy, задаваемых уравнением $x^2+y^2=a^2$, наибольшее значение выражения y^2-4y-a равно 6.

7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB=\angle ANC=70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN\cdot MA=2BM\cdot NC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1

Преобразуем выражение: $(n-1)! + n! + (n+1)! = (n-1)! \cdot (1 + n + n(n+1)) = (n-1)!(n^2+2n+1) = (n-1)!(n+1)^2$. Заметим, что $289 = 17^2 \Rightarrow (n-1)!(n+1)^2 \vdots 17$, а значит, хотя бы одно из чисел $1, \ldots, n-1, n+1$ делится на $17 \Rightarrow n+1 \geq 17^* \Rightarrow n \geq 16$. Заметим, что $n=16$ подходит, т.к. $(n+1)^2 = 17^2 \vdots 289 \Rightarrow (n-1)!(n+1)^2 \vdots 289$

* Можно отдельно рассмотреть случай $n=1$. Тогда $(n-1)! + n! + (n+1)! = 0! + 1! + 2! = 1+1+2 = 4 \not\vdots\, 289 \Rightarrow n \geq 2$. Тогда $(n-2)!$ действительно представимо как $1 \cdot \ldots \cdot (n-2)$

Ответ: $n = 16$

№ 2

Пусть семь последовательных натуральных чисел это $a, a+1, \dots a+6$. Тогда $a^2+(a+1)^2+(a+2)^2+(a+3)^2+(a+4)^2+(a+5)^2+(a+6)^2-28 = a^2+a^2+2a+1+a^2+4a+4+a^2+6a+9+a^2+8a+16+a^2+10a+25+a^2+12a+36-28 = 7a^2+42a+91-28 = 7(a^2+6a+9) = 7(a+3)^2 = N^5$ для какого-то $N>8$.

Пусть $N^5 = 7^k$, где k - какое-то нат. число. Тогда $k \geq 5$ (т.к. $N>7$), $k \vdots 5$ (т.к. степень вхождения 7 в N^5 кратна 5) и k - нечетное (т.к. ст. вх 7 в $(a+3)^2$ четна) $\Rightarrow$ $\Rightarrow k \geq 15 \Rightarrow N \geq 7^3$

Если у N есть простой делитель p, отличный от 7, то пусть степень его вх в N^5 равна α. Тогда $\alpha \vdots 5$ (ст. вх. в N^5 кратна 5) и $\alpha \vdots 2$, (т.к. $7 \not\vdots p$, а ст. вх. p в $(a+3)^2$ четна) $\Rightarrow \boxed{\alpha \geq 10} \Rightarrow a+3 \vdots p^5$. Но еще $a+3 \vdots 7^2$ ($7(a+3)^2 \vdots 7 \Rightarrow N^5 \vdots 7 \Rightarrow N^5 \vdots 7^5 \Rightarrow 7(a+3)^2 \vdots 7^5 \Rightarrow$ $\Rightarrow a+3 \vdots 7^2$), а значит $N \geq 7\cdot p^2 \geq 7\cdot 4 = 28$

Т.к. $7\cdot 2^2 < 7^3$, то если мы приведем пример на

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2 (продолжение)

$N = 7\cdot 2^2$, то решим задачу. Заметим, что $a = 7^2\cdot 2^5 - 3$ подходит, т.к. тогда сумма квадратов $= 7(7^2\cdot 2^5)^2 = 7^5\cdot 2^{10} = (7\cdot 2^2)^5$

То есть на $N = 7\cdot 2^2$ пример существует, а меньшего N быть не может

Ответ: $N = 7\cdot 4 = 28$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3

Рассмотрим ОДЗ выражения $\sqrt{x^2-x-2}$: $x^2-x-2\geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-2)(x+1)\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 2 \\ x\leq -1\end{array}\right.$ (парабола ветвями вверх).

Рассмотрим два случая

А: $x\geq 2$ | Тогда корень существует и $x-1\geq 0$, Поэтому

$$|\sqrt{x^2-x-2}+5| \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-1| + |6-x|$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq \sqrt{x^2-x-2}+x-1+|6-x|$$
$$\Updownarrow$$
$$5\geq x-1+|6-x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5\geq x-1+6-x \\ x\leq 6\end{cases} \\ \begin{cases} 5\geq x-1+x-6 \\ x>6\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5\geq 5 \\ x\leq 6\end{cases} \\ \begin{cases} 12\geq 2x \\ x>6\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5\geq 5 \\ x\leq 6\end{cases} \\ \begin{cases} x\leq 6 \\ x>6\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow x\leq 6$$ Того из пункта А находим промежуток $[2;6]$

Б: $x\leq -1$ | Тогда корень существует, и $6-x>0$, Поэтому:

$$|\sqrt{x^2-x-2}+5| \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-1| + |6-x|$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq |\sqrt{x^2-x-2}+x-1| + 6-x$$

Т.к. $1-x\geq 0$, всегд $x\leq -1$

Решим неравенство: $\begin{cases} \sqrt{x^2-x-2}+x-1\geq 0 \\ x\leq -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2\geq (1-x)^2 \\ x\leq -1\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2\geq 1+x^2-2x \\ x\leq -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 3 \\ x\leq -1\end{cases} \Leftrightarrow$ нет решений, выражение внутри модуля <0

Тогда раскроем модуль:

$$\sqrt{x^2-x-2}+5 \geq 1-x-\sqrt{x^2-x-2}+6-x$$
$$\Updownarrow$$
$$2\sqrt{x^2-x-2} \geq 2-2x \geq 0, \text{ т.к. } x\leq -1$$

Т.К. $x\leq -1$

$$\Updownarrow$$
$$x^2-x-2 \geq (1-x)^2 \Leftrightarrow x^2-x-2\geq 1+x^2-2x \Leftrightarrow x\geq 3 \Leftrightarrow \text{нет решений}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3 (Продолжение)

Того в пункте А решения: [2;6], а в пункте Б их нет

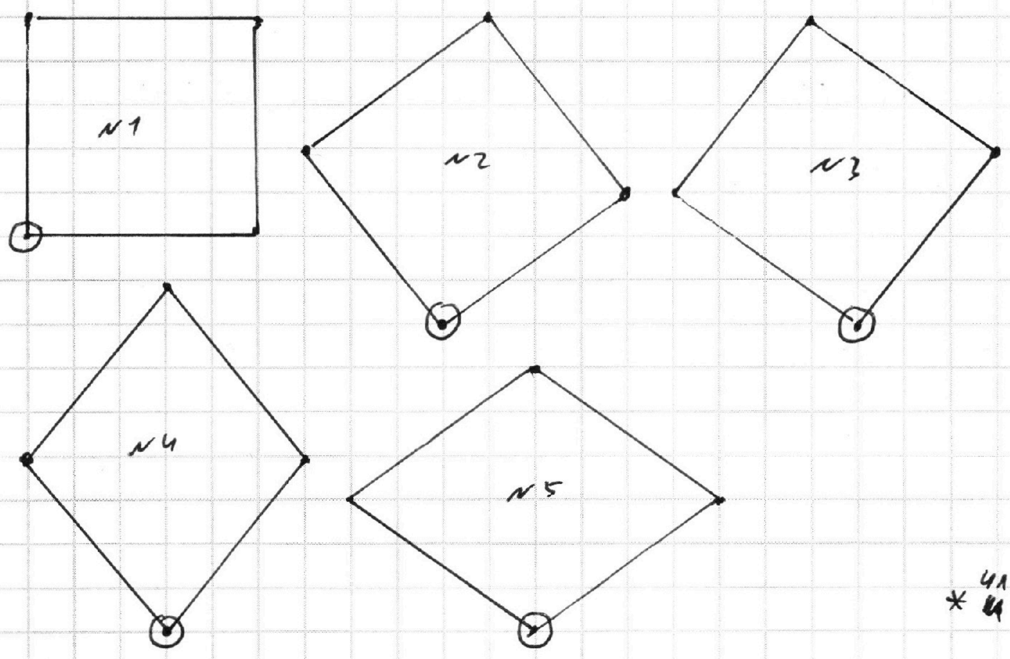
В решении выше во всех действиях и равносильностях в пунктах А/Б я по умолчанию учитывал сами условия пунктов А или Б соответственно

Ответ: при x из $[2;6]$

~~Ответ: при x из [2;6]~~

№4

Рассмотрим две соседние вершины произвольного ромба. Пусть их координаты по оси x отлич-ся на Δx, а по оси y — на Δy. Запишем Т. Пифагора: $(\Delta x)^2+(\Delta y)^2=5^2$. Т.к. координаты всех вершин — целые, то числа Δx и Δy — тоже целые $\Rightarrow$ их квадраты тоже целые. Можно понять, что тогда либо один из квадратов $=0$, а другой 25, либо один из квадратов равен 9, а другой 16



* или поворота

Рассмотрим все 5 типов ромбов, которые могут подходить. В силу симметрии* ромбов типа 2 и 3 поровну и ромбов типа 4 и 5 поровну

Посчитаем кол-во ромбов каждого типа:

Тип 1: Пусть отмеч. вершина имеет коорд $(x; y)$. Тогда чтобы ромб вмещался $1 \leq x, y \leq 40 \Rightarrow$ кол-во таких ромбов $= 40^2 = 1600$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№4 (Продолжение)

Тип 3: Если отмеченная вершина имеет координаты (x, y), то $1 \le y \le 38$ и $4 \le x \le 41$ $\Rightarrow$ ромбов такого типа 38^2

Тип 4: Если отмеченная вершина имеет коорд. $(x; y)$, то $1 \le y \le 37$ и $4 \le x \le 42$ $\Rightarrow$ кол-во таких ромбов $= 37 \cdot 39$

Значит ромбов всего: $40^2 + 2 \cdot 38^2 + 2 \cdot 37 \cdot 39$

$= 40^2 + 4 \cdot 38^2 - 2 = 1600 + 1444 \cdot 4 - 2 = 7374$

Ответ: ~~37~~ 7374

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№5

Т.к. $2025=45^2$, то выражение можно преобразовать:

$23\cdot 2^x=(y+45)(y-45)$ Пусть одна из скобок имеет вид $23\cdot 2^k$, а другая 2^t. Тогда их разность $=90$ и делится на $2^{\min(t,k)}$ $\Rightarrow$ т.к. $90 \not\vdots 4$, то $\min(t,k)\le 1$

Рассмотрим 4 случая: А) $t=0$ $\Rightarrow$ одна из скобок $=1$ $\Rightarrow$ вторая $=91=23\cdot 2^k$, но $91 \not\vdots 23$ $\Rightarrow$ такого быть не может Б) $t=1$ $\Rightarrow$ одна из скобок $=2$ $\Rightarrow$ другая $=$ $2+90=92=23\cdot 2^k$ $\Rightarrow$ $k=2$, $x=k+t=3$, $y=47$

В) $k=0$ $\Rightarrow$ одна из скобок $=23$ $\Rightarrow$ вторая $=113=2^t$, но 113 — не ст. двойки Г) $k=1$ $\Rightarrow$ одна из скобок $=46$ $\Rightarrow$ вторая $=136$, но 136 не ст. двойки.

Т.к. $23\cdot 2^x\ge 0$ $\Rightarrow$ $y^2\ge 45$. т.к. y^2 — целое, то $23\cdot 2^x$ — целое $\Rightarrow$ $x\ge 0$ Т.к. $y+45$ и $y-45$ — целые, то k, t — целые Без огран. общности выше я считал, что $y\ge 0$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $y\ge 45$ ($y^2\ge 2025$) $\Rightarrow$ скобки $y+45$ и $y-45$ обе неотрицат. Очевидно, что если пара $(x;y)$ подходит, то $(x;-y)$ — тоже.

Ответ: $(3;47)$ и $(3;-47)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

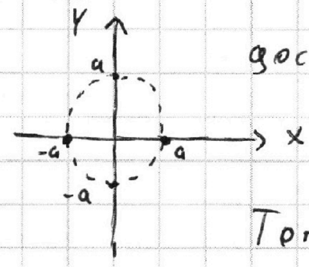
СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6

Заметим, что геом. место точек на плоскости, для которых $x^2+y^2=a^2$ это окружность с центром в точке $(0,0)$ и радиусом $|a|$. Заметим, что ф-ция y^2-4y-a от y — это парабола вет-вями вверх $\Rightarrow$ если мы рассмотрим ее значения на каком-то промежутке, то наиб. знач будет достигаться в одном из концов. Рассмотрим два случая:

A $a \geq 0$ |, тогда максимум выражения y^2-4y+a



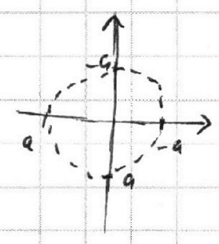
достигается либо в a, или в $-a$ (из ГМТ $\Rightarrow$, что рассматриваемый для y промежуток это $[-a, a]$).

Тогда $\max(a^2+4a+a,\ a^2-4a+a)=6$.

Т.к. $a \geq 0$, то $a^2+4a+a \geq a^2-4a+a \Rightarrow a^2+3a=6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ ~~$(a+6)(a-1)=0$ и, т.к. $a\geq 0 \Rightarrow a=1$~~

Б $a < 0$ | Аналогично мы знаем, что



$\max(a^2+4a+a,\ a^2-4a+a)=6$, но теперь

т.к. $a<0$, то $a^2-4a+a \geq a^2+4a+a \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2-3a=6 \Leftrightarrow (a-6)(a+1)=0$, т.к. $a<0$

$\Rightarrow a=-1$

Продолжение A | $a^2+3a-6=0 \Rightarrow a=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{2}$. Т.к. $a\geq 0$, то $a=\frac{-3-\sqrt{33}}{2}$ не подходит, $a=\frac{\sqrt{33}-3}{2}$ подходит, т.к. $\sqrt{33}\geq 3$

Ответ: $a=-1$ или $a=\frac{\sqrt{33}-3}{2}$

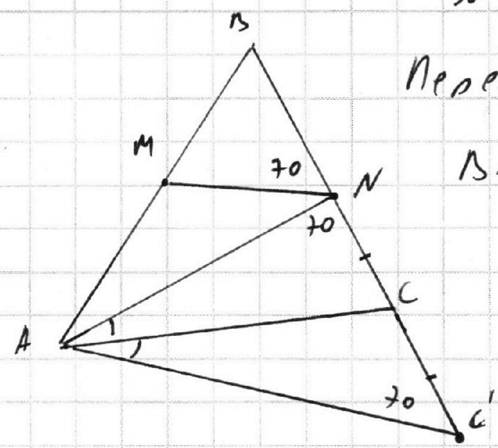
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№7



Перепишем условие:

$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$

$\frac{2BM}{MA} = \frac{BN}{NC}$

$\frac{BM}{MA} = \frac{BN}{2NC}$.

Отложим на луче BC за точку C точку C' так, что $CC' = NC$.

Тогда, т.к. $\frac{BM}{MA} = \frac{BN}{2NC} = \frac{BN}{NC'}$, то по теореме Фалеса MN и AC' параллельны $\Rightarrow \angle AC'N = \angle MNB = 70^\circ \Rightarrow \triangle C'AN$ – р/б, а т.к. в нем AC – медиана к основанию, то она же и биссектриса $\Rightarrow \angle CAN = 90 - \angle CNA = 20^\circ$

Ответ: $\angle CAN = 20^\circ$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$(n-1)!\,(1+n+n^2+n)$

$=(n-1)!\,(n+1)^2$

$7\cdot 2^2=28$

$\sqrt{x^2-x-2} \ge |\sqrt{\quad} + x - 1| + 6 - x$

$7^2\cdot 2^5$

220 89+13 289 17 89+30 4+13

$k=2$

$+(a+3)^2$

$+(a^2+6a+13)$

7^7

$7^2\cdot 2^5$

260 170

$17^2=289$ a+6

$+(a^2+6a+9$

$2(a^2+6a+9$

$(a+6)^2$

$a^2+(a+1)^2$

$7a^2+2a+4a+6a+8a+12a+10a$ $=28$

$\sqrt{\quad} \ge 1-x$

$x^2-x-2 \ge 1+x^2-2x$

$-2 \ge 1-x$

$x \ge 3$

$7a^2+42a+91$

$1+4+9+16+25+36$

$7a^2+42a+$

$30+$ $a+16+36$

$39+52$

2025 | 5
405 | 5
81

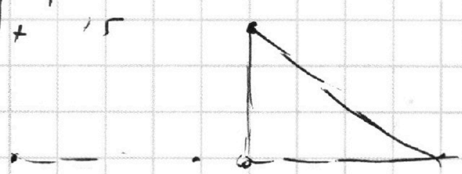
$2 \ldots 12$

$14\cdot 6$

$\sqrt{x}$ 5

9^2

$34\cdot 5^2$

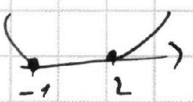


$1+4+9+16+25+36$

45

$x^2-x-2 \ge 0$

$(x-2)(x+1) \ge 0$



$9^2+6^2=5^2$

90

$30+25+36$

4

$x-1+(6-x)$

$30+61$

A] $x \ge 2$ $\sqrt{x^2-x-2} \ge \sqrt{x^2-x-2} + x - 1 + |6-x|$

45^2

$23\cdot 2^t=4^{11}$

$0 \ge x-1+|6-x|$

2^t $2^k\cdot 23$

$2^k + 2^t\cdot 45$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 \ge x-1+6-x & 0 \ge 5\\ x \le 6\end{cases}\\ \begin{cases}0 \ge x-1+x-6\\ x>6\end{cases}\end{array}\right.$$

$90=2^k$

$k=1$

$2^t\cdot 23$

$2^{t+4}\cdot 2^{t+5}$

$23\cdot 2^t=(4+45)(4-45)$

$2^t\cdot 23$

$2^t\cdot 23=2^{t+5}\cdot 90$

2 92

2^t+4

$90=2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!