

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $n! + (n+1)! + (n+2)!$ делится на 361?
2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + |7 - 2x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $x^2 - 6x + a$ равно 8.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$361 = 19 \cdot 19 = 19^2$$

$$n! + (n+1)! + (n+2)! = n! + (n+1)n! + (n+2)(n+1)n! =$$
$$= n! \cdot (1 + n+1 + n^2 + 3n+2) \stackrel{!}{=} 361$$

$$n! \cdot (n^2 + 4n + 4) \stackrel{!}{=} 361$$

$$n! \cdot (n+2)^2 \stackrel{!}{=} 361$$

Если $n+2 \stackrel{!}{=} 19$ то $(n+2)^2 \stackrel{!}{=} 361 \Rightarrow$ в таком случае

минимальное $n = 19 - 2 = 17$

Пусть $n+2 \nmid 19 \Rightarrow (n+2)^2 \nmid 19 \Rightarrow n! \stackrel{!}{=} 361 = 19^2$

т.к. 19 - простое, то минимальное $n = 38$

$$(38! = \underbrace{38 \cdot 37 \cdot \dots \cdot 20}_{19} \cdot \underbrace{19 \cdot \dots \cdot 1}_{19} \stackrel{!}{=} 361)$$

Минимальное из этих двух вариантов 17

Ответ: 17



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть x - третье из этого набора натуральных чисел ($x \geq 3$)

Числа: $x-2, x-1, x, x+1, x+2$

$$(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = x^2 - 4x + 4 + x^2 - 2x + 1 + x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 5x^2 + 10 - 10 = 5x^2 = N^3$$

$x = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$, где p_i - простое число k_i - степень $k_i \geq 0$

$$x = p_1^{2k_1} \cdot p_2^{2k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{2k_n}$$

$N = p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdot \dots \cdot p_n^{l_3}$, p_i - те же простые числа, l_i - степень $l_i \geq 0$

$$N^3 = p_1^{3l_1} \cdot p_2^{3l_2} \cdot \dots \cdot p_n^{3l_3}$$

$$5x^2 = N^3$$

$$5 \cdot p_1^{2k_1} \cdot p_2^{2k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{2k_n} = p_1^{3l_1} \cdot p_2^{3l_2} \cdot \dots \cdot p_n^{3l_3}$$

$\Rightarrow$ Если $p_i \neq 5$: $2k_i = 3l_i$, $k_{i,\min} = 0$, $l_{i,\min} = 0$
 $k_i, l_i \geq 0$

Если $p_i = 5$: $2k_i + 1 = 3l_i \Rightarrow k_{i,\min} = 1$, $l_{i,\min} = 1$

Т.к. нужно минимальное N , то простые числа и их степени должны быть как можно меньше. $x_{\min} = 5 \Rightarrow 5 \cdot x^2 = 125 = 5^3$, но $N \geq 6$ - не подходит

Возьмем минимальное простое $p = 2$, и мин. степени по равным числам - $k = 3$, $l = 2$, $x = 5 \cdot 2^3$, $N = 5 \cdot 2^2$

$$5 \cdot x^2 = 5^3 \cdot 2^6 = (5 \cdot 2^2)^3, N = 20 \text{ - подходит. Ответ: } 20$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$|\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6| \geq |\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1| + |7 - 2x|$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 6 \end{cases} \quad \text{РДЗ: } \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ (x - 3)(x + 1) \geq 0 \end{cases}$$

Следовательно $x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \geq 0 \quad \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 0 & (-\infty; -1] \cup [3; +\infty) \\ 1 - 2x \leq 0 & x \geq 0,5 \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 1 - 2x \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2x \geq 0 & x \leq 0,5 \\ x^2 - 2x - 3 \geq 1 - 4x + 4x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in [3; +\infty) \\ x \leq 0,5 \\ 3x^2 - 2x + 4 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [3; +\infty) \quad \begin{cases} D = 4 - 48 < 0 \Rightarrow \emptyset \end{cases}$$

$$x \geq 3,5: \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 - 7 + 2x$$

$$6 \geq 4x - 8 \Rightarrow x \leq \frac{7}{2} = 3,5 \quad \text{так } x \geq 3,5$$

$$\Rightarrow x = 3,5$$

$$3 \leq x < 3,5: \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 + 7 - 2x$$

$$6 \geq 6 \Rightarrow x \in [3; 3,5)$$

$-1 < x < 3$ не отх корни не определены ($x^2 - 2x - 3 < 0$)

$$x \leq -1: \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq -\sqrt{x^2 - 2x - 3} - 2x + 1 + 7 - 2x$$

$$2\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 2 - 4x \quad | :2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 1 - 2x \quad x \leq -1 \Rightarrow \text{корень отрицателен}$$

$$1 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0,5 \Rightarrow 1 - 2x \geq 0$$

$\Rightarrow$ достаточно решить: $\begin{cases} x \leq -1 \\ x^2 - 2x - 3 \geq 1 - 4x + 4x^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x^2 \geq 4 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty) \Rightarrow x \in (-\infty; -2]$$

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ 3x^2 - 2x + 4 \leq 0 \end{cases} \quad D = 4 - 48 < 0 \Rightarrow \emptyset$$

Ответ: $x \in [-3; -2]$



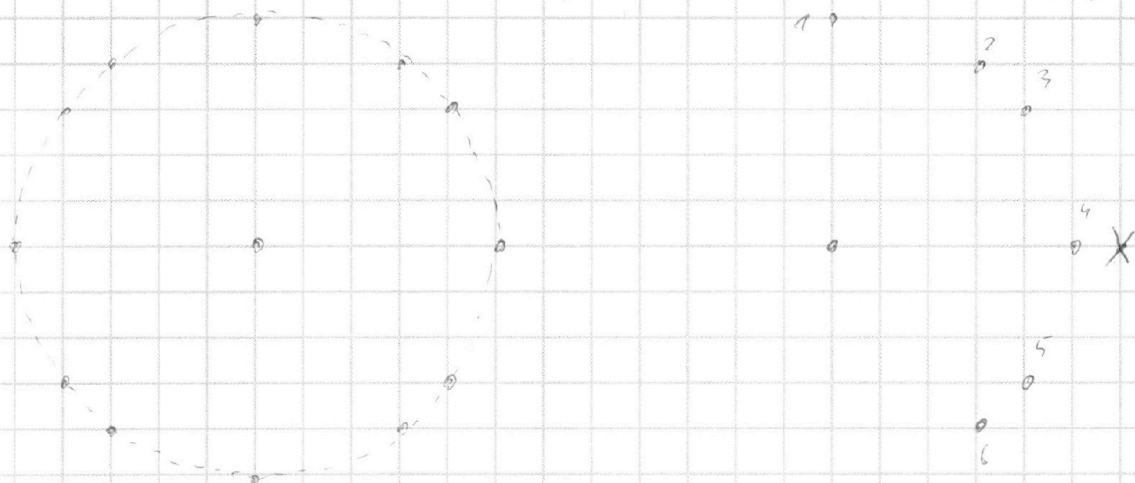
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5 (вершины в целых точках)
получаются только: целочисленные прямоугольные
стороны (поверхности на рис.)



Т.е. 6 типов сторон. Ромб однозначно
задает пара ребер, при этом ребра должны
быть перпендикулярны $\Rightarrow 6 \cdot 5 = 30$ типов ромбов
для каждого типа, чтобы все вершины
лежали в $[1; 501]$ по оси x , чтобы сумма вершин
лежала в определенном интервале
Ромб с ребрами:

12:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$y^2 = 45^2 + 19 \cdot 2^x$$

$x \geq 0$, иначе $19 \cdot 2^x$ — не целое

$\Rightarrow y^2$ — не целое при $x < 0$

$$19 \cdot 2^x \geq 0 \Rightarrow y^2 \geq 2025 \Rightarrow y \geq 45$$

Если x, y — целые, то должно быть целое

положить $t = y - 45$ $y > 45 \Rightarrow t > 0$

$$\Rightarrow y^2 = (45 + t)^2 = 45^2 + 90t + t^2$$

$$y^2 = 45^2 + 19 \cdot 2^x$$

$$t^2 + 90t - 19 \cdot 2^x = 0$$

$$t = \frac{-90 \pm \sqrt{8100 + 4 \cdot 19 \cdot 2^x}}{2} = \frac{-90 \pm \sqrt{2025 + 19 \cdot 2^x}}{2}$$

$$t \cdot (t + 90) = 19 \cdot 2^x$$

пусть $t = 19 \cdot 2^k$

$$t = 19 \cdot 2^k \Rightarrow t + 90 = 2^{x-k}$$

$$19 \cdot 2^k + 90 = 2^{x-k} \Rightarrow 2^{x-k} \geq 2^k \Rightarrow x - k \geq k$$

$$2^k \cdot (2^{x-2k} - 19) = 90 = 2 \cdot 45 \Rightarrow k = 0; 1$$

$$k = 0: 2^{x-19} = 90 \Rightarrow 2^x = 109, x \notin \mathbb{Z}$$

$$k = 1: 2 \cdot (2^{x-2} - 19) = 90 \Rightarrow 2^{x-2} = 64 \Rightarrow x - 2 = 6 \Rightarrow x = 8$$

$$\Rightarrow t = 19 \cdot 2^1 = 38 \Rightarrow y = 38 + 45 = 83$$

т.к. 19 : $t = 2^k \Rightarrow t + 90 = 19 \cdot 2^{x-k}$

$$2^k + 90 = 19 \cdot 2^{x-k}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$19 \cdot 2^{x-k} - 2^k = 90 \Rightarrow 2^{x-k} = \frac{90 + 2^k}{19}$$

$$x-k \geq k: \quad 90 = 2 \cdot 45 \Rightarrow k = 0; 1$$

$$k=0: \quad 19 \cdot 2^x - 1 = 90 \Rightarrow 19 \cdot 2^x = 91, \quad 91 \nmid 19, \quad x \notin \mathbb{Z}$$

$$k=1: \quad 19 \cdot 2^{x-1} - 2 = 90 \Rightarrow 19 \cdot 2^{x-1} = 92, \quad 92 \nmid 19, \quad x \notin \mathbb{Z}$$

$$x-k \leq k:$$

$$90 = 2 \cdot 45 \Rightarrow x-k = 0, 1, \quad k \geq 0 \Rightarrow x-k \geq 0$$

$$\Rightarrow x \geq k \Rightarrow k \leq x \leq 2k$$

$$x-k=0: \Rightarrow k=x$$

$$19 \cdot 1 - 2^x = 90 \Rightarrow 2^x = -71, \quad x \notin \mathbb{Z}$$

$$x-k=1: \quad 19 \cdot 2 - 2^{x-1} = 90 \Rightarrow 2^{x-1} = -52, \quad x \notin \mathbb{Z}$$

значит решение только: $83^2 = 45^2 + 19 \cdot 2^8$

$$\Rightarrow x=8, \quad y=\pm 83$$

ответ: $(x; y) = (8; 83), (8; -83)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + y^2 = a^2$ из Oxy это окружность (центр O)
в $(0; 0)$ и радиусом $|a|$

$$x^2 - 6x + a \quad x_0 = -\frac{-6}{2} = 3 \Rightarrow \text{минимальное значение } x^2 - 6x + a \text{ достигается при } x=3$$

$$y_0 = a - \frac{36}{4} = a - 9$$

$\Rightarrow$ т.к. квадратичная функция монотонна

на интервалах $(-\infty; x_0]$ и $[x_0; +\infty)$, то

чем больше $|x - x_0|$, тем больше будет значение

$$x^2 - 6x + a$$

для окружности $x^2 + y^2 = a^2$

максимальное знач. $|x - x_0|$

будет достигаться в самой

левой точке, т.е. $(-|a|; 0)$

(для всех отрицательных a)

$|x - x_0|$ будет меньше)

$$x = -|a|: x^2 - 6x + a = a^2 + 6|a| + a = 8$$

$$a \geq 0: a^2 - 7a - 8 = 0 \Rightarrow a = (a+8)(a-1) = 0 \Rightarrow a = 1, -8$$

$$a \leq 0: a^2 - 5a - 8 = 0 \Rightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{25+32}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{57}}{2}$$

$$\frac{5 + \sqrt{57}}{2} > 0 \text{ - не подходит}$$

$$5\sqrt{57} = 25 < 57 \Rightarrow \frac{5 - \sqrt{57}}{2} < 0$$

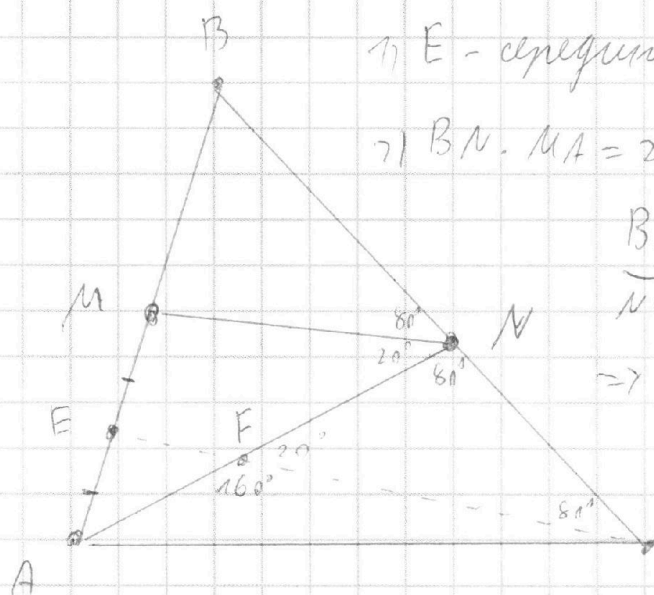
Ответ: $a = 1; \frac{5 - \sqrt{57}}{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☒СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) E - середина AM

2) $BN \cdot MA = 2 \cdot BM \cdot NC$

$$\frac{BN}{NC} = 2 \cdot \frac{BM}{MA} = 2 \cdot \frac{BM}{2EM} = \frac{BM}{EM}$$

 $\Rightarrow$ по обратной Th Фалеса $MN \parallel EC$ 3) $F = AN \cap EC$

$$\Rightarrow \angle NFE = \angle MNE = 20^\circ \quad (MN \parallel EC) \Rightarrow \angle FNC = 180^\circ - 80^\circ - 20^\circ = 80^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle FNC - \text{равн.} \Rightarrow FN = FC$$

4) $EF \parallel MN$, E - середина AM $\Rightarrow$ E - ср. линия $\triangle AMN$

$$\Rightarrow AF = FN$$

$$5) \text{ из 3) и 4) } AF = FN = FC \Rightarrow \angle ACN = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ACF = 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ$$

$$6) \angle AEC = 180^\circ - 20^\circ - 160^\circ \Rightarrow \angle FAC = 180^\circ - 160^\circ - 10^\circ = 10^\circ$$

$$6) \angle NAC = 180^\circ - 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ (\triangle NAC)$$

Ответ: 10°



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

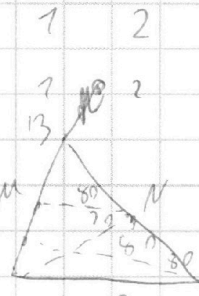
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 19 \\ 171 \\ 152 \\ \hline 361 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50 \\ 45 \\ \hline 95 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 361 \\ 722 \\ \hline 1083 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \quad 6 \quad 24 \quad 120 \quad 720 \quad 5040 \\ 1 \quad 2 \quad 6 \quad 24 \quad 120 \quad 720 \quad 5040 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} BN \cdot MA = 2 \cdot 13 \cdot 10 \\ \frac{BN}{MA} = 2 \end{array}$$

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 + (x+4)^2 - 10 = N^3$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 + x^2 + 6x + 9 + x^2 + 8x + 16 - 10 = N^3$$

$$5x^2 + 20x + 20 = N^3$$

$$x^2 - 6x + 4$$

$$5 \cdot (x^2 + 4x + 4) = 5 \cdot (x+2)^2$$

$$x_6 = a - \frac{36}{4} = 4 - 9$$

$$5x^2 = N^3$$

$$38 \cdot 128 = 19 \cdot 2^8$$

$$x_6 = -\frac{a}{-12} = \frac{a}{12}$$

$$83^2 = 45^2$$

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot n! + n! \cdot (n+1) + n! \cdot (n+1) \cdot (n+2) = 361k$$

$$n! \cdot (1 + n + 1 + n^2 + n + 2n + 2) = 361k$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

$$(x-3)(x+1) \geq 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = 3, -1$$

$$x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 19 \\ 171 \\ 152 \\ \hline 855 \end{array}$$

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$\begin{array}{r} 0 \quad 0 \\ 1 \quad 1 \\ 2 \quad 4 \\ 3 \quad 9 \\ 4 \quad 16 \end{array}$$

$$3 \cdot 1,2; 0 + 1 = 0,1 \quad 4$$

$$4 \cdot 1,2; 4,3 + 0 = 0,1 \quad 5$$

$$6 \pm \sqrt{5} \geq -\sqrt{5} + 5$$

$$4 \cdot 3,1; 2 = 0,1 \quad 4$$

$$45$$

$$1 \pm 2\sqrt{5} \geq -11$$

$$1 \cdot (1+90) = 19 \cdot 2^x$$

$$\begin{array}{l} 2 \cdot 45 \cdot 38 + 36^2 = 19 \cdot 2^8 \\ 180 + 38 \cdot 2 = 2^8 \end{array}$$