



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $n! + (n+1)! + (n+2)!$ делится на 361?
2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + |7 - 2x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $x^2 - 6x + a$ равно 8.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n! + (n+1)! + (n+2)! : 361$$

$$n!(n(n+1) + (n+1)(n+2)) : 361$$

$$n!(1 + (n+1) + (n^2 + 3n + 2)) : 361$$

$$n!(n^2 + 4n + 4) : 361$$

$$n!(n+2)^2 : 361$$

Поскольку $361 = 19^2$, $n!(n+2)^2 : 19^2$; 19 — простое число.
Заметим, что если $n! : 19^2$, то $n \geq 38$, ведь среди чисел от 1 до n встречается не более одного делителя на 19.
Если $n! \not: 19^2$, то $(n+2)^2 : 19 \Rightarrow (n+2) : 19$. Поскольку $n \in \mathbb{N}$, то $n+2 \geq 19 \Rightarrow n \geq 17$.

Таким образом, в любом случае $n \geq 17$.

* Заметим, что при $n = 17$ $n! + (n+1)! + (n+2)! = n!(n+2)^2 = 17! \cdot 19^2 : 19^2$, значит, $n \geq 17$ подходит.

Ответ: $n = 17$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Запишем наши 5 послед. чет. чисел как $a-2; a-1; a; a+1; a+2; a \in \mathbb{N}$. Тогда:

$$(a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 - 10 = N^3$$

$$a^2 - 4a + 4 + a^2 - 2a + 1 + a^2 + a^2 + 2a + 1 + a^2 + 4a + 4 = N^3$$

$$5a^2 + 10 - 10 = N^3$$

$$5a^2 = N^3; a, N \in \mathbb{N}.$$

$$5a^2 : 5 \Rightarrow N^3 : 5 \Rightarrow N : 5 \Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N}: 5N_1 = N$$

$$5a^2 = 125N_1^3$$

$$a^2 = 25N_1^3$$

$$25N_1^3 : 5 \Rightarrow a^2 : 5 \Rightarrow a : 5 \Rightarrow \exists a_1 \in \mathbb{N}: 5a_1 = a$$

$$25a_1^2 = 25N_1^3$$

$$a_1^2 = N_1^3$$

Докажем, что N_1 — это полный квадрат. Для этого рассмотрим его произвольный простой делитель p , пусть он входит в N_1 в четной степени, тогда и в N_1^3 он тоже входит в четную степень, но тогда и в a_1^2 входит в чет. степени. Противоречие.

Т.о., N_1 — полный квадрат. Также знаем, что $N > 6 \Rightarrow N_1 > \frac{6}{5}$, то есть $N_1 > 1$. Тогда минимальное значение где N_1 — это $2^2 = 4 \Rightarrow N = 20$, тогда $5a_1^2 = N_1^3 = 4^3 = 64 \Rightarrow a_1 = 8$ (т.к. $a_1 \in \mathbb{N}$), значит, $a = 40$.

$$\text{т.к. } a = 40: (a-2)^2 + \dots + (a+2)^2 - 10 = 5a^2 = 5 \cdot 40^2 = 5^3 \cdot 8^2 = 5^3 \cdot 4^3 = 20^3 = N^3.$$

Таким образом, покажем, что $N > 20$ и покажем, что $N = 20$ достигнуто.

Ответ: $N = 20$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$; $2y = x-1 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 =$
 $= (y-2)(y+2) = y^2 - 4$.

Т.о., хотим решить неравенство:

$$|\sqrt{y^2-4}+6| \geq |\sqrt{y^2-4}+2y+1| + |2y-5|$$

ОДЗ: $y^2-4 \geq 0 \Rightarrow |y| \geq 2 \Rightarrow y \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$

Заметим, что $\sqrt{y^2-4}+6 > 0 \forall y$, удовлетв. ОДЗ.

Теперь рассмотрим два случая: $(\sqrt{y^2-4}+2y+1)$. Если $y > 0$,
то оно тоже > 0 . Тогда рассмотрим, при каких $y < 0$
данное слагаемое положительное (или равно 0)

$$\sqrt{y^2-4}+2y+1 \geq 0; y < 0$$

З $z = -y$, тогда $z \geq 2$ (т.к. ОДЗ)

$$\sqrt{z^2-4}-2z+1 \geq 0$$

$$\sqrt{z^2-4} \geq 2z-1 > 0$$

$$z^2-4 \geq 4z^2-4z+1$$

$$3z^2-4z+5 \leq 0$$

$D = 16-4 \cdot 15 < 0$. График $\text{коэф} > 0 \Rightarrow 3z^2-4z+5 > 0 \forall z$.

То есть при всех отрицательных значениях y данное слагаемое
отрицательно.

Теперь рассмотрим 2 случая:

1) $y \geq 2 \Rightarrow \sqrt{y^2-4}+6 \geq \sqrt{y^2-4}+2y+1 + |2y-5| \Rightarrow 5 \geq 2y + |2y-5| \Rightarrow$
 $\Rightarrow 5-2y \geq |5-2y| \Rightarrow 5-2y \geq 0 \Rightarrow y \leq 2.5 \Rightarrow y \in [2; 2.5]$

2) $y \leq -2 \Rightarrow \sqrt{y^2-4}+6 \geq -\sqrt{y^2-4}-2y-1 + |2y-5| \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2\sqrt{y^2-4}+2y+7 \geq |2y-5|$. Значит, что при $y \leq -2$
слагаемое $(2y+5)$ — отрицательно. Значит,
 $2\sqrt{y^2-4}+2y+7 \geq -2y+5 \Rightarrow 2\sqrt{y^2-4}+4y+2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{y^2-4}+2y+1 \geq 0$.

Вспомним, что ранее мы при исследовании знака
слагаемого $(\sqrt{y^2-4}+2y+1)$ при отрицательных y и
показывали, что оно при таких значениях всегда отрица-
тельно. Значит, второй случай не дал решений.

Итак, получили, что $y \in [2; 2.5]$. Вспомним, что
 $y = x-1 \Rightarrow x-1 \in [2; 2.5] \Rightarrow x \in [3; 3.5]$

Ответ: $x \in [3; 3.5]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

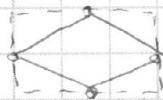
Для начала заметим, какими должны быть 2 целые точки (т.е. точки с целыми координатами), чтобы расстояние между ними было равно 5. Пусть первая точка имеет координаты $(a_1; b_1)$, а вторая - $(a_2; b_2)$. Должно выполняться равенство $\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} = 5 \Leftrightarrow (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 25$.

З $x = |a_1 - a_2|$, $y = |b_1 - b_2|$. Тогда $x, y \in \mathbb{N}_0$. Среди решений уравнения $x^2 + y^2 = 25$ в целых неотрицательных числах существуют лишь следующие: $(0; 5)$; $(5; 0)$; $(3; 4)$; $(4; 3)$.

В этом можно убедиться, например, путем полного перебора.

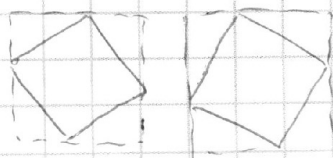
То есть если между двумя целыми точками x расстояние 5, то они либо имеют одинаковую абсциссу, а ординаты отличаются на 5, либо одинаковую ординату, а абсциссы отличаются на 5, либо это вершины, принадлежащие к гипотенузе какого-то прямоугольного треугольника со сторонами $\{3, 4, 5\}$. Таким образом, стороны нашего ромба могут идти либо по линиям целочисленной сетки (будем называть такие стороны прямыми), либо по вдоль этих линий (будем называть такие стороны косыми). Любые 2 противоположные стороны ромба либо обе прямые, либо обе косые, поэтому в любом ромбе либо 4 косых сторон, либо 2 косых, либо 0. Следствие: посчитаем ромбы с 4 косыми сторонами.

Они делятся на 3 типа: т.е. мы можем вписать в прямоугольник 6×8 , и т.е. мы можем вписать в пр-к 6×6 , и т.е. мы можем вписать в квадрат 7×7 .



Каждому такому ромбу можно вписанно описать окружность. Пр-ков 6×8 ромбов $(50-6)(50-8)$, столько же и пр-ков 8×6 .

~~Ромбы не вписываются в ромбы со всеми прямыми сторонами. Это будут квадраты.~~



Количество ромбов 3-его вида в 2 ряда больше, чем количество квадратов 7×7 , т.е. $2(50-7^2)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

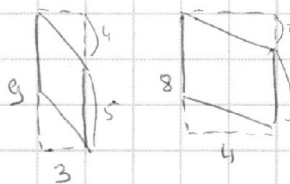
СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Теперь о ромбах, у которых все стороны прямые. Это квадраты 5×5 , которых всего $(50-5)^2$.

Ромбы, у которых 2 косые стороны, разбиваются на 2 типа: те, у которых все прямые стороны вертикальные и те, у которых все прямые стороны горизонтальные.

Посчитаем сначала к-во ромбов с вертикальными сторонами.



Посчитав, что всего есть 2 вида ромбов: те, что вписываются в прямоугол. 3×3 и те, что вписываются в прямоугол. 4×8 .

У каждого из видов ромбов с вертикальными сторонами есть 2 вида ромбов: те, что вписываются в прямоугол. 3×3 и те, что вписываются в прямоугол. 4×8 . Значит, количество = $2((50-3)(50-3) + (50-4)(50-8))$.

Посчитав, что количество ромбов с двумя вертикальными сторонами равно к-ву ромбов с двумя horiz. сторонами, если взять или повернуть сетку на 90° , один перейдет в другой. Значит, ромбов с двумя horiz. сторонами тоже $2((50-3)(50-3) + (50-4)(50-8))$.

$$\begin{aligned} \text{То, общее кол-во} &= 2((50-6)(50-8) + (50-7)^2 + 2((50-3)(50-3) + \\ &+ (50-4)(50-8))) = 2(44 \cdot 42 + 43^2 + 2(47 \cdot 43 + 46 \cdot 42)) = \\ &= 2(43^2 - 1 + 43^2 + 2(44^2 - 9 + 44^2 - 4)) = 2(2 \cdot 43^2 - 1 + 4 \cdot 44^2 - 26) = \\ &= 2(2 \cdot 43^2 + 4 \cdot 44^2 - 27) = 2(2 \cdot 44^2 - 4 \cdot 44 + 2 + 4 \cdot 44^2 - 27) = \\ &= 2(6 \cdot 44^2 - 4 \cdot 44 - 25) = 2(1760 - 25) = 2 \cdot 1735 = 3470. \end{aligned}$$

Но это без учета $(50-5)^2$ квадратов.

$$\Rightarrow 22830$$

$$2470 + 45^2 = 2470 + 2025 = 4495$$

$$22880 + 45^2 = 22880 + 2025 = 24905$$

Ответ: ~~1735~~ ~~3470~~ ~~24905~~ 24855



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $x \geq 0$, тогда $19 \cdot 2^x + 2025 \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \mathbb{Z}$.

$$19 \cdot 2^x = y^2 - 2025 = y^2 - 45^2 = (y-45)(y+45)$$

То есть $19 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$. Пусть $y > 0 \Rightarrow y+45 > 0 \Rightarrow y-45 > 0$.

Возможны лишь 2 случая:

$$1) y-45:19 \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0: \begin{cases} y-45 = 19 \cdot 2^\alpha \\ y+45 = 2^\beta \\ \alpha+\beta=x \end{cases} \Rightarrow 90 = 2^\beta - 19 \cdot 2^\alpha$$

Заметим, что если $\begin{cases} \alpha \geq 2 \\ \beta \geq 2 \end{cases}$, то $(2^\beta - 19 \cdot 2^\alpha):4 \Rightarrow 90:4$, что не верно.

$$\text{Значит, } \begin{cases} \alpha=0 \\ \alpha=1 \\ \beta=0 \\ \beta=1 \end{cases}$$

$$(a) \alpha=0 \Rightarrow 90 = 2^\beta - 19 \Rightarrow 109 = 2^\beta, \text{ но } 109 \nmid 2, \text{ нет решения}$$

$$(b) \alpha=1 \Rightarrow 90 = 2^\beta - 38 \Rightarrow 2^\beta = 128 \Rightarrow \beta=7 \Rightarrow x=8;$$

$$y = 19 \cdot 2^\alpha + 45 = 38 + 45 = 83$$

$$(b) \beta=0 \Rightarrow 90 = 1 - 19 \cdot 2^\alpha < 0, \text{ нет реш.}$$

$$(2) \beta=1 \Rightarrow 90 = 2 - 19 \cdot 2^\alpha < 0, \text{ нет реш.}$$

Т.о., этот случай принес лишь одно решение (8; 83)

$$2) y+45:19 \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0: \begin{cases} y+45 = 19 \cdot 2^\alpha \\ y-45 = 2^\beta \\ \alpha+\beta=x \end{cases} \Rightarrow 90 = 19 \cdot 2^\alpha - 2^\beta$$

и также, если $\begin{cases} \alpha \geq 2 \\ \beta \geq 2 \end{cases}$, то $19 \cdot 2^\alpha - 2^\beta:4 \Rightarrow 90:4$, что не верно.

значит, опять те же случаи:

$$(a) \alpha=0 \Rightarrow 90 = 19 - 2^\beta < 19, \text{ нет реш.}$$

$$(b) \alpha=1 \Rightarrow 90 = 38 - 2^\beta < 38, \text{ нет реш.}$$

$$(b) \beta=0 \Rightarrow 90 = 19 \cdot 2^\alpha - 1 \Rightarrow 91 = 19 \cdot 2^\alpha \Rightarrow 91:19, \text{ но это не так. Реш.}$$

$$(2) \beta=1 \Rightarrow 90 = 19 \cdot 2^\alpha - 2 \Rightarrow 92 = 19 \cdot 2^\alpha \Rightarrow 92:19, \text{ но } 92 \nmid 19. \text{ Реш.}$$

Т.о., если $y > 0$, то решение лишь одно: (8; 83)

Теперь заметим, что если существует решение $(x_0; y_0)$, то существует и решение $(x_0; -y_0)$, ведь $(y_0)^2 = (-y_0)^2$.

То есть каждому решению с положительным y соответствует ровно одно с противоположным отрицательным y , и наоборот.

Значит, при $y \neq 0$ есть еще одно решение: (8; -83)

$y=0$ не подходит.

ОТВЕТ: (8; 83) и (8; -83)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что уравнение $x^2 + 6x + a = 8$ — это уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом $|a|$.
Значит, x может принимать значения от $-a$ до a (или от a до $-a$, если $a < 0$), другими словами, $|x| \leq |a|$.
Уравнение $x^2 - 6x + a = 8$ имеет корень, обращенный вверх.
Максимум данной функции на отрезке достигается в одном из его концов (в силу того, что производная имеет не более 1 корня). Значит, если $f(x) = x^2 - 6x + a$, то $\max\{f(a); f(-a)\} = 8$.

1) $f(a) = 8 \Rightarrow a^2 - 6a + a = 8 \Rightarrow a^2 - 5a - 8 = 0$.

$D = 25 + 84 = 25 + 32 = 57 \Rightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{57}}{2}$

Если $a > 0$, то $f(-a) = a^2 + 6a + a = a^2 + 7a > f(a) = 8 \Rightarrow f(-a) > 8$.

Значит, $a = \frac{5 - \sqrt{57}}{2}$

2) $f(-a) = 8 \Rightarrow a^2 + 7a = 8 \Rightarrow a^2 + 7a - 8 = 0 \Rightarrow (a+8)(a-1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a = -8 \\ a = 1 \end{cases}$. Если $a < 0$, то $f(a) = a^2 - 5a > a^2 + 7a = 8$.

Значит, $a = 1$

Таким образом, подходит лишь 2 возможных значения параметра: 1 и $\frac{5 - \sqrt{57}}{2}$

Ответ: 1 и $\frac{5 - \sqrt{57}}{2}$

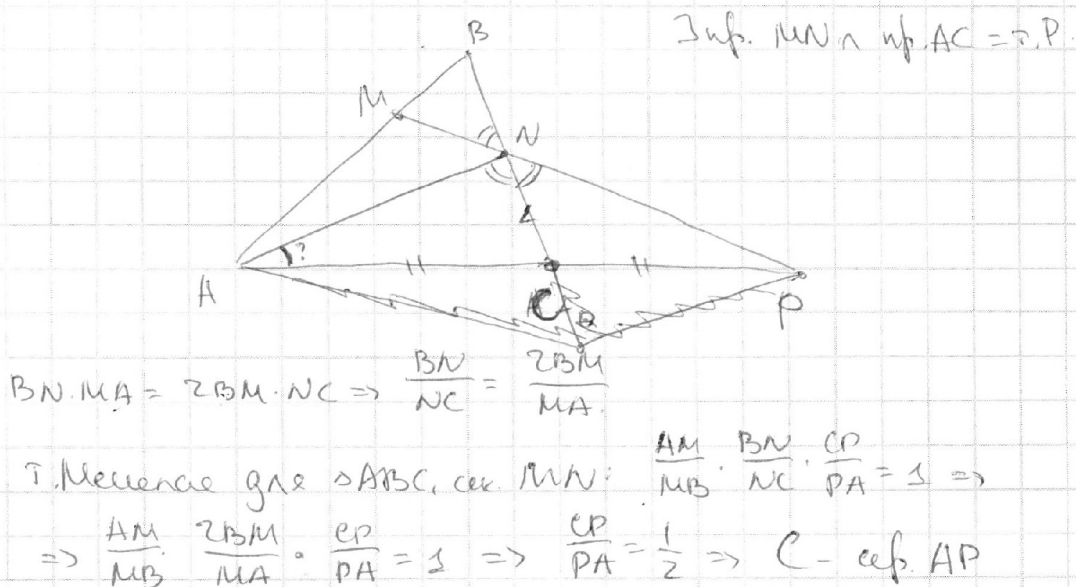
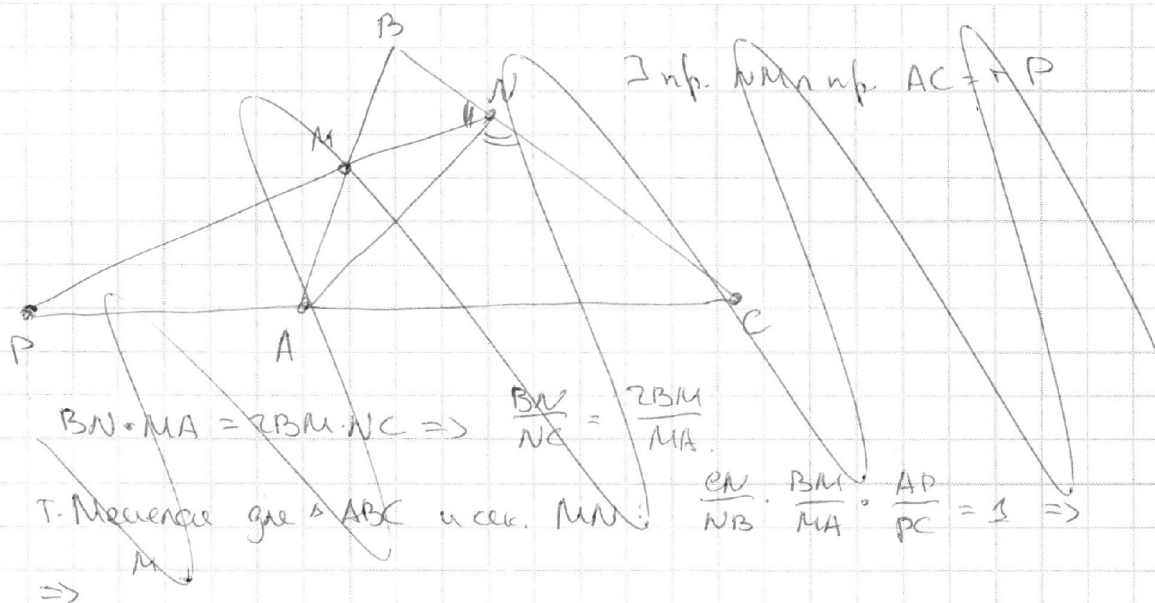


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Также знаем, что $ANPQ$ - трапеция.

$\angle MNB = \angle CNP = 80^\circ$ (вертикаль углы).

Также $\angle ANC = 80^\circ$. Значит, $\angle ANC = \angle PNC = 80^\circ$.

То есть в $\triangle ANP$ медиана NC - биссектриса и медиана, значит, $\triangle ANP$ - P -с ($AN = NP$). Тогда $\angle NAP = (180^\circ - \angle ANP) / 2 = (180^\circ - 160^\circ) / 2 = 10^\circ$

Ответ: 10°

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



① $n! + (n+1)! + (n+2)! : 361 = 19^2$

$n! + (n+1) + (n+1)(n+2) : 19^2$
 $n! + (n+1)(n+3) : 19^2$

Если $n! : 19^2$, то $n \geq 38$

$n+1 : 19^2 \Rightarrow n+1 \geq 19^2$

$n+3 : 19^2 \Rightarrow n+3 \geq 19^2$

$n! : 19 \Rightarrow n \geq 19$

$n+3 : 19$

Overbargo

② $(a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 = a^2 - 4a + 4 + a^2 - 2a + 1 + a^2 +$

$+ a^2 + 2a + 1 + a^2 + 4a + 4 = 5a^2 + 10$

$5a^2 + 10 - 10 = N^3$

$5a^2 = N^3 : 5 \Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N} : N = 5N_1$

$5a^2 = 125N_1^3$

$a^2 = 25N_1^3$ $a : 5 \Rightarrow \exists a_1 \in \mathbb{N} : a = 5a_1$

$25a_1^2 = 25N_1^3$

$a_1^2 = N_1^3$

N_1 - квадратный свободный член.

$N_1^3 = x^6, x \in \mathbb{N} \Rightarrow N_1^3 \geq 2^6$

$N_1^3 = 2^6 \Rightarrow N_1^2 = 2^2 = 4$

$N = 4 \cdot 5 = 20$

$a_1 = 8 \Rightarrow a = 40$

$5a^2 = 5 \cdot 8^2 \cdot 5^2 = 5^3 \cdot 2^6 = (5 \cdot 2^2)^3 = 20^3 = N^3$

Overbargo

⑤ $19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$

$2025 \equiv 1 \pmod{4}$

$19 \cdot 2^x = y^2 - 2025 = (y-45)(y+45)$

$19 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$

$3 \mid y-45 = 19 \cdot 2^x$

$y+45 = 2^x \Rightarrow 90 = 2^x - 19 \cdot 2^x$

Если $2^x \geq 2$

$N_1^3 = 2^6 \Rightarrow N_1^2 = 2^2 = 4$

③ $|\sqrt{(x-3)(x+1)} + 6| \geq |\sqrt{(x-3)(x+1)}| + |2x-1| + |7-2x|$

ОДЗ: $(x-3)(x+1) \geq 0$

$x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$

1) $x \in [-1; 3] \Rightarrow \sqrt{(x-3)(x+1)} + 6 \geq 0$

④ Доказ. $\angle AOB = 5^\circ$

Вс. $\angle AOB \in \mathbb{Z} \cap [1; 50]$

Свойство ромба?

(a_1, b_1)

(a_2, b_2)

$\sigma(a_1, b_1)$

$\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} = 5$

$(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 25$

$\exists a_1 - a_2 = x, b_1 - b_2 = y$

$x, y \in \mathbb{N}_0$

$x^2 + y^2 = 25$

$(0, 5) (5, 0)$

$(3, 4) (4, 3)$

$\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$

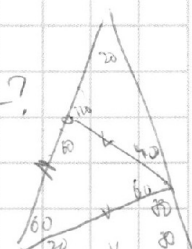
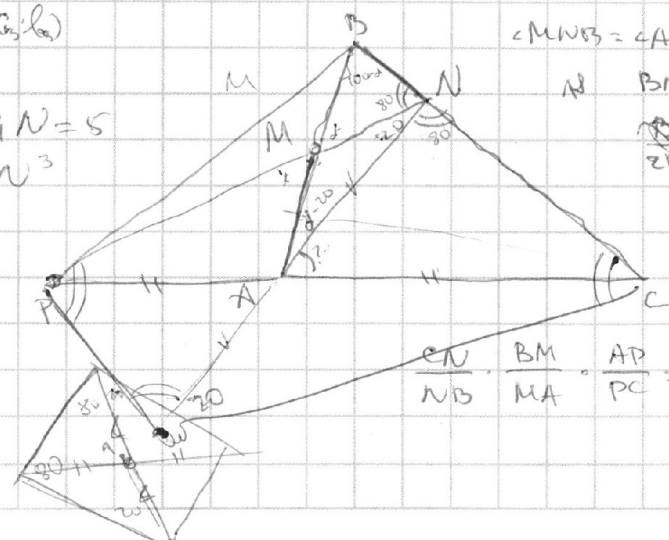
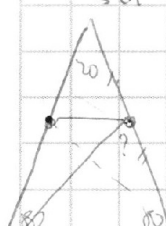
$\angle CAN = ?$

$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$

$\frac{BN}{NC} = \frac{2BM}{MA}$

$\frac{BN}{NC} = \frac{2BM}{MA}$

$\frac{CN}{NB} \cdot \frac{BM}{MA} \cdot \frac{AP}{PC} = 1 \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{1}{2} \Rightarrow PA = AC$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

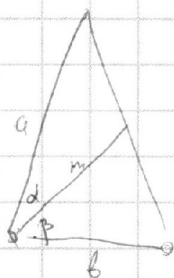
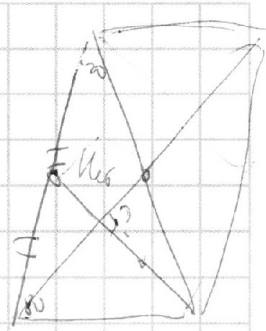
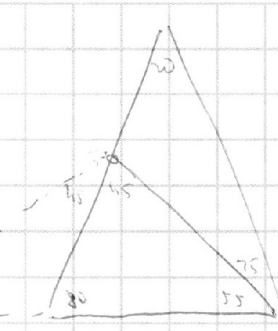
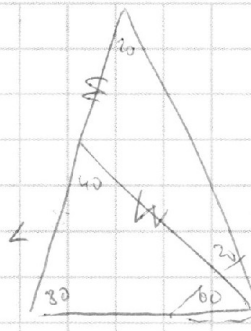
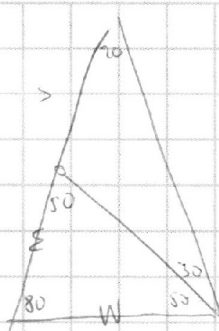
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



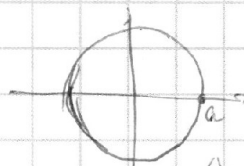
$$a \sin \alpha = b \sin \beta$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{b}{a}$$

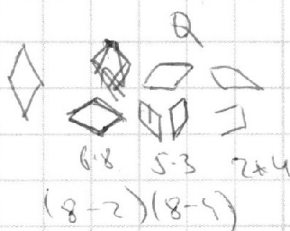
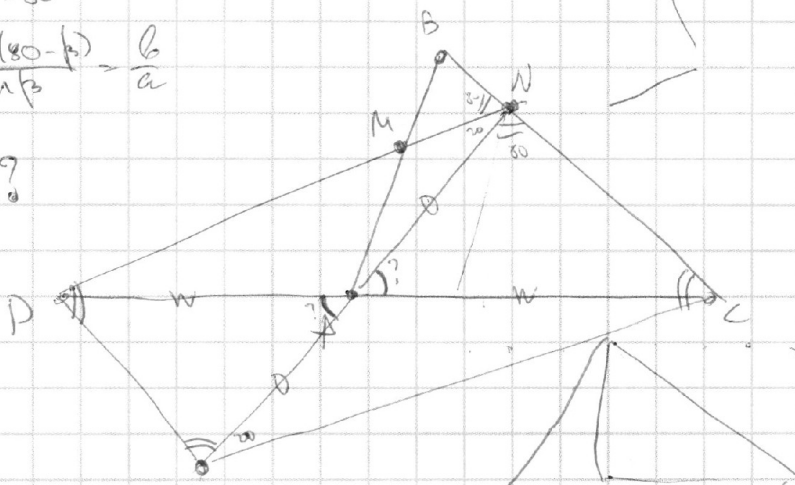
$$\alpha + \beta = 80$$

$$\frac{\sin(80 - \beta)}{\sin \beta} = \frac{b}{a}$$

$$\sin(80 - \beta) = \sin 80 \sin \beta - \cos 80 \cos \beta$$



$$x \in [-a, a]?$$



Да, если верно

Аналогично
Решение

$$47 \cdot 41 = (44 - 3)(44 + 3)$$

$$46 \cdot 42 = (44 - 2)(44 + 2)$$

$$44^2 - 9 + 44^2 - 4$$

$$2 \cdot 44^2 - 4 \cdot 44 + 1$$

$$2 \cdot 44^2 - 4 \cdot 44 + 2$$

$$44^2 = 9 \cdot 16 \cdot 121$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ 16 \\ \hline 726 \\ 121 \\ \hline 1536 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1836 \\ - 176 \\ \hline 1760 \\ - 1760 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ + 11 \\ \hline 16 \\ 16 \\ \hline 176 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1735 \\ 2 \\ \hline 2470 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

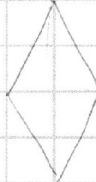
7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

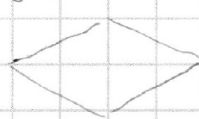
Черновики

6+8

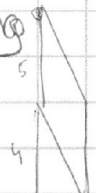


но 1 в черновик

8+6

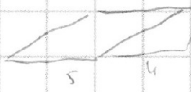


3+9

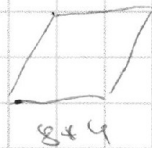


но 2 в черновик

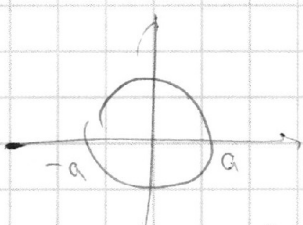
4+8



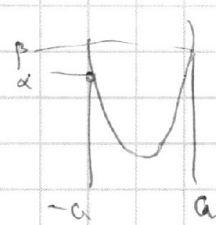
9+3



8+4



$$x^2 - 6x + a, \quad x \in [-a; a]$$
$$(x^2 - 6x + a)' = 2x - 6$$
$$x < 3 \Rightarrow \text{убывает}$$
$$x > 3 \Rightarrow \text{возрастает}$$



$$\max \{ a^2 - 6a + a; a^2 + 6a + a \} = 8$$

$$a^2 - 5a$$

$$a^2 + 7a$$

$$\begin{array}{r} * 121 \\ 16 \\ \hline 726 \\ 121 \\ \hline 51336 \\ * 1336 \\ 6 \\ \hline 11616 \\ - 176 \\ \hline 11440 \\ \cdot 2 \\ \hline 22880 \\ + 2025 \\ \hline 24905 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ + 11 \\ \hline 16 \\ 16 \\ \hline 176 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11440 \\ - 25 \\ \hline 11415 \\ + 2025 \\ \hline 2025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11415 \\ + 2 \\ \hline 22830 \\ + 2025 \\ \hline 24855 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|\sqrt{x^2-2x-3}+6| \geq |\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1| + |7-2x| \quad \text{Человек}$$

$$OD3: x^2-2x-3 \geq 0$$

$$(x+1)(x-3) \geq 0$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-2x-3} \geq 2x-1 \\ 2x-1 \geq 0 \\ x^2-2x-3 \geq (2x-1)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x^2-2x-3 \geq 4x^2-4x+1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 3x^2-2x \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 2x-1 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2-2x-3} \geq 1-2x \quad \text{при } x < 0 \quad (x \leq -1)$$

$$x^2-2x-3 \geq 4x^2-4x+1$$

$$3x^2-2x+4 \leq 0$$

$$y = x-1$$

$$x = y+1$$

$$\sqrt{y^2-4}+6 \geq |\sqrt{y^2-4}+2y+1| + |5-2y|$$

$$OD3: |y| \geq 2 \Rightarrow y \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$$

$$\sqrt{y^2-4}+6 \geq |\sqrt{y^2-4}+2y+1| + |2y-5|$$

$$y = x-3$$

$$\sqrt{y(y+4)}$$

$$\text{Когда } \sqrt{y^2-4}+2y+1 \geq 0?$$

$$\sqrt{y^2-4} \geq 1-2y \quad \text{при } y < 0$$

$$z = -y > 0$$

$$z \geq 2$$

$$\sqrt{z^2-4}+2z+1 \geq 0$$

$$\sqrt{z^2-4} \geq 2z-5$$

$$z^2-4 \geq 4z^2-4z+1$$

$$3z^2-4z+5 \leq 0 \quad \text{Ай ай ай, плохо!}$$

$$0 = 16 - 3 \cdot 5 \cdot 4 < 0 - \text{не реш.}$$

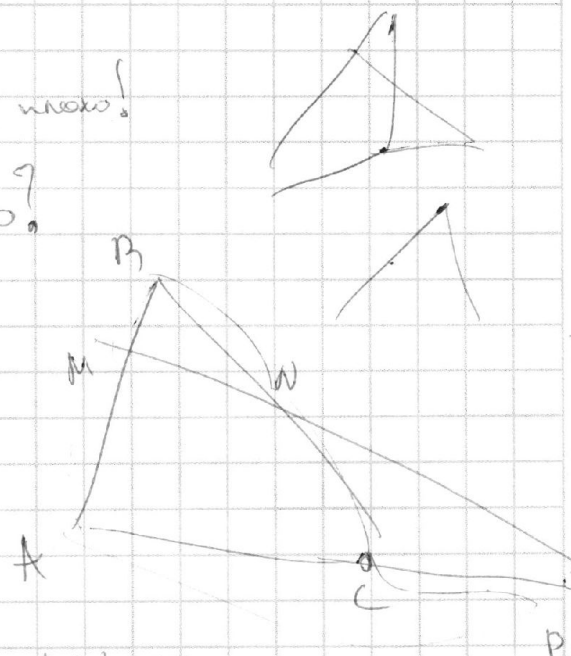
Значит, этот метод всегда ≥ 0 .

$$\sqrt{y^2-4}+6 \geq \sqrt{y^2-4}+2y+1 + |2y-5|$$

$$6 \geq 2y+1 + |2y-5|$$

$$5 \geq 2y + |2y-5|$$

Далее рассуждаем сверху



$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$$

$$\frac{2BM}{MA} \cdot \frac{AM}{MB} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$$

$$\frac{CP}{PA} = \frac{1}{2}$$