МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9

1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $n! + (n+1)! + (n+2)!$ делится на 361?

2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N, большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N.

3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left|\sqrt{x^2-2x-3}+6\right| \geqslant \left|\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1\right| + |7-2x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.

5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy, задаваемых уравнением $x^2+y^2=a^2$, наибольшее значение выражения x^2-6x+a равно 8.

7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80°$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$n!+(n+1)!+(n+2)! \,\vdots\, 361$

$n!(1+(n+1)+(n+1)(n+2)) \,\vdots\, 361$

$n!(1+(n+1)+(n^2+3n+2)) \,\vdots\, 361$

$n!(n^2+4n+4) \,\vdots\, 361$

$n!(n+2)^2 \,\vdots\, 361$

Поскольку $361=19^2$, $n!(n+2)^2 \,\vdots\, 19^2$; 19 – простое число

Заметим, что если $n! \,\vdots\, 19^2$, то $n \geq 38$, ведь иначе среди чисел от 1 до n встретится не более одного делящегося на 19.

Если $n! \not\vdots\, 19^2$, то $(n+2)^2 \,\vdots\, 19 \Rightarrow (n+2) \,\vdots\, 19$. Поскольку $n \in \mathbb{N}$, то $n+2 \geq 19 \Rightarrow n \geq 17$.

Таким образом, в любом случае $n \geq 17$.

Заметим, что при $n=17$ $n!+(n+1)!+(n+2)! = n!(n+2)^2 = 17! \cdot 19^2 \,\vdots\, 19^2$, значит, $n=17$ подходит.

Ответ: $n=17$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Запишем наши 5 послед. нат. чисел как $a-2$; $a-1$; a; $a+1$; $a+2$; $a \in \mathbb{N}$. Тогда:

$(a-2)^2+(a-1)^2+a^2+(a+1)^2+(a+2)^2-10=N^3$

$a^2-4a+4+a^2-2a+1+a^2+a^2+2a+1+a^2+4a+4=N^3$

$5a^2+10-10=N^3$

$5a^2=N^3$; $a, N \in \mathbb{N}$.

$5a^2 \vdots 5 \Rightarrow N^3 \vdots 5 \Rightarrow N \vdots 5 \Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N}: 5N_1=N$

$5a^2=125N_1^3$

$a^2=25N_1^3$

$25N_1^3 \vdots 5 \Rightarrow a^2 \vdots 5 \Rightarrow a \vdots 5 \Rightarrow \exists a_1 \in \mathbb{N}: 5a_1=a$

$25a_1^2=25N_1^3$

$a_1^2=N_1^3$.

Докажем, что N_1 — это точный квадрат. Для этого рассмотрим его произвольный простой делитель p, пусть он входит в N_1 в нечетной степени, тогда и в N_1^3 он тоже входит в нечетной степени, но тогда и в a_1^2 входит в нечет. степени. Противоречие.

Т.о. N_1 — полный квадрат. Также знаем, что $N>6 \Rightarrow N_1>\frac{6}{5}$, то есть $N_1>1$. Тогда минимальное значение для N_1 — это $2^2=4 \Rightarrow N=20$, тогда $a_1^2=N_1^3=4^3=64 \Rightarrow a_1=8$ (т.к. $a_1 \in \mathbb{N}$), значит, $a=40$.

При $a=40$: $(a-2)^2+\ldots+(a+2)^2-10=5a^2=5\cdot 40^2=5^3\cdot 8^2=5^3\cdot 4^3=20^3=N^3$.

Таким образом, показали, что $N \geq 20$ и показали, что $N=20$ достижимо.

Ответ: $N=20$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$; $\exists\, y=x-1 \Rightarrow x^2-2x-3=$
$=(y-2)(y+2)=y^2-4$.

Т.о., хотим решить неравенство:

$|\sqrt{y^2-4}+6| \geq |\sqrt{y^2-4}+2y+1|+|2y-5|$

ОДЗ: $y^2-4\geq 0 \Rightarrow |y|\geq 2 \Rightarrow y\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$

Заметим, что $\sqrt{y^2-4}+6>0$ $\forall y$, удовл ОДЗ.

Теперь посмотрим на слагаемое $(\sqrt{y^2-4}+2y+1)$. Если $y>0$, то оно тоже >0. ~~Пусть~~ посмотрим, при каких $y<0$ данное слагаемое положительно (или равно 0)

$\sqrt{y^2-4}+2y+1\geq 0$; $y<0$.

$\exists\, z=-y$, тогда $z\geq 2$ (т.к. ОДЗ)

$\sqrt{z^2-4}-2z+1\geq 0$

$\sqrt{z^2-4}\geq 2z-1>0$

$z^2-4\geq 4z^2-4z+1$

$3z^2-4z+5\leq 0$

$D=16-4\cdot 15<0$. Старш. коэф $>0 \Rightarrow 3z^2-4z+5>0$ $\forall z$.

То есть при всех отрицательных значениях y данное слагаемое отрицательно.

Теперь разберем 2 случая:

1) $y\geq 2 \Rightarrow \sqrt{y^2-4}+6\geq\sqrt{y^2-4}+2y+1+|2y-5| \Rightarrow 5\geq 2y+|2y-5| \Rightarrow$
$\Rightarrow 5-2y\geq|5-2y| \Rightarrow 5-2y\geq 0 \Rightarrow y\leq 2{,}5. \Rightarrow y\in[2;2{,}5]$

2) $y\leq -2 \Rightarrow \sqrt{y^2-4}+6\geq-\sqrt{y^2-4}-2y-1+|2y-5| \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\sqrt{y^2-4}+2y+7\geq|2y-5|$. Знаем, что при $y\leq-2$ слагаемое $(2y-5)$ – отрицательно. Значит,
$2\sqrt{y^2-4}+2y+7\geq-2y+5 \Rightarrow 2\sqrt{y^2-4}+4y+2\geq 0 \Rightarrow \sqrt{y^2-4}+2y+1\geq 0$.
Вспомним, что ранее мы уже исследовали знак слагаемого $(\sqrt{y^2-4}+2y+1)$ при отрицательных y и показали, что оно при таких значениях всегда отрицательно. Значит, второй случай не дал решений.

Итак, получили, что $y\in[2;2{,}5]$. Вспоминаем, что $y=x-1 \Rightarrow x-1\in[2;2{,}5] \Rightarrow x\in[3;3{,}5]$

Ответ: $x\in[3;3{,}5]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

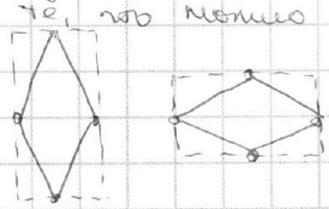
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

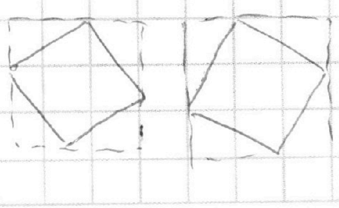
Для начала поймем, какими должны быть 2 целые точки (т.е. точки с целыми координатами), чтобы расстояние между ними было равно 5. Пусть первая точка имеет координаты $(a_1;b_1)$, а вторая – $(a_2;b_2)$. Должно выполняться равенство $\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}=5 \Leftrightarrow (a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2=25$.

Пусть $x=|a_1-a_2|$, $y=|b_1-b_2|$. Тогда $x,y\in\mathbb{N}_0$. Среди решений уравнения $x^2+y^2=25$ в целых неотрицательных числах существуют лишь следующие: $(0;5)$; $(5;0)$; $(3;4)$; $(4;3)$. В этом можно убедиться, например, путем обычного перебора. То есть если между двумя целыми точками расстояние 5, то они либо имеют одинаковую абсциссу, а ординаты отличаются на 5, либо одинаковую ординату, а абсциссы отличаются на 5, либо это вершины, прилежащие к гипотенузе какого-то целочисленного прямоуг. треугольника со сторонами $\{3,4,5\}$. ~~Таким образом,~~ Стороны наших ромбов могут идти либо по линиям целочисленной сетки (будем называть такие стороны прямыми), либо не вдоль этих линий (будем называть такие стороны косыми). Любые 2 противоположные стороны ромба либо обе прямые, либо обе косые, поэтому в любом ромбе либо 4 косых стороны, либо 2 косых, либо 0. Сначала посчитаем ромбы с 4 косыми сторонами. Они разбиваются на 3 типа: те, что можно вписать в прямоугольник 6×8, и те, что можно вписать в пр-к 8×6, и те, что можно вписать в квадрат 7×7.



Каждому такому ромбу поставим в биекцию описанный около него прямоугольник. Пр-ков 6×8 ровно $(50-6)(50-8)$, столько же и пр-ков 8×6.

~~Теперь посмотрим на ромбы со всеми прямыми сторонами. Это будут квадраты.~~



Количество ромбов 3-его вида в 2 раза больше, чем количество квадратов 7×7, т.е. $2(50-7)^2$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

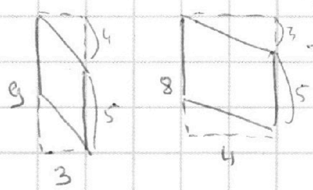
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Теперь о ромбах, у которых все стороны прямые. Это квадраты $5*5$, коих всего $(50-5)^2$.

Ромбы, у которых 2 косые стороны, разбиваются на 2 типа: те, у которых обе прямые стороны вертикальные и те, у которых обе прямые стороны горизонтальные. Посчитаем сначала к-во ромбов с вертикальными сторонами.



Поймём, что всего есть 2 вида ромбов: те, что вписываются в прямоуг. $3*9$ и те, что вписываются в прямоуг. $4*8$.

Из соображений осевой симметрии относительно средней линии прямоугольника каждому пр-ку $3*9$ или $4*8$ соответствует ровно 2 нужных нам ромба. Значит, количество $= 2((50-3)(50-9)+(50-4)(50-8))$.

Понятно, что количество ромбов с двумя вертикальными сторонами равно кол-ву ромбов с двумя гориз. сторонами, ~~это~~ ведь если повернуть сетку на $90°$, одни перейдут в другие. Значит, ромбов с двумя гориз. ст. тоже $2((50-3)(50-9)+(50-4)(50-8))$.

Т.о., общее кол-во $= 2((50-6)(50-8)+(50-7)^2+2((50-3)(50-9)+$
$+(50-4)(50-8))) = 2(44\cdot 42+43^2+2(47\cdot 41+46\cdot 42)) =$
$= 2(43^2-1+43^2+2(44^2-9+44^2-4)) = 2(2\cdot 43^2-1+4\cdot 44^2-26) =$
$= 2(2\cdot 43^2+4\cdot 44^2-27) = 2(2\cdot 44^2-4\cdot 44+2+4\cdot 44^2-27) =$
$= 2(6\cdot 44^2-4\cdot 44-25)$ = $\cancel{2(11834-176-25)} = \cancel{2(1760-25)} =$
$\cancel{2\cdot 1735 = 2470}$ (Но это без учета $(50-5)^2$ квадратов.

= 22880

~~Ответ 2470~~

$\cancel{2470+45^2 = 2470+2025 = 4495}$

$22880+45^2 = 22880+2025 = 24855$

Ответ: ~~4495~~ ~~24895~~ 24855

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $x \geq 0$, иначе $19 \cdot 2^x + 2025 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$.

$19 \cdot 2^x = y^2 - 2025 = y^2 - 45^2 = (y-45)(y+45)$

То есть $19 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$. Пусть $y > 0 \Rightarrow y+45 > 0 \Rightarrow y-45 > 0$.

Возможны лишь 2 случая:

1) $y-45 \,\vdots\, 19 \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0: \begin{cases} y-45 = 19 \cdot 2^\alpha \\ y+45 = 2^\beta \\ \alpha+\beta = x \end{cases} \Rightarrow 90 = 2^\beta - 19 \cdot 2^\alpha$.

Заметим, что если $\begin{cases} \alpha \geq 2 \\ \beta \geq 2 \end{cases}$, то $(2^\beta - 19 \cdot 2^\alpha) \,\vdots\, 4 \Rightarrow 90 \,\vdots\, 4$, прот-е.

Значит, $\left[\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ \beta = 1 \end{array}\right.$

(а) $\alpha = 0 \Rightarrow 90 = 2^\beta - 19 \Rightarrow 109 = 2^\beta$, но $109 \not\vdots\, 2$, нет решений

(б) $\alpha = 1 \Rightarrow 90 = 2^\beta - 38 \Rightarrow 2^\beta = 128 \Rightarrow \beta = 7 \Rightarrow x = 8$;

$y = 19 \cdot 2^\alpha + 45 = 38 + 45 = 83$

(в) $\beta = 0 \Rightarrow 90 = 1 - 19 \cdot 2^\alpha < 0$, нет реш.

(г) $\beta = 1 \Rightarrow 90 = 2 - 19 \cdot 2^\alpha < 0$, нет реш.

Т.о, этот случай принес лишь одно решение $(8;83)$

2) $y+45 \,\vdots\, 19 \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0: \begin{cases} y+45 = 19 \cdot 2^\alpha \\ y-45 = 2^\beta \\ \alpha+\beta = x \end{cases} \Rightarrow 90 = 19 \cdot 2^\alpha - 2^\beta$

И снова, если $\begin{cases} \alpha \geq 2 \\ \beta \geq 2 \end{cases}$, то $19 \cdot 2^\alpha - 2^\beta \,\vdots\, 4 \Rightarrow 90 \,\vdots\, 4$, прот-е.

значит, опять те же случаи:

(а) $\alpha = 0 \Rightarrow 90 = 19 - 2^\beta < 19$, нет реш.

(б) $\alpha = 1 \Rightarrow 90 = 38 - 2^\beta < 38$, нет реш.

(в) $\beta = 0 \Rightarrow 90 = 19 \cdot 2^\alpha - 1 \Rightarrow 91 = 19 \cdot 2^\alpha \Rightarrow 91 \,\vdots\, 19$, но это не так. Ø реш.

(г) $\beta = 1 \Rightarrow 90 = 19 \cdot 2^\alpha - 2 \Rightarrow 92 = 19 \cdot 2^\alpha \Rightarrow 92 \,\vdots\, 19$, но $92 \not\vdots\, 19$. Ø реш.

Т.о, если $y > 0$, то решение лишь одно: $(8;83)$

Теперь заметим, что если существует решение $(x_0; y_0)$, то существует и решение $(x_0; -y_0)$, ведь $(y_0)^2 = (-y_0)^2$.

То есть каждому решению с положительным y соответствует ровно одно с противоположным отрицательным y, и наоборот.

Значит, при $y < 0$ есть еще ровно 1 решение: $(8; -83)$

$y = 0$ не подходит.

<u>Ответ</u>: $(8;83)$ и $(8;-83)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что уравнение $x^2+y^2=a^2$ - это уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом $|a|$. Значит, x может принимать значения от $-a$ до a (или от a до $-a$, если $a<0$), другими словами, $|x|\le|a|$. Уравнение x^2-6x+a задает параболу ветвями вверх. Максимум данной функции на отрезке достигается на одном из его концов (в силу того, что производная имеет не более 1 корня). Значит, если $f(x)=x^2-6x+a$, то $\max\{f(a); f(-a)\}=8$.

1) $f(a)=8 \Rightarrow a^2-6a+a=8 \Rightarrow a^2-5a-8=0$.

$D=25+8\cdot4=25+32=57 \Rightarrow a=\frac{5\pm\sqrt{57}}{2}$

Если $a>0$, то $f(-a)=a^2+6a+a=a^2+7a>f(a) \Rightarrow f(-a)>8$.

Значит, $a=\frac{5-\sqrt{57}}{2}$

2) $f(-a)=8 \Rightarrow a^2+7a=8 \Rightarrow a^2+7a-8=0 \Rightarrow (a+8)(a-1)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-8 \\ a=1 \end{array}\right.$ Если $a<0$, то $f(a)=a^2-5a>a^2+7a=8$.

Значит, $a=1$

Таким образом, подходят лишь 2 возможных значения параметра: 1 и $\frac{5-\sqrt{57}}{2}$

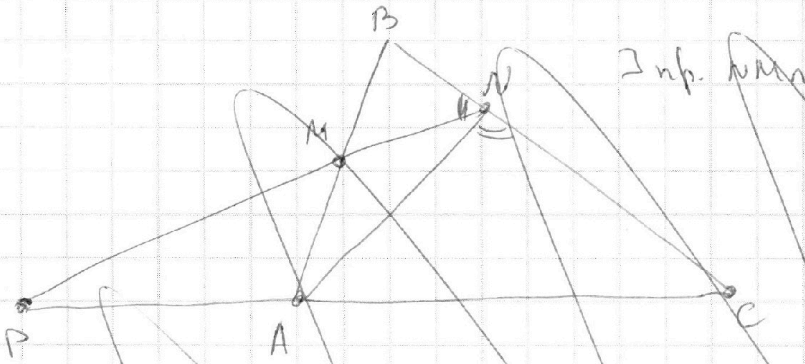
Ответ: 1 и $\frac{5-\sqrt{57}}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



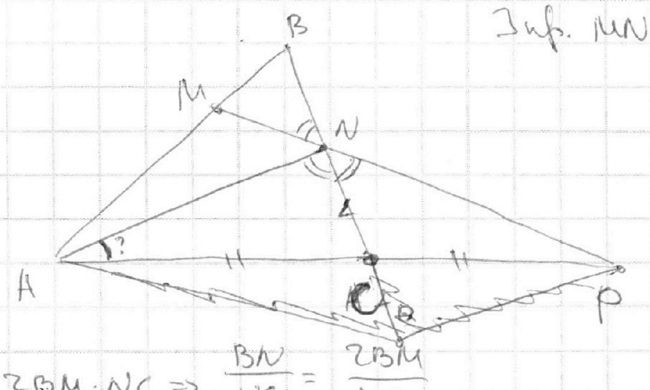
~~∃ пр. NM ∩ пр. AC =: P~~

~~$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC \Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{2BM}{MA}$.~~

~~Т. Менелая для △ABC и сек. MN: $\frac{CN}{NB} \cdot \frac{BM}{MA} \cdot \frac{AP}{PC} = 1 \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow$~~

∃ пр. MN ∩ пр. AC =: P



$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC \Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{2BM}{MA}$.

Т. Менелая для △ABC, сек. MN: $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AM}{MB} \cdot \frac{2BM}{MA} \cdot \frac{CP}{PA} = 1 \Rightarrow \frac{CP}{PA} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ C – сер. AP

~~Пусть т. Q такая, что ANPQ – параллелограмм.~~

$\angle MNB = \angle CNP = 80°$ (вертик. углы).

Также $\angle ANC = 80°$. Значит, $\angle ANC = \angle PNC = 80°$.

То есть в △ANP чевиана NC – биссектриса и медиана, значит, △ANP – р/б (AN = NP). Тогда $\angle NAP = (180° - \angle ANP)/2 = (180° - 160°)/2 = 10°$

Ответ: 10°

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Черновик

① $n! + (n+1)! + (n+2)! \;\vdots\; 361 = 19^2$ $(20-1)^2 = 400 - 40 + 1 = 361$

$n!\,(1 + (n+1) + (n+1)(n+2)) \vdots 19^2$

$n!\,(n+1)(n+3) \vdots 19^2$

Если $n! \vdots 19^2$, то $n \geq 38$

$n+1 \vdots 19^2 \Rightarrow n+1 \geq 19^2$

$n+3 \vdots 19^2 \Rightarrow n+3 \geq 19^2$

$n! \vdots 19 \Rightarrow n \geq 19$

$\left[\begin{array}{l} n+1 \vdots 19 \\ n+3 \vdots 19 \end{array}\right.$

Очевидно

② $(a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 = a^2 - 4a + 4 + a^2 - 2a + 1 + a^2 + a^2 + 2a + 1 + a^2 + 4a + 4 = 5a^2 + 10$

$5a^2 + 10 - 10 = N^3$

$5a^2 = N^3 \vdots 5 \Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N}: N = 5N_1$

$5a^2 = 125 N_1^3$

$a^2 = 25 N_1^3$ $a \vdots 5 \Rightarrow \exists a_1 \in \mathbb{N}: a = 5a_1$

$25a_1^2 = 25 N_1^3$

$a_1^2 = N_1^3$ N_1 — квадрат нат. числа.

$N_1^3 = x^6,\ x \in \mathbb{N} \Rightarrow N_1^3 \geq 2^6$

$N_1^3 = 2^6 \Rightarrow N_1 = 2^2 = 4$

$N = 4 \cdot 5 = 20$ $\boxed{N=20}$

$a_1 = 8 \Rightarrow a = 40$

$5a^2 = 5^3 \cdot 8^2 = 5^3 \cdot 2^6 = (5 \cdot 2^2)^3 = 20^3 = N^3$

Очевидно

$19 \cdot 9 = 171$ $2025 : 19$, -19, 125, -114, 11 $19 \cdot 6 = 114$ $19 \cdot 8 = 152$ $19 \cdot 7 = 133$

$2025 \equiv 11$

y	y^2
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	6
6	17
17	11
8	
-8	

⑤ $19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$

$2025 \equiv 1 \pmod 4$

$19 \cdot 2^x = y^2 - 2025 = (y-45)(y+45)$

$19 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$

$\exists \begin{cases} y - 45 = 19 \cdot 2^\alpha \\ y + 45 = 2^\beta \end{cases} \Rightarrow 90 = 2^\beta - 19 \cdot 2^\alpha$

Если $\begin{cases} \alpha \geq 2 \\ \beta \geq 2 \end{cases}$ противор.

③ $\left|\sqrt{(x-3)(x+1)} + 6\right| \geq \left|\sqrt{(x-3)(x+1)} + 2x - 1\right| + |7 - 2x|$ Пока лень!

Всё ок.

ОДЗ: $(x-3)(x+1) \geq 0$

$x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$

1) $x \in (-\infty; -1] \Rightarrow \sqrt{(x-3)(x+1)} + 6 \geq$

$\left[\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ \beta = 1 \end{array}\right.$

$83 - 45 = \boxed{38}$ $19 \cdot 5 = 95$

$-83 + 45 \vdots 19$

④ Ромб, $l_{стор} = 5$. Все вершины $\in [1;50]$. Сколько ромбов?

$(a_1;b_1)$ $(c_1;b_{c1})$ $(a_2;b_2)$ $(c_2;b_{c2})$

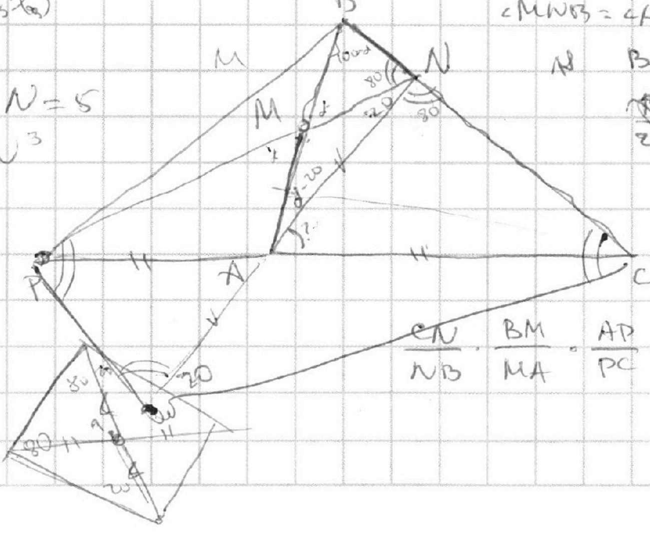
$\sqrt{(a_1-a_2)^2 + (b_1-b_2)^2} = 5$

$(a_1-a_2)^2 + (b_1-b_2)^2 = 25$

$\exists\, |a_1 - a_2| = x;\ |b_1 - b_2| = y$

$x, y \in \mathbb{N}_0$

$x^2 + y^2 = 25$ $(0;5)\ (5;0)\ (3;4)\ (4;3)$



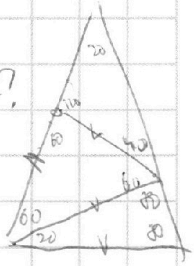
$\angle MNB = \angle ANC = 80°$ $\angle CAN$ - ?

$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$

$\frac{BN}{2BM} = \frac{NC}{MA}$

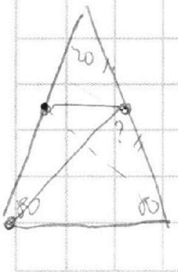
$\frac{BN}{NC} = \frac{2BM}{MA}$

$\frac{CN}{NB} \cdot \frac{BM}{MA} \cdot \frac{AP}{PC} = 1 \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{1}{2} \Rightarrow PA = AC$



$a = 5;\ N = 5$

$5a^2 = N^3$

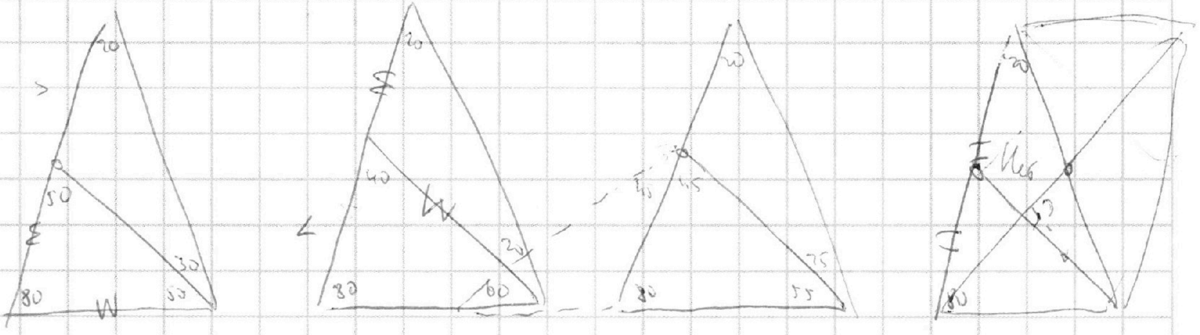


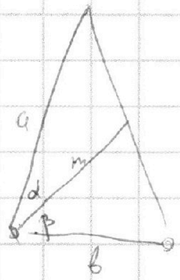
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





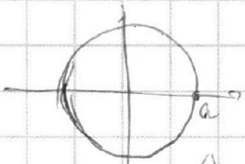
$a m \sin\alpha = b m \sin\beta$

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{b}{a}$

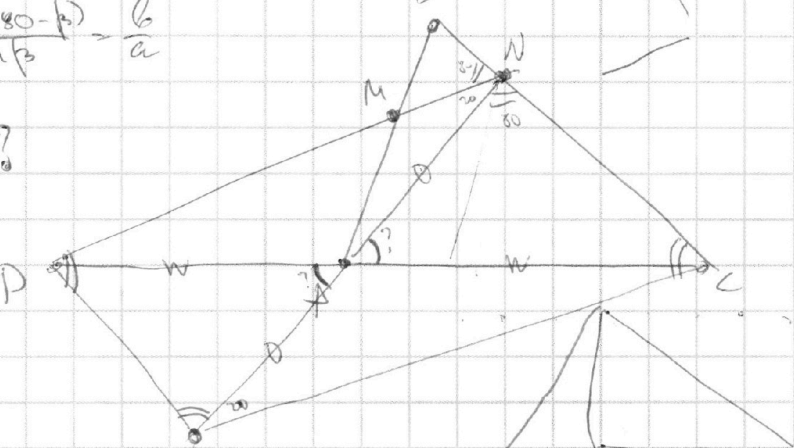
$\alpha+\beta = 80$

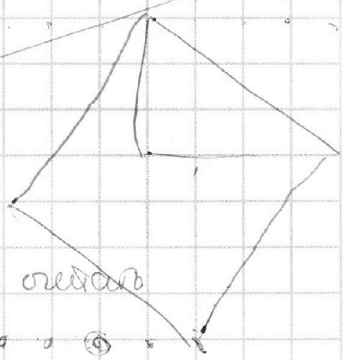
$\frac{\sin(80-\beta)}{\sin\beta} = \frac{b}{a}$

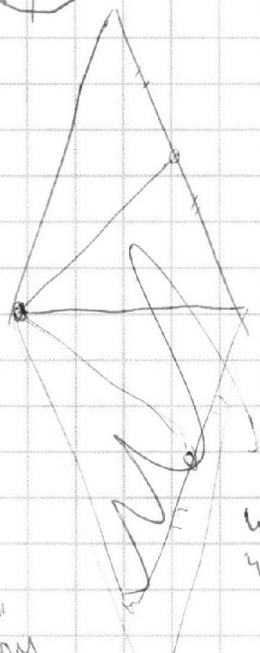
$\sin(80-\beta) = \sin 80 \sin\beta - \cos 80 \cos\beta$

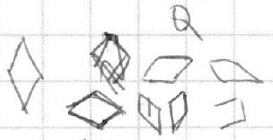


$x \in [-a; a]$?





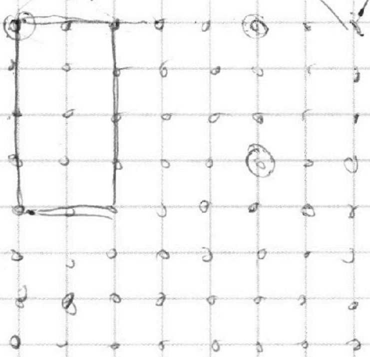




6·8 5·3 7+4

$(8-2)(8-4)$

Да, просто [illegible]



Анк
Согл
Усл
Реш
Игра

$47\cdot41 = (44-3)(44+3)$

$46\cdot42 = (44-2)(44+2)$

44^2-9+44^2-4

$43^2 = (44-1)^2 = 44^2 - 2\cdot44 + 1$

$2\cdot44^2 - 4\cdot44 + 2$

$44^2 = 9\cdot16\cdot121$

121 × 16 = 726 + 121 = 1936

1936 − 176 = 1760 − 25 = 1735

16 × 11 = 16 + 16 = 176

1735 × 2 = 2470

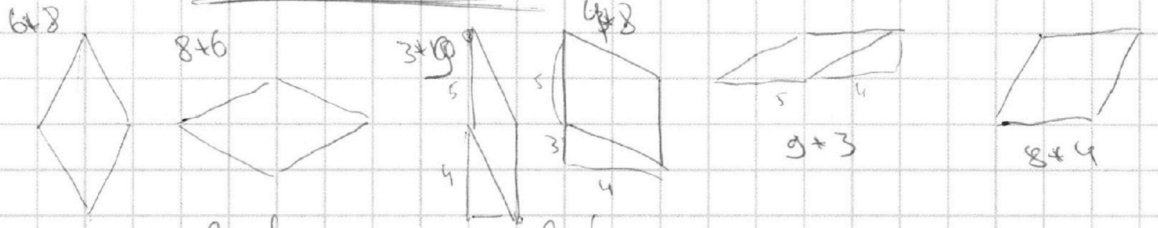
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

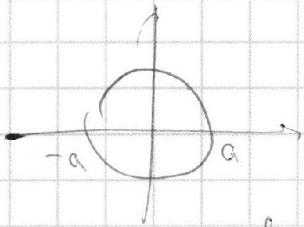
СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Черновик



по 1 в прямоуг по 2 в прямоуг

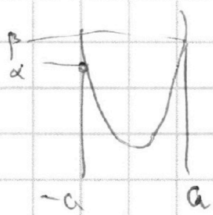


$x^2-6x+a, \quad x \in [-a;a]$

$(x^2-6x+a)' = 2x-6$

$x<3 \Rightarrow$ убывает

$x>3 \Rightarrow$ возрастает



$\max\{a^2-6a+a;\ a^2+6a+a\} = 8$

a^2-5a

a^2+7a

$121 \cdot 16 = 726 + 121\ \ldots = 1936$

$1936 \cdot 6 = 11616$

$11616 - 176 = 11440$

$11440 \cdot 2 = 22880$

$22880 + 2025 = 24905$

$16 \cdot 11 = 16 + 16\ \ldots = 176$

$11440 - 25 = 11415$

$11415 \cdot 2 = 22830$

$22830 + 2025 = 24855$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$|\sqrt{x^2-2x-3}+6| \geq |\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1|+|7-2x|$ Черновик

ОДЗ: $x^2-2x-3\geq 0$

$(x+1)(x-3)\geq 0$

$x\in(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$

$\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1\geq 0$

$\sqrt{x^2-2x-3}\geq 1-2x$ при $x<0$ $(x\leq -1)$

$x^2-2x-3\geq 4x^2-4x+1$

$3x^2-2x+4\leq 0$

$x=y+1$

$y=x-1$

$\sqrt{y^2-4}+6\geq|\sqrt{y^2-4}+2y+1|+|5-2y|$

$y=x-3$

$\sqrt{y(y+4)}$

ОДЗ: $|y|\geq 2 \Rightarrow y\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$

$\sqrt{y^2-4}+6\geq|\sqrt{y^2-4}+2y+1|+|2y-5|$

Когда $\sqrt{y^2-4}+2y+1\geq 0$?

$\sqrt{y^2-4}\geq -1-2y$ при $y<0$

$z=-y>0$ $\quad z\geq 2$

$\sqrt{z^2-4}-2z+1\geq 0$

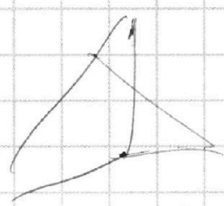
$\sqrt{z^2-4}\geq 2z-1$

$z^2-4\geq 4z^2-4z+1$

$3z^2-4z+5\leq 0$ Ай ай ай, плохо!

$D=16-3\cdot 5\cdot 4<0$ — нет реш.

Значит, этот модуль всегда ≥ 0.

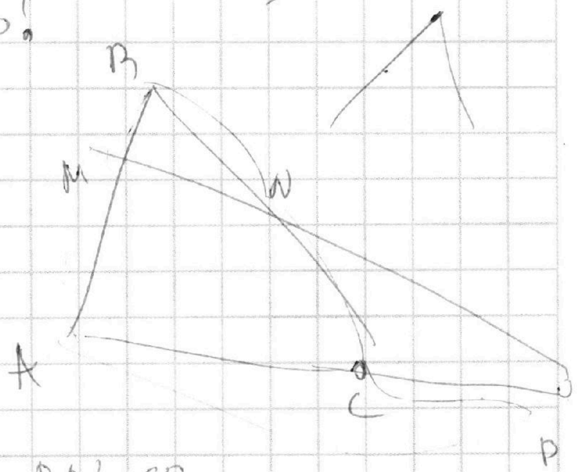


$\sqrt{y^2-4}+6\geq\sqrt{y^2-4}+2y+1+|2y-5|$

$6\geq 2y+1+|2y-5|$

$5\geq 2y+|2y-5|$

Далее рассмотреть случаи



$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}=1$

$\frac{2BM}{MA}\cdot\frac{AM}{MB}\cdot\frac{CP}{PA}=1$

$\frac{CP}{PA}=\frac{1}{2}$