



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $n! + (n+1)! + (n+2)!$ делится на 361?
2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + |7 - 2x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $x^2 - 6x + a$ равно 8.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

Решение: 1) разложиме. $n! + (n+1)! + (n+2)! = n! \cdot (1 + n+1 + (n+1)(n+2)) =$
 $= n! \cdot (1 + n + (n^2 + 3n + 2)) = n! \cdot (n^2 + 4n + 4) = n! \cdot (n+2)^2$

2) $361 = 19^2$; 19 - простое число; найдем, чтобы число $n!$ делилось на 19^2 , число n должно быть больше равно, чем 19 , т.к. тогда в произведении канторовских чисел.

1, 2, ..., 19, 20, ..., 38 число 19 входит два раза (1 раз 19 и $19 \cdot 2 = 38$)

3) найдем, что чтобы число $(n+2)^2 : 19^2$, число $n+2$

должно делиться на 19, а это возможно при минимальном

$$n+2 = 19 \Rightarrow n = 17; (n+2)^2 = (17+2)^2 = 19^2 = 361$$

4) получаем из 2 и 3 пунктов, что минимальное $n = 17$, т.к. $17 < 38$

5) найдем, что по отдельности $n!$ и $(n+2)^2$, а значит наше минимальное n и есть 17. $(17! \cdot 19^2) : 361$

Ответ: $n = 17$



1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2 ~~Бессмысленно~~: Пусть ищем 5 последовательных чисел равных $n-2, n-1, n, n+1, n+2$, тогда сумма их квадратов равна: $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = \underline{n^2} + \underline{4} - \underline{4n} + \underline{n^2} - \underline{2n} + \underline{1} + \underline{n^2} + \underline{n^2} + \underline{1} + \underline{2n} + \underline{n^2} + \underline{4} + \underline{4n} = 5n^2 + 10$

2) далее из суммы вычтем число 10 и получим $5n^2 + 10 - 10 = 5n^2 = y$ 3. т.к. $y \in \mathbb{N}$
получим, что $y : 5$, т.к. в число $5n^2$ пятерка должна входить в степени деления на 3, то в число.

n пятерка должна входить в степени $3k+1$, т.к.

в число n^2 , тогда она входит в степени $2(3k+1) = 6k+2$,

и еще прибавим 5 и получим степень $6k+2+1 = 6k+3 = 3(2k+1) : 3$, и также перепишем $\sqrt[n]{}$ дающая на 5, больше 6.

3) ~~$5 \cdot 2 = 10 \Rightarrow 5n^2 = 5 \cdot 10^2 = 5 \cdot 2^3 \cdot 2^2$ не является кубом, т.к. 2 входит~~

~~в число в степени не делится на 3. получим, что~~

3) ~~минимальный~~ ^{возможный} множитель числа ⁷¹ ~~это 2, значит.~~

В наше число $5n^2$, 2 должна входить в степени: 3, а значит

n должно делиться на 2 ^{3, т.к. $8:2=4$} и на 5 ⁷¹ (из делимости на 5 в 2х)

значит число $n = 5 \cdot 2^3 = 40$; Проверка: $5n^2 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot 2^3 =$

$$= 125 \cdot 64 \cdot (5 \cdot 2^3)^3 = 20^3 = 8000$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2 (Продолжение)

Ответ: 20



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3. Решение: найдем, что $x^2 - 2x - 3 \geq 0$, т.е.

также не можем извлечь корень, тогда найдем корни-
вые x , для этого разложим на множители. $x^2 - 2x - 3 =$
 $= (x+1)(x-3)$, тогда решим неравенство методом

интервалов $(x+1)/(x-3) \geq 0$ $\frac{+}{-} \frac{-}{+} \frac{+}{-}$, тогда

$x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$, рассмотрим 2 случая. случаи.

раскрыв модуль:

1) $\sqrt{(x+1)(x-3)} + 6 \geq 0$; $\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \geq 0$; $7 - 2x \geq 0$, тогда раскроем модуль.

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 + 7 - 2x$$

$$7 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{7}{2}$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6$$

$0 \geq 0$ - верно. при $x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$

$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 1 - 2x$ (возведем в квадрат) при $1 - 2x \geq 0$ или $1 - 2x \leq 0$
 $x \leq \frac{1}{2}$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 1 + 4x - 4x$$

$$0 \geq 3x^2 - 2x + 4$$

$$D = 4 - 48 = -44 < 0$$

$$a = 3 \geq 0$$

$\Rightarrow 0 \geq 3x^2 - 2x + 4$ - не имеет

решений.

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \leq 0$$
 - всегда.

$$\sqrt{(x+1)(x-3)} + 6 \geq 0$$
 - всегда, т.к. $\sqrt{(x+1)(x-3)} \geq 0$ и $6 \geq 0$.

$\Rightarrow$ надо рассмотреть 2 случая при $7 - 2x \geq 0$ и $7 - 2x \leq 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 (Продолжение).

$$2) \sqrt{(x+1)(x-3)} + 6 \geq 0; \sqrt{x^2-2x-3} + 2x-1 \leq 0; 7-2x \geq 0.$$

$$\sqrt{(x+1)(x-3)} + 6 \geq -\sqrt{x^2-2x-3} - 2x + 1 + 7 - 2x.$$

$$2\sqrt{(x+1)(x-3)} + 4x - 2 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 2x-1 \geq 0, \text{ а по предположению } \sqrt{x^2-2x-3} + 2x-1 \leq 0 \Rightarrow \text{такого случая не может быть.}$$

$$2x-1 \geq -\sqrt{x^2-2x-3}$$

$$3) \sqrt{x^2-2x-3} + 6 \geq 0; \sqrt{x^2-2x-3} + 2x-1 \leq 0; 7-2x \leq 0.$$

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 6 \geq -\sqrt{x^2-2x-3} - 2x + 1 + 2x - 7$$

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 6 \geq -\sqrt{x^2-2x-3} - 6.$$

$2(\sqrt{x^2-2x-3} + 6) \geq 0$ — верно всегда при $x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$, но у нас есть ограничение. $x \leq \frac{1}{2}$ и $x \geq \frac{7}{2}$, а такого не может быть.

$$4) \sqrt{(x+1)(x-3)} + 6 \geq 0; \sqrt{x^2-2x-3} + 2x-1 \geq 0; 7-2x \geq 0.$$

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 6 \geq \sqrt{x^2-2x-3} + 2x-1 + 7-2x$$

$$6 \geq 7-1$$

$$6 \geq 6$$

$0 \geq 0 \Rightarrow$ верно при $x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$, но есть ограничение

$x > \frac{1}{2}$ и $x \leq \frac{7}{2} \Rightarrow$ наш подмножество $x \in [3; 3,5]$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 (Продолжение)

$$5) \sqrt{x^2-2x-3}+6 \geq 0; \sqrt{x^2-2x-3}+2x-1 \geq 0; 7-2x \leq 0$$

$$\sqrt{x^2-2x-3}+6 \geq \sqrt{x^2-2x-3}+2x-1+2x-7$$

$$6 \geq 4x-8$$

$$14 \geq 4x$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$$

$$x \leq \frac{7}{2}, \text{ но у нас есть ограничения } x \leq \frac{1}{2} \text{ и } x \geq \frac{7}{2}.$$

$\Rightarrow$ лев. неравенство не подходит ни один x .

$$6) \sqrt{x^2-2x-3}+6 \geq 0 - \text{всегда т.к. } \sqrt{\cdot} \geq 0 \text{ и } 6 > 0.$$

$$\text{Ответ: } x \in [3; 3,5]$$

$$\text{Решение: } \sqrt{x^2-2x-3}+2x-1 \geq 0.$$

$$\sqrt{x^2-2x-3} \geq 1-2x \text{ при } 1-2x \geq 0 \text{ (} x \leq \frac{1}{2} \text{) возведем в квадрат.}$$

$$x^2-2x-3 \geq 1+4x^2-4x$$

$$0 \geq 3x^2-2x+4.$$

$$\Delta = 4-48 = -44 < 0 \Rightarrow 3x^2-2x+4 > 0 - \text{всегда} = \text{коэф. при } x^2 \neq 3 > 0 \Rightarrow 0 \geq 3x^2-2x+4 - \text{не имеет смысла} \Rightarrow \text{при } x \leq \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1 \leq 0, \text{ а при } 1-2x \leq 0 \text{ (} x \geq \frac{1}{2} \text{)}$$

$$\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1 \geq 0 - \text{всегда.}$$

$$\text{Ответ: } x \in [3; 3,5]$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4. Решение: рассмотрим какие ромбы мы сможем нарисовать: 1) квадрат 5×5 с координатами $(x; y), (x+5; y), (x+5; y+5), (x; y+5)$; 2) ромб с координатами $(x; y), (x+3; y+4), (x-3; y+4), (x; y+8)$; 3) ромб с координатами $(x; y), (x+3; y+4), (x+3; y+8), (x; y+8)$ и все фигуры поворачиваем **поворотом**.

~~отмеченные~~ ~~прямые~~ Ox и Oy . на 90° этих фигур

1) где расположение фигур. 1 (квадрата 5×5) имеем.

45×45 способов, т.к. и левая и правая вершина должны

лежать внутри квадрата $45 \times 45 \Rightarrow 45 \cdot 45 = 2025$.

2) где расположение ромба с координатами $(x; y), (x+3; y+4), (x-3; y+4), (x; y+8)$ и то же, но повернутого на 90° имеем.

$44 \cdot 42 \cdot 2$ способа, т.к. точка пересечения диагоналей может

лежать только в прямоугольнике с координатами

$44 \cdot 42$, потому что углы 45° по 3. точки с обеих

сторон слева и справа по x , а по 4. точки сверху и снизу по y ,

умножаем на 2, т.к. при повороте на 90° ситуация симметрична.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

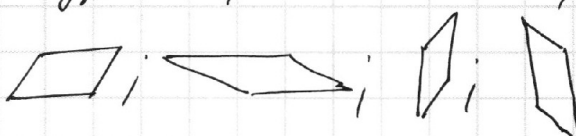
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 (Продолжение)

3) для расположения ромба с координатами $(x; y)$, $(x+3; y+4)$, $(x+5; y+9)$, $(x; y+5)$ и того фигур, которые образуются из этих фигур поворотами на 90° , т.е.

таких фигур: 

имеем. $47 \cdot 41 \cdot 4$ способа, т.к. имеем. каждая

вершина ромба  может быть только в прямоугольнике $47 \cdot 41$, т.к. относительно нее правая вершина вершина сдвинута на 3 точки вправо и на 4 вверх:

$$\begin{aligned} 4) \text{ посчитаем сумму. } & 45 \cdot 45 + 44 \cdot 42 \cdot 2 + 47 \cdot 41 \cdot 4 = \\ & = 2025 + 3696 + 7708 = 5721 + 7708 = 13429 \end{aligned}$$

Ответ: 13429



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$(y-45)(y+45) = 19 \cdot 2^x$$

$$y = 19k + 45$$

k - чет.

$$38 + 45 = 83$$

$$19 + 45 = 64$$

19

$$38 \cdot 128 = 19 \cdot 2^x$$

$$19 \cdot 2 \cdot 2^7 = 19 \cdot 2^x \Rightarrow x = 8$$

$$\begin{array}{r} \times 19 \\ 4 \\ \hline \end{array}$$

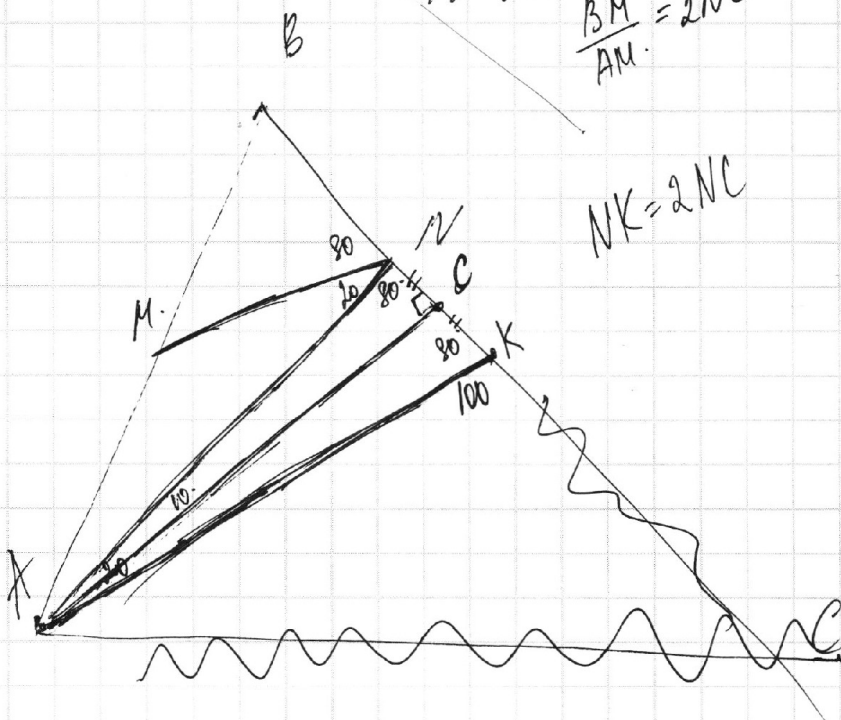
$$76 + 45 = 121$$

$$76 \cdot 166$$

$$19 \cdot 4 \cdot 2$$

$$\frac{BM}{AM} = 2 \frac{BN}{AN}$$

$$NK = 2NC$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) n! + (n+1)! + (n+2)! = n! (1 + n+1 + (n+1)(n+2)) =$$

$$361 = 19^2$$

$$= n! (1 + n + 1 + n^2 + 3n + 2) = n! (n^2 + 4n + 4) =$$

$$= n! (n+2)^2 \text{ при } n=17$$

$$\begin{array}{r} 361 \overline{) 19} \\ 19 \overline{) 19} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$|x-1| = -x+1$$

$$|-5-1| = 6. \quad 5+1=6.$$

2)

$$(n-2)(n-1)(n)(n+1)(n+2) \quad (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 =$$

$$= n^2 + 4 - 4n + n^2 + 1 - 2n + n^2 + n^2 + 1 + 2n + n^2 + 4 + 4n =$$

$$= 5n^2 + 8 + 2 = 5n^2 + 10 = 5(n^2 + 2)$$

$$(\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6) \geq (\sqrt{x^2 - 2x - 3} + x - 1)$$

$$|7-2x|$$

$$7 \geq 2x \quad 4-12 \cdot 4 =$$

$$\frac{7}{2} \geq x$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

$$x = 4 + 12 = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 3 \text{ и } -1.$$

$$(x-3)(x+1)$$

$$(x-3)(x+1) \geq 0$$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ -1 \quad 3 \end{array}$$

$$5n^2 + 10 - 10 = 5n^2 \quad n=26$$

$$n=10 \quad n=15 \quad n=25$$

$$n=20 \quad 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

$$n=40 \quad 5 \cdot 2^3 \cdot 5$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 =$$

$$= 5^3 \cdot 2^6 = (5 \cdot 2^2)^3 =$$

$$\sqrt{A} + 6 \geq \sqrt{A} + 2x - 1 + 7 - 2x \text{ все полож.}$$

$$\sqrt{A} + 6 \geq \sqrt{A} + 6.$$

$$0 \geq 0 \Rightarrow \text{при } x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty) \text{ 1-положи}$$

$$-\sqrt{A} - 6 \geq \sqrt{A} + 2x - 1 + 7 - 2x$$

$$-\sqrt{A} - 6 \geq \sqrt{A} + 6$$

$$0 \geq 2\sqrt{A} + 12$$

$$0 \geq \sqrt{A} + 6.$$

$$0 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3}$$

$$36 \geq x^2 - 2x - 3$$

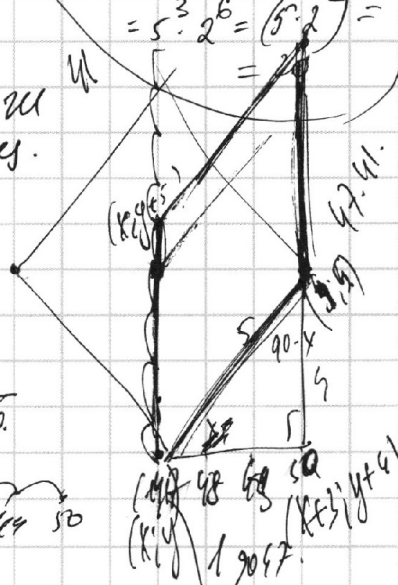
$$0 \geq x^2 - 2x - 39$$

$$x = 4 + 120 + 36 = 160$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{160}}{2} = 1 \pm \sqrt{40}$$

$$45 \quad 46 \quad 47 \quad 48 \quad 49 \quad 50$$

$$1 \dots 40$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, including:

- Top left:** A coordinate system with points $(3;4)$, $(0;5)$, and $(6;6)$. A curve is labeled $19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$. Calculations show $19 \cdot 2^x + 45^2 = y^2$ and $19 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$. A note says $19 \cdot 5 \cdot 8 = 57$ and $19 \cdot 5 = 95$.
- Top right:** A small diagram with points $(5;90)$ and $(54;16)$. Calculations show $47 - 4 + 1 = 44 \cdot 42$ and $19 \cdot 5 \cdot 8 = 57$.
- Middle left:** A parabola $x^2 - 6x + a - 8 = 0$ with vertex $(3; -\frac{6}{2})$. Calculations show $a = 36 - 4(a-8) = 68 - 4a$ and $x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{17-a}}{2}$.
- Middle right:** A triangle with vertices A , B , and C . Side lengths are given: $AB = 14$, $BC = 100$, $AC = 80$. Angles are 80° at B and C . Calculations show $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$ and $\frac{BN}{BM} = \frac{2NC}{MA}$.
- Bottom left:** A coordinate system with a circle and a parabola. Calculations show $x^2 - 2x - 3 - 2x + 1 \geq 0$ and $x^2 - 2x - 3 \geq 4x^2 - 1 - 4x$.
- Bottom right:** A large triangle with vertices A , B , and C . Side lengths are given: $AB = 14$, $BC = 100$, $AC = 80$. Angles are 80° at B and C . Calculations show $AB^2 = BN^2 + AN^2 - 2BN \cdot AN \cdot \cos(\angle BNA)$ and $AC^2 = AN^2 + NC^2 - 2AN \cdot NC \cdot \cos(\angle ANC)$.