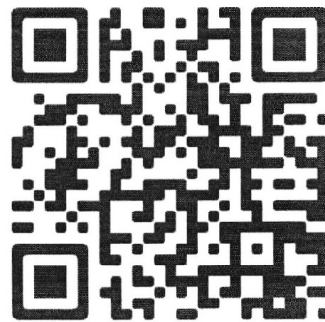




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

8

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ? 30001

3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.

4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока? 3,5

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + (a^2 - a - 7) = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + (6 - a^5) = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.

6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.

7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2 & (1) \\ yz = -2x + x^2 & (2) \\ zx = -2y + y^2 & (3) \end{cases}$$

$$(1)-(2): \quad xy - yz = z^2 - 2z + (-x^2 + 2x)$$

$$y(x-z) = (z-x)(z+x) - 2(z-x)$$

$$0 = (z-x)(x+z-2+y)$$

$$0 = (z-x)(x+y+z-2)$$

$$\begin{cases} z=x \\ x+y+z=2 \end{cases}$$

Аналогично из

$$(2)-(3): \quad \begin{cases} y=x \\ x+y+z=2 \end{cases}$$

$$(1)-(3): \quad \begin{cases} y=z \\ x+y+z=2 \end{cases}$$

Если $x=y=z$ не выполняется, то $x+y+z=2$.

Если $x=y=z$, тогда из (1): $x^2 = -2x + x^2 \Rightarrow x=0=y=z$

~~$$N = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$$~~

Пр-ие степ., что
числа ненулевые.

Значит $x+y+z=1$.

Заметим, что если $N = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$

$$N = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z + 4 = x^2 + y^2 + z^2 - 4(x+y+z) + 12 =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - 8 + 12 = x^2 + y^2 + z^2 + 4 = A + 4$$

Пусть $x^2 + y^2 + z^2 = A$.

Сложим (1)+(2)+(3): $xy + yz + zx = -2x - 2y - 2z + x^2 + y^2 + z^2$

$$xy + yz + zx = -4 + A$$

Раскроем $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$.

$$2^2 = A + 2(A-4)$$

$$4 = 3A - 8$$

$$A = 4$$

Тогда $N = A + 4 = 8$

Ответ: 8.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \underbrace{99 \dots 9}_{30001} = 10^{30002} - 1.$$

$$\begin{aligned} n^3 &= (10^{30002} - 1)^3 = 10^{30002 \cdot 3} - 3 \cdot 10^{30002 \cdot 2} + 3 \cdot 10^{30002} - 1 = \\ &= (10^{90006} - 3 \cdot 10^{60004}) + (3 \cdot 10^{30002} - 1) \end{aligned}$$

Числа в скобках не пересекаются, т.е. в тех разрядах, где у одного стоит ненулевая цифра у второго только нулевая.

$$n^3 = 10^{60004} \underbrace{(10^{30002} - 3)}_{a_1} + \underbrace{(3 \cdot 10^{30002} - 1)}_{a_2}.$$

$$a_1 = \begin{array}{r} 1000 \dots 0 \\ - 3 \\ \hline 99 \dots 997 \end{array}$$

Посчитали столбиком $10^{30002} - 3$, в нем 30000 девяток.

$$a_2 = \begin{array}{r} 30 \dots 0 \\ - 1 \\ \hline 29 \dots 99 \end{array}$$

Посчитали столбиком $3 \cdot 10^{30002} - 1$, в нем 30000 девяток.

$$n^3 = 10^{60004} \cdot a_1 + a_2. \quad \text{Т.к. слагаемые "не пересекаются"}$$

То количество девяток ~~их~~ в их сумме это сумма количества девяток у каждого, т.е. всего их 60000

Ответ: 60000.

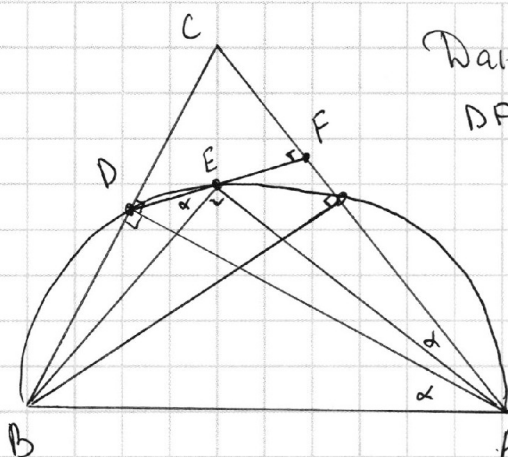


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: ω , $\triangle ABC$, $D \in AB \cap \omega$

$DF \perp AC$, $F \in AC$, $E = BE \cap \omega$.

$AB = 8$, $AC = 10$, $BE = 6$.

Найти: AF

Решение:

Т.к. $E \in \omega \Rightarrow \angle BEA = 90^\circ$, т.к. AB - диаметр.

$\angle DEB + \angle BEA + \angle AEF = 180^\circ$, то.

$\angle DEB + \angle AEF = 180^\circ - \angle BEA = 90^\circ$.

Пусть $\angle DEB = \alpha$, тогда $\angle AEF = 90^\circ - \alpha$.

Т.к. $D \in AB$ - диаметр, то $\angle DEB = \angle DAB = \alpha$.

$\angle EFA + \angle FAE + \angle AEF = 180^\circ$

$\angle FAE + \angle FEA = 180^\circ - \angle EAF - \angle FEA = 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$.
Т.е. $\angle FAE = \alpha$.

$\triangle BEA \sim \triangle ADC$ т.к. $\angle BEA = 90^\circ = \angle ADC$

$\angle BAE = \angle BAD + \angle DAE = \alpha + \angle DAE = \angle DAE + \angle EAF = \angle DAC$.

Тогда $\frac{AC}{DC} = \frac{AB}{EB} \Rightarrow DC = \frac{EB \cdot AC}{AB} = \frac{6 \cdot 10}{8} = \frac{15}{2}$.

По т. Пифагора: $AC^2 = DC^2 + AD^2 \Rightarrow AD = \sqrt{AC^2 - DC^2} = \sqrt{10^2 - \left(\frac{15}{2}\right)^2}$

$AD = \frac{5\sqrt{7}}{2}$. Аналогично: $BE^2 + AE^2 = AB^2 \Rightarrow AE = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7}$.

$\triangle BDA \sim \triangle EFA$ *, т.к. $\angle BDA = 90^\circ = \angle EFA$

$\angle BAD = \alpha = \angle EAF$

Тогда $\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow AF = \frac{AD \cdot AE}{AB} = \frac{\frac{5\sqrt{7}}{2} \cdot 2\sqrt{7}}{8} = \frac{5}{4}$.

Ответ: $\frac{5}{4}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Посчитаем вероятность в первом случае. Всего исходов C_n^5 (зритель случайно выбирает 5). Благоприятных: C_{n-3}^{5-3} (количество мн-в из пяти, в которых в ^{кор.} ~~каждом~~ ^{трех} ~~выбраных~~ ^{три} ~~шарах~~ ^{шара}).

Тогда вероятность благоприятного события: $\frac{C_{n-3}^{5-3}}{C_n^5} =$

$$= \frac{(n-3)!}{(n-5)! \cdot 5!} = \frac{(n-3)!}{n!} \cdot \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 5 \cdot 4 \cdot 3$$

Аналогично во втором случае: всего C_n^7

благоприятных C_{n-3}^{7-3}

Вероятность:

$$\frac{C_{n-3}^{7-3}}{C_n^7} = \frac{(n-3)!}{(n-7)! \cdot 4!} = \frac{n!}{(n-7)! \cdot 7!}$$
$$= \frac{(n-3)!}{n!} \cdot \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 6 \cdot 5$$

Тогда отношение вероятностей: $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{7}{2} = 3,5$

Ответ: 3,5.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - 2a)x + (a^2 - a - 7). \quad \text{Пусть корни } x_5 \text{ и } x_6$$

$$3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + (6 - a^5) = 0 \quad \text{Пусть корни } x_3 \text{ и } x_8$$

По условию БОО

$$x_5 = a_0 + 5d$$

$$x_6 = a_0 + 6d$$

$$x_3 = a_0 + 3d$$

$$x_8 = a_0 + 8d.$$

Для каких-то a_0 и d .

$$\text{По т. Виета: } \begin{cases} x_5 + x_6 = a^2 - 2a & (1) \\ x_5 \cdot x_6 = a^2 - a - 7 & (2) \\ x_3 + x_8 = (a^3 - 2a^2) \cdot \frac{1}{3} & (3) \\ x_3 \cdot x_8 = (6 - a^5) \cdot \frac{1}{3} & (4) \end{cases}$$

Подставим x_5, x_6, x_3, x_8 в (1) и (3).

$$(1): a_0 + 5d + a_0 + 6d = a^2 - 2a$$

$$(3): a_0 + 3d + a_0 + 8d = \frac{a^3 - 2a^2}{3}$$

$$\text{Возьмем: } 0 = \cancel{a^2} a^2 - 2a - \frac{a^3 - 2a^2}{3}$$

$$\text{Т.е. } a^3 - 2a^2 = 3a^2 - 6a.$$

$$a^3 - 5a^2 + 6a = 0$$

$$a(a^2 - 5a + 6) = 0 \Rightarrow a(a-2)(a-3) = 0$$

Т.е. 3 случая: I) $a=0$, II) $a=2$, III) $a=3$.

$$\text{I) случай: } \cancel{a_0} \text{ и } \cancel{d} \text{ (I): } \text{из (1): } 2a_0 + \cancel{d} = 0^2 - 2 \cdot 0 \Rightarrow a_0 = -\frac{11}{2}d.$$

Подставим в (2).

$$(a_0 + 5d)(a_0 + 6d) = 0^2 - 0 - 7$$

$$d^2 \left(-\frac{11}{2} + 5\right) \left(-\frac{11}{2} + 6\right) = -7 \Rightarrow d^2 \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = -7, \text{ т.е. } d^2 = 28.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Поставим в (4):

$$(a_0 + 3d)(a_0 + 8d) = (6 - 0^5) \cdot \frac{1}{3}.$$

$$d^2 \left(-\frac{11}{2} + 3\right) \left(-\frac{11}{2} + 8\right) = 2. \quad \Rightarrow \quad d^2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \frac{5}{2} = 2$$

$$d^2 = -\frac{8}{25}$$

т.е. $a_0 \neq 0$.

Пр-ие.

II). $a=2$.

Тогда из (1): $2a_0 + 11d = 2^2 - 2 \cdot 2 = 0$. т.е. $a_0 = -\frac{11}{2}d$.

Поставим в (2): $(a_0 + 5d)(a_0 + 6d) = 2^2 - 2 - 7$

$$d^2 \left(-\frac{11}{2} + 5\right) \left(-\frac{11}{2} + 6\right) = -5$$

$$d^2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{5} \cdot \frac{5}{5} \cdot \frac{5}{5} \cdot \left(-\frac{2}{1}\right) \cdot \frac{2}{1} \cdot (-5) = 20$$

Поставим в (4): $(a_0 + 3d)(a_0 + 8d) = (6 - 2^5) \cdot \frac{1}{3}$

$$d^2 \left(-\frac{11}{2} + 3\right) \left(-\frac{11}{2} + 8\right) = \frac{6 - 2^5}{3}$$

$$d^2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{2^5 - 6}{3}$$

$$d^2 = \frac{26.4}{25.3}$$

Заметим, что $20 \neq \frac{26.4}{25.3}$. Пр-ие.

III) $a=3$ Тогда из (1) $2a_0 + 11d = 3^2 - 2 \cdot 3 \Rightarrow a_0 = -\frac{11}{2}d + \frac{3}{2}$.

Поставим в (2): $\left(-\frac{11}{2}d + \frac{5}{2}d + \frac{3}{2}\right) \left(-\frac{11}{2}d + \frac{6}{2}d + \frac{3}{2}\right) = -1$. т.е.

$$(3 - d)(3 + d) = -4$$

$$9 - d^2 = -4$$

$$d^2 = 13$$

Поставим в (4): $\left(-\frac{11}{2}d + \frac{3}{2}\right) \left(-\frac{11}{2}d + \frac{8}{2}\right) = \frac{6 - 3^5}{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Подставим в (4): $(-\frac{11}{2}d + 3d + \frac{3}{2})(-\frac{11}{2}d + 8d + \frac{3}{2}) = \frac{6-3^5}{3}$. | . 4.

$$(-5d + 3)(5d + 3) = 4 \cdot (2 - 3^4).$$

$$\begin{array}{r} 4 \cdot 79 \\ \times 4 \\ \hline 316 \end{array}$$

$$316 + 9 = 325$$

$$13 \cdot 25 = 325$$

$$9 - 25d^2 = 4(-79)$$

$$9 + 4 \cdot 79 = 25 \cdot d^2$$

$$d^2 = 13.$$

Заметим, что
если $d^2 = 13$

$$2a_0 + 11d = 0.$$

$$x_3 = a_0 + 3d$$

$$x_8 = a_0 + 8d$$

$$x_5 = a_0 + 5d, x_6 = a_0 + 6d$$

Равенства
~~11, 21, 61, 41~~
(11, 21, 61, 41)
выполняются!

Заметим, что при $a=3$, $d=\sqrt{13}$, $a_0 = -\frac{11}{2}\sqrt{13} + \frac{3}{2}$

x_3, x_8, x_5 и x_6 являются корнями соответствующих уравнений (проверено), а при других значениях x с помощью обратного к Т Вьетэ. параметра.

~~Это~~ это невозможно, т.е.

$$a=3.$$

Ответ: 3.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что условие одинаково для y и $-y$.
Так что можно считать: $y \geq 0$.

Найдем максимум и минимум $x^2 + y^2$.

Пусть $A = x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}$, $B = x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}$

$A \geq B$. Если A, B одного знака, то

увеличение y не будет менять $|A| + |B|$, если они одного разн. знаков, то будем уменьшать y пока можем. ($|A| + |B|$ увелич.)

Чем ответ закончиться: $|A| + |B| = 4$ (при этом $A \geq 0$ и $B \leq 0$ и оба будут нул.).

~~либо~~ ~~тогда~~: $|A| + |B| = x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} - x + 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} = 4$.

$\frac{2y}{2\sqrt{3}} = 4$

$\Rightarrow y = 4\sqrt{3}$

это бы теперь максимизировать $x^2 + y^2$ достаточно максимизировать x^2 .

т.к. $A \geq 0$, $B \leq 0$, то

$x - 10 + \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \geq 0$

$x - 10 + \frac{-4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \leq 0$

$\Rightarrow -2 \leq x - 10 \leq 2$

$8 \leq x \leq 12$

x^2 max, если $x = 12$

$x^2 + y^2$ max это $12^2 + 16 \cdot 3 = 192$

А еще мы доказали, что ~~при фиксированном x и положительном y~~ ~~при фиксированном x и положительном y~~ $y^2 + x^2$ ~~уже~~ ~~максимально~~ при $y = 4\sqrt{3}$.

и минимум $x^2 + y^2$ аналогично. ~~будем~~ уменьшать y

$|A| + |B|$ будет либо не меняться либо уменьшаться.

тогда процесс закончится, когда $y = 0$.

т.к. $|x - 10| \cdot 2 \leq 4$

то. $-2 \leq x - 10 \leq 2$

$8 \leq x \leq 12$

т.е. $x^2 + y^2$ min это $8^2 + 0^2 = 8^2$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Таким образом. Φ и лежит внутри
такой области:

Заметим, что $x \geq 0$, т.к.

$$\text{Иначе } |x - 10 - \frac{y}{\sqrt{3}}| \leq -10$$

$$\text{т.е. } |x - 10 - \frac{y}{\sqrt{3}}| \geq 10 \quad \text{Пр.ие с усл. } |A| + |B| \leq 4.$$

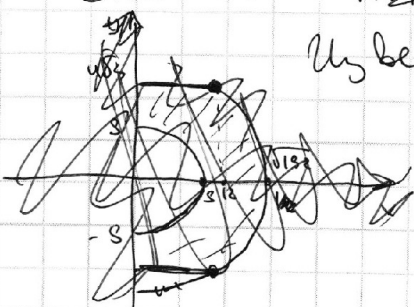
т.е. ~~функция~~ (x, y) Φ только в правой
полуплоскости.

Так же при фикс. x мы получим

$$8 \leq x \leq 12.$$

Радиус вектора

Значит



Известно, что Φ лежит в

если по Φ придем
к $(12, 4\sqrt{3})$ или $(12, -4\sqrt{3})$ тогда.

Максимальный радиус с вектору (x, y) это

$$\sqrt{192}$$

минимальный это 8.

Известно, что.

$$|x - 10| \leq 4.$$

$$-4 \leq x - 10 \leq 4$$

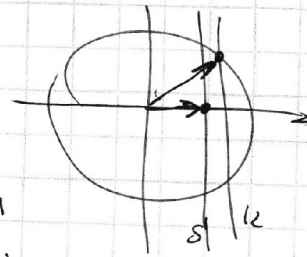
$$6 \leq x \leq 14.$$

Мы вывели, что

$$8 \leq x \leq 12$$

и это

разность площадей секторов
образуется.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

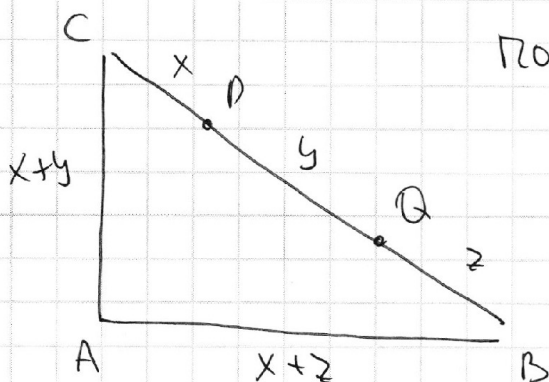
6
☐

7
☒

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



По т. Пифагора.

$$(x+y)^2 + (y+z)^2 = (x+y+z)^2$$

$$\text{т.е. } y^2 = 2 \cdot x \cdot z !$$

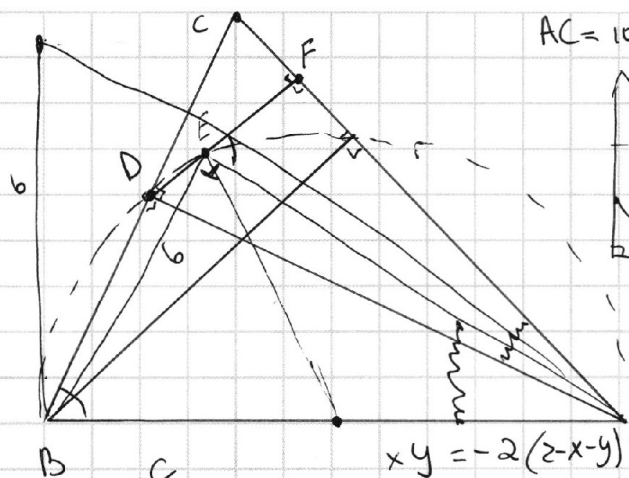


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновой и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AC=10 \quad BA=8 \quad BE=6 \quad AF=?$$

$$(x+y+z)^2 = 21$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 4$$

$$(x+y)^2 + (x+z)^2 + (y+z)^2 =$$

$$10^2 - 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 +$$

$$+ 2xy + 2xz + 2yz = ?$$

$$4 + x^2 + y^2 + z^2 =$$

$$N = x^2 + y^2 + z^2 = 5$$

$$z = 2 - x - y$$

$$xy = -2(z-x-y)^2$$

$$xy = 2x + 2y - 4 + x^2 + y^2 + 4$$

$$\frac{AC}{DC} = \frac{AB + 2xy - 2x - 2y}{BE}$$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{BE}$$

$$\frac{10}{DC}$$

$$DC = \frac{AC \cdot BE}{AB} = \frac{10 \cdot 6}{8} =$$

$$\frac{BE}{AB} = \frac{DC}{AC}$$

$$= \frac{60}{8} = \frac{15}{2}$$

$$10^2 - \left(\frac{15}{2}\right)^2 = AD^2$$

$$100 - 7,5$$

$$10^2 - 7,5^2 = n^2 \quad | \cdot 4$$

$$20^2 - 15^2 = (2n)^2$$

$$5 \cdot 35$$

$$7 \cdot 5 \cdot 5 = 4n^2$$

$$\sqrt{7 \cdot \frac{5}{2}} = n$$

$$\begin{array}{r} \times 7,5 \\ 7,5 \\ \hline + 37,5 \\ \hline 52,5 \\ \hline 56,25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ - 56,25 \\ \hline 43,75 \end{array}$$

$$z = x + y - 2$$

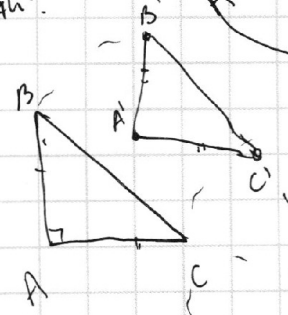
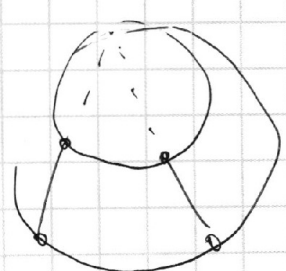
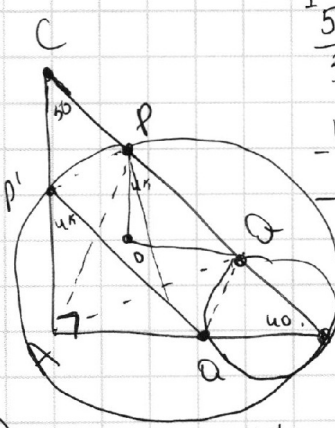
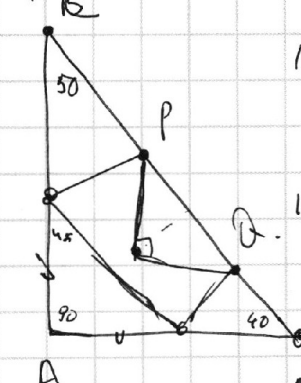
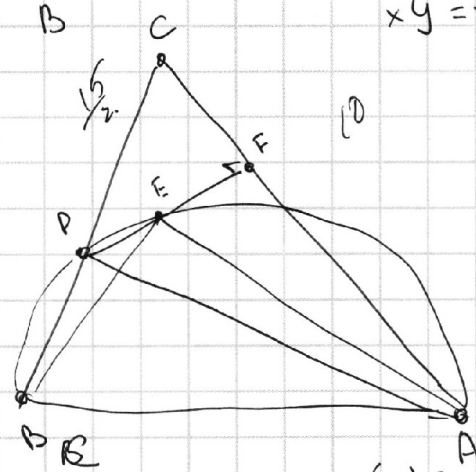
$$xy = 2x + 2y - 4 + x^2 + y^2 + 4$$

$$+ 2xy - 2x^2 - 2y^2$$

$$xy = -2x - 2y$$

$$x^2 + y^2 + xy + xz + yz$$

$$x^2 + y^2 + xy - 2x - 2y = 0$$



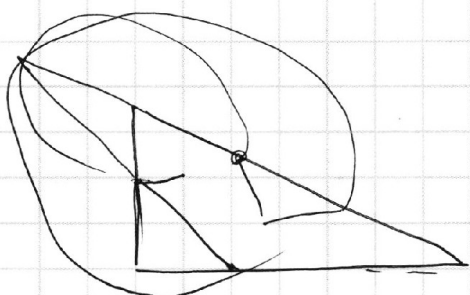
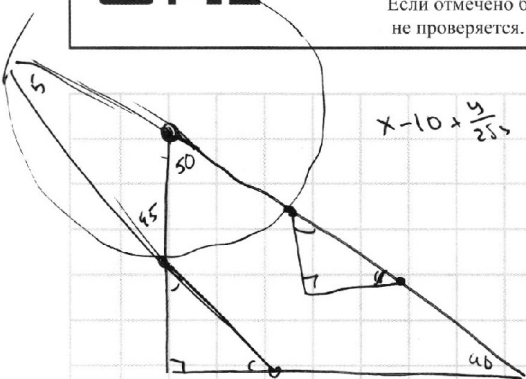


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x+y+z=2r$$

$$(x+y)(x+z) = x^2 + xy + xz + yz$$

$$x \leq 7, \quad x-10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \geq 0, \quad y+yz+xz = -2x-2y-2z + x^2+y^2+z^2$$

$$x-10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \leq 0$$

$$2(x-10) \geq -4$$

$$2x \geq -16, \quad x \geq -8$$

$$x-10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \geq 0, \quad x-10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \leq 0, \quad \frac{y}{2\sqrt{3}} \leq 10-x \leq 10$$

$$2 \frac{y}{2\sqrt{3}} \leq 4, \quad x \leq 4\sqrt{3}, \quad 4.3 = 3A, \quad 4 = A, \quad 2(x-10) \leq 4, \quad 2x \leq 14, \quad x \leq 7$$

$$y \leq 4\sqrt{3}, \quad 2AD = \sqrt{20^2 - 15^2} = \sqrt{5 \cdot 35} = 5\sqrt{7}, \quad 7 \cdot 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{2 \cdot 10^2 - 15^2}{2^2} = \frac{20^2 - 15^2}{2^2} = \frac{5 \cdot 35}{2^2} = \frac{5^2 \cdot 7}{2^2}, \quad 2 \cdot 14 = 28, \quad -(x-10 + x-10) \leq 4$$

$$3 \cdot 75 = 225, \quad 5 + 75 \cdot 4 = 25 \cdot 13, \quad 2x-20 \geq -4, \quad 2x \geq 16, \quad x \geq 8$$

$$x-10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} + |x-10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}| \leq 4, \quad x^2 + y^2 = R^2, \quad x \geq 8, \quad 10-x \geq 0$$

$$x-10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \geq 0, \quad x^2 + y^2 \max, \quad \frac{y}{2\sqrt{3}} \leq 10-x, \quad x, y \geq 0$$

$$2 \frac{y}{2\sqrt{3}} \leq 4, \quad y \leq 4\sqrt{3}, \quad x-10 = \frac{y}{2\sqrt{3}}, \quad 2\sqrt{3}x - 20\sqrt{3} = y, \quad y \geq 0$$

$$x-10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \geq 0, \quad x-10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \leq 0, \quad 2\sqrt{3}x - 20\sqrt{3} = y, \quad y \geq 0$$

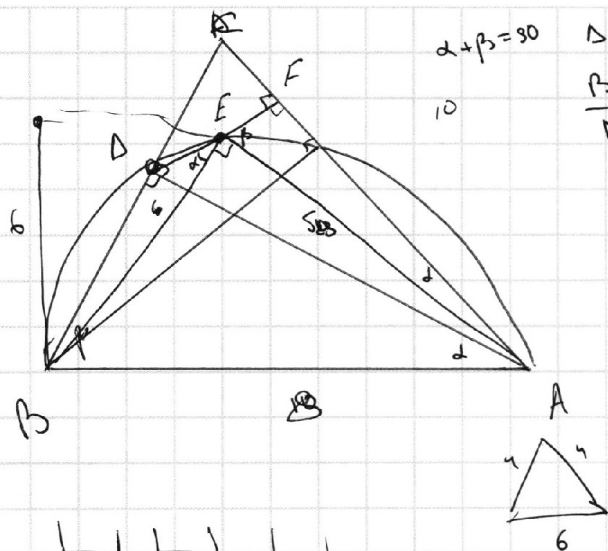


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

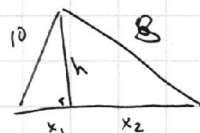
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\alpha + \beta = 90^\circ \quad \triangle BDA \sim \triangle EFA$$

$$\frac{BA}{DA} = \frac{EA}{FA}$$



$$\begin{aligned} 10^2 &= h^2 + x_1^2 \\ 8^2 &= h^2 + x_2^2 \\ 6^2 &= x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

$$4^2 + 4^2 - 2 \cos \alpha^2 = 6^2$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot 4^2 (1 - \cos) &= 6^2 \\ 1 - \cos &= \frac{3^2 \cdot 2^2}{2 \cdot 2^4} = \frac{3^2}{8} \end{aligned}$$

всего вариантов в бреть 5
хороших в боров C_{n-3}^2

$$C_n^5 \quad \text{или} \quad \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{\frac{(n-3)(n-4)}{2 \cdot 1}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}$$

Теперь C_n^7

$$\frac{\frac{n-3!}{(n-7)! \cdot 4!}}{\frac{n!}{(n-7)! \cdot 7!}} = C_{n-3}^4$$

$$\frac{7!}{4! \cdot n(n-1)(n-2)} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{n(n-1)(n-2)}$$

$$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{n(n-1)(n-2)}$$

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 3,5$$

$$x^2 - (a^2 - 2a)x + (a^2 - a^2 - 7) = 0. \quad (x - x_1)(x - x_2)$$

$$n, n+d, n+2d, n+3d, n+4d, n+5d, n+6d, n+7d, n+8d$$

$$\begin{aligned} 1) x_1 &= n+6d \\ 2) x_2 &= n+5d \\ 3) y_1 &= n+3d \\ y_2 &= n+8d \end{aligned}$$

$$3x^2(a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0.$$

$$3(x - y_1)(x - y_2) = 0.$$

$$\begin{aligned} 1) x_1 + x_2 &= a^2 - 2a \\ 2) x_1 x_2 &= a^2 - a - 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) y_1 + y_2 &= \frac{a^3 - 2a^2}{3} \\ 4) y_1 y_2 &= \frac{6 - a^5}{3} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}xy &= -2z + z^2 \\ yz &= -2x + x^2 \\ zx &= -2y + y^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n &= 10^{30002} - 1 \\ n^3 &= 10^{90006}\end{aligned}$$

$$x = 30001$$

$$\begin{aligned}n^{20} &= 10^{x+1} - 1 \\ n^2 &= 10^{3x+3} - 3 \cdot 10^{2x+2} + 3 \cdot 10^x - 1\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}10 \dots \dots 0 \\ - 3x+3 \dots \dots 0 \\ \hline 30 \dots \dots 0 \\ - 2x+2 \dots \dots 0 \\ \hline 30 \dots \dots 0 \\ - x+1 \dots \dots 1 \\ \hline 9 \dots 97000029 \dots 99 \\ \hline 9x+3 \dots x+4 \quad x+1 \dots \dots 1\end{array}$$

$$\begin{aligned}& \text{Анализ} \quad x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z + 4 \\& (x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 - 2z) + (-2x - 2y - 2z) + 4 \cdot 3 \\& x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 4 \cdot 3 \\& (x-2)(y-2)(z-2) = xyz + xy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= a^3 - 3ab^2 + 3ab^2 - 3b^3 \\ (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) &= \\ &= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 =\end{aligned}$$

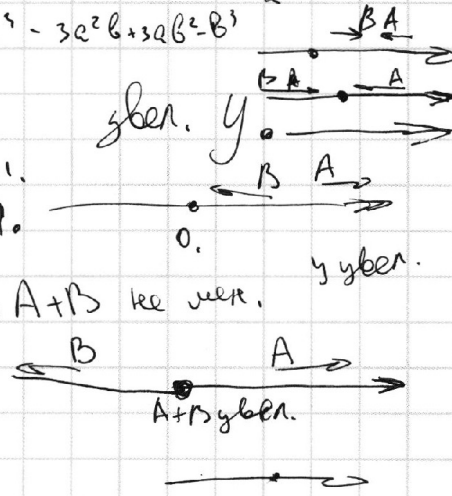
$$\begin{aligned}x^2 + y^2 \max &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ x^2 + y^2 \min &?\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& \geq 0 \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & a \dots b \\ \leq 0 & a & b & a-b+1 \end{matrix} \\& \left| x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \right| + \left| x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \right| = 4\end{aligned}$$

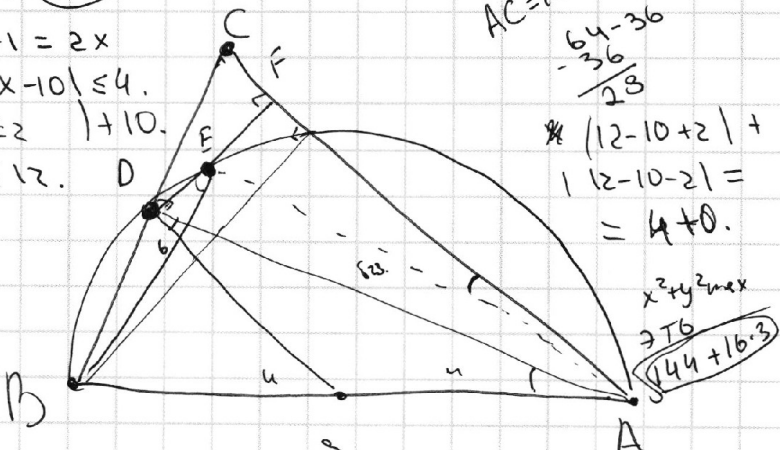
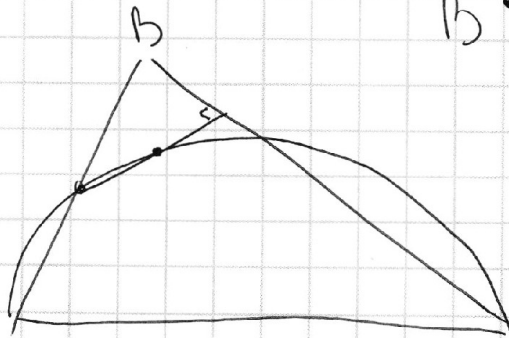
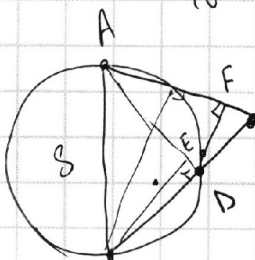
$$x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} - x + 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} = 4, A+B \text{ не макс.}$$

$$\begin{aligned}\frac{y}{\sqrt{3}} &= 4 \\ y &= 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& \text{или} \\& \frac{y}{2\sqrt{3}} = 2 \quad 3x+1\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}x+1-1+1 &= x+1 \\ 3x+3-x-4+1 &= 2x \\ 10 \quad |x-10| + |x-10| &\leq 4 \\ -2 \leq x-10 &\leq 2 \quad | + 10 \\ 8 \leq x &\leq 12 \\ 64.\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} &\leq 0 \\ x - 10 - 2 &\leq 0 \\ x - 10 + 2 &\geq 0 \\ -8 \leq x &\leq 12 + \frac{144}{48} \\ &= 192\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}AC &= 10 \\ \frac{64-36}{28} &= \frac{28}{28} = 1 \\ |12-10+2| + |12-10-2| &= 4+0 = 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 \max &= 144 + 16 \cdot 3 \\ &= 192\end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$n = -\frac{11}{2}d.$$

$$\left(-\frac{11}{2}d + 6d\right)\left(-\frac{11}{2}d + 5d\right) = 4 - 2 - 7 = -5.$$

$$d^2 \left(\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) = -5 \quad (x, y) = (12,$$

$$45 \cdot 8 \quad 16 \cdot 3 \quad 16 \cdot 64 \quad d^2 = 20$$

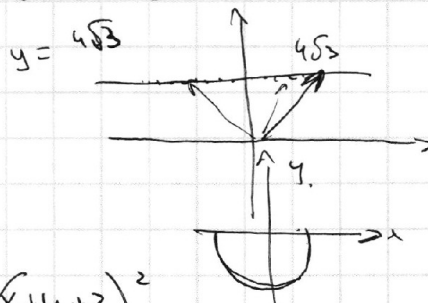
$$\left(-\frac{11}{2}d + 3d\right)\left(-\frac{11}{2}d + 8d\right) = \frac{6-2^5}{3}.$$

$$d^2 \left(\frac{-5}{2}\right) \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{6-2^5}{3}.$$

$$d^2 = \frac{(8-2^5) \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 5 \cdot 5}$$

$$= 20. \quad x^2 + y^2 + z^2$$

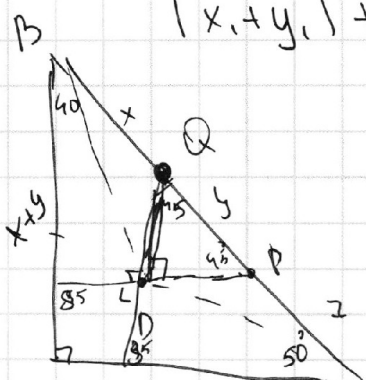
$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$$



$$\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4.$$

$$\left|x_1 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x_2 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4.$$

$$|x_1 + y_1| + |x_2 - y_1| \leq 4.$$

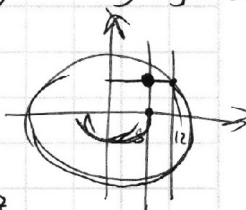


$$(x+y)^2 + (y+z)^2 = (x+y+z)^2$$

$$x^2 + y^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$$

$$y^2 = 2xz$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z + 4 =$$



$$xy + yz + xz = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z$$

$$xy + 1 = (z+1)^2.$$

$$xy + yz + xz - 2x - 2y - 2z + 4 = 3.$$

$$yz + 1 = (x+1)^2.$$

$$(x+1)(y+1)(z+1) =$$

$$xz + 1 = (y+1)^2.$$

$$= xyz + xy + yz + xz + 8 + x + y + z + 1$$

$$xy + yz + xz =$$

$$yz - xy = x^2 - 2x - z^2 + 2z$$

$$y(z-x) = (x-z)(x+z) - 2(x-z)$$

$$-y = x+z-2.$$

$$x+z = 2-y.$$

$$-x-z = y-2.$$

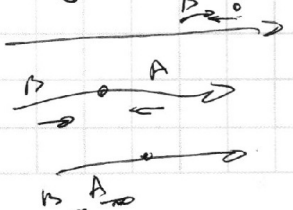
$$x+y = 2-z$$

$$y+z = 2-x$$

$$(x+y+z)2 = 2 \cdot 3 - (x+y+z)$$

$$(x+y+z)3 = 2 \cdot 3$$

$$x+y+z = 2.$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) n+6d + n+5d = a^2 - 2a$$

$$2n+11d = a^2 - 2a$$

$$3) n+3d + n+8d = \frac{a^2 - 2a^2}{3}$$

$$2n+11d = \frac{a^2 - 2a^2}{3}$$

$$\pm) 2n+11d = 0.$$

$$(n+6d)(n+5d) = 4-7.$$

$$(n+3d)(n+8d) = 2.$$

$$n = -\frac{11}{2}d.$$

$$d^2 \left(-\frac{11}{2} + 3\right) \left(-\frac{11}{2} + 8\right) = 2.$$

$$d^2 \left(\frac{-11+6}{2}\right) \left(\frac{-11+16}{2}\right) = 2.$$

$$d^2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} = 2.$$

$$\text{II}) 2n+11d = 3^2 - 2 \cdot 3 = 3.$$

$$n = -\frac{11}{2}d + \frac{3}{2}.$$

$$(n+6d)(n+5d) = 9-3-7 = -1$$

$$\left(-\frac{11}{2}d + \frac{3}{2} + 6d\right) \left(-\frac{11}{2}d + 5d + \frac{3}{2}\right) = -1. = 2-81 = -79.$$

$$\left(\frac{1}{2}d + \frac{3}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}d + \frac{3}{2}\right) = -1.$$

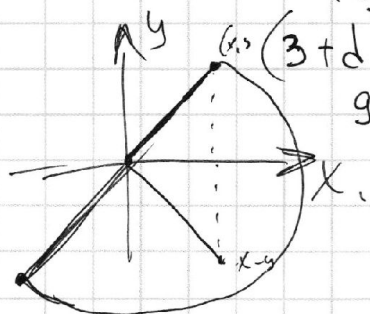
$$4\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}d\right)^2$$

$$(3+d)(3-d) = -4.$$

$$9-d^2 = -4$$

$$13 = d^2$$

$$d = \sqrt{13}.$$



$$3(a^2 - 2a) = a^3 - 2a^2$$

$$3a^2 - 6a = a^3 - 2a^2$$

$$a^3 - 5a^2 + 6a = 0$$

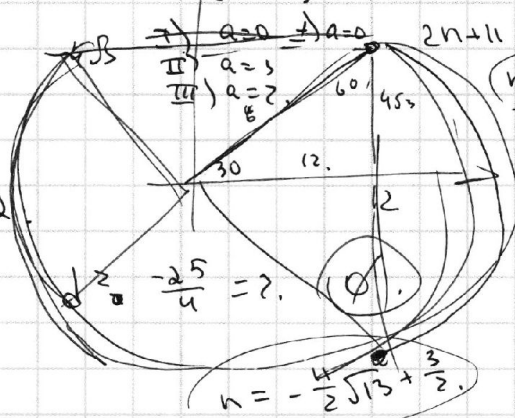
$$a(a^2 - 5a + 6) = 0.$$

$$a(a-1)(a-6) = 0.$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$a = \frac{5 \pm 1}{2} = 3, 2$$

$$a(a-3)(a-2) = 0. a=2.$$



$$(n+5d)(n+8d) = \frac{6-3^5}{3} = 2-3^4$$

$$\left(-\frac{11}{2}d + \frac{3}{2} + 5d\right) \left(-\frac{11}{2}d + 8d + \frac{3}{2}\right) =$$

$$= 2-81 = -79.$$

$$1 \cdot 4 \left(-\frac{5}{2}d + \frac{3}{2}\right) \left(\frac{5}{2}d + \frac{3}{2}\right) = -79 \cdot 4.$$

$$(3-5d)(3+5d) = -79 \cdot 4.$$

$$9-25d = -79 \cdot 4.$$

$$9+79 \cdot 4 = 25\sqrt{13}.$$

✗.