



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



- 4 1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

- † 2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?

- † 3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.

- † 4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?

- † 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.

- † 6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.

7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x \neq 0; y \neq 0; z \neq 0$ (по условию)

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 & (1) \\ yz = -6x + x^2 & (2) \\ zx = -6y + y^2 & (3) \end{cases}$$

Решение:

① (1)-(2): $xy - yz = 6x - 6z + z^2 - x^2$

$y(x-z) = 6(x-z) + (z-x)(z+x)$

$(z-x)(x+z) - 6(z-x) + y(z-x) = 0$

$(z-x)(x+y+z-6) = 0 \Rightarrow (a) \begin{cases} z = x \\ x+y+z = 6 \end{cases}$

Аналогично при (1)-(3) и (2)-(3) получим:

(б) $\begin{cases} y = z \\ x+y+z = 6 \end{cases}$ и (в) $\begin{cases} x = y \\ x+y+z = 6 \end{cases}$

② 4 случая, когда в (а), (б) и (в) верны 1 утверждение:

$x = z; y = z; x = y \Rightarrow x = y = z$

$\Rightarrow x^2 = -6x + x^2 \Rightarrow -6x = 0 \Rightarrow x = 0$, что противоречит условию $\Rightarrow$ не может быть.

③ Заметим, что если верны первые утверждения в двух совокупностях из (а), (б) и (в), то аналогично $x = y = z \Rightarrow$ аналогично п.② не может быть.

④ Если будет верна 1 верхняя и 2 нижние, то значения будут получаться одинаковыми, но для разных переменных. Тогда без ограничения общности рассмотрим $\begin{cases} x = y \\ x+y+z = 6 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Подставим в первоначальную систему:

$$\begin{cases} x^2 = -6z + z^2 \\ xz = -6x + x^2 \\ xz = -6x + x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0, \text{ чего не может быть} \\ z = -6 + x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} z &= x - 6 \\ x^2 &= -6(x-6) + (x-6)^2 \\ x^2 &= 36 - 6x + x^2 - 12x + 36 \\ 18x &= 36 \cdot 2; \quad x = \frac{36 \cdot 2}{18} = 4 \Rightarrow \begin{cases} y = x = 4 \\ z = -6 + x = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

В других случаях получим аналогично

$$(4; -2; 4) \text{ и } (-2; 4; 4), \text{ тогда: } (x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = (4-6)^2 + (4-6)^2 + (-2-6)^2 = 4 + 4 + 64 = \underline{72}$$

⑤ Рассмотрим случай, когда верно только $x+y+z=6$.

$$(1) + (2) + (3): xy + yz + zx = x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 6z$$

$$3(xy + xz + yz) = (x+y+z)^2 - 6(x+y+z)$$

$$\Rightarrow \cancel{x+y+z} \quad xy + xz + yz = \frac{6^2 - 6 \cdot 6}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{x+y+z} \quad (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 6^2 = 36$$

$$\text{Тогда: } (x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 12(x+y+z) + 36 \cdot 3 = 36 - 12 \cdot 6 + 36 \cdot 3 = \underline{72}$$

Рассмотрев все случаи, получим только 72.

Ответ: 72.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$$n = \overbrace{999\dots 9}^{20001 \text{ раз}}$$

$$\Rightarrow n^3 = \overbrace{99\dots 9}^{20001 \text{ раз}}^3 = \left(\overbrace{100\dots 00}^{20001 \text{ раз}} - 1 \right)^3 = \overbrace{\left(10\dots 0 \right)^3}^{(1)} - 3 \cdot \overbrace{\left(10\dots 0 \right)^2}^{(2)} + 3 \cdot \overbrace{10\dots 0}^{(2)} - 1 = (1) + (2) = \overbrace{9\dots 9}^{20000 \text{ раз}} \overbrace{70\dots 0}^{20001 \text{ раз}} \overbrace{9\dots 9}^{20001 \text{ раз}}$$

$$(1): \begin{array}{r} \overbrace{100\dots 00}^{20001 \text{ раз}} \\ - \overbrace{100\dots 00}^{20001 \text{ раз}} \\ \hline \overbrace{99\dots 99}^{20000 \text{ раз}} \overbrace{70\dots 0}^{40002 \text{ раз}} \end{array}$$

$$(2): \begin{array}{r} \overbrace{100\dots 00}^{20001 \text{ раз}} \\ - \overbrace{100\dots 00}^{20001 \text{ раз}} \\ \hline \overbrace{99\dots 99}^{20000 \text{ раз}} \end{array}$$

$$(1) + (2): \begin{array}{r} \overbrace{99\dots 99}^{20000 \text{ раз}} \overbrace{70\dots 0}^{20001 \text{ раз}} \overbrace{9\dots 9}^{20001 \text{ раз}} \\ + \overbrace{99\dots 99}^{20000 \text{ раз}} \overbrace{70\dots 0}^{20001 \text{ раз}} \overbrace{9\dots 9}^{20001 \text{ раз}} \\ \hline \overbrace{99\dots 99}^{20000 \text{ раз}} \overbrace{70\dots 0}^{20001 \text{ раз}} \overbrace{9\dots 9}^{20001 \text{ раз}} \end{array}$$

Значит ответ: $20000 + 20001 = 40001$ (шт.)

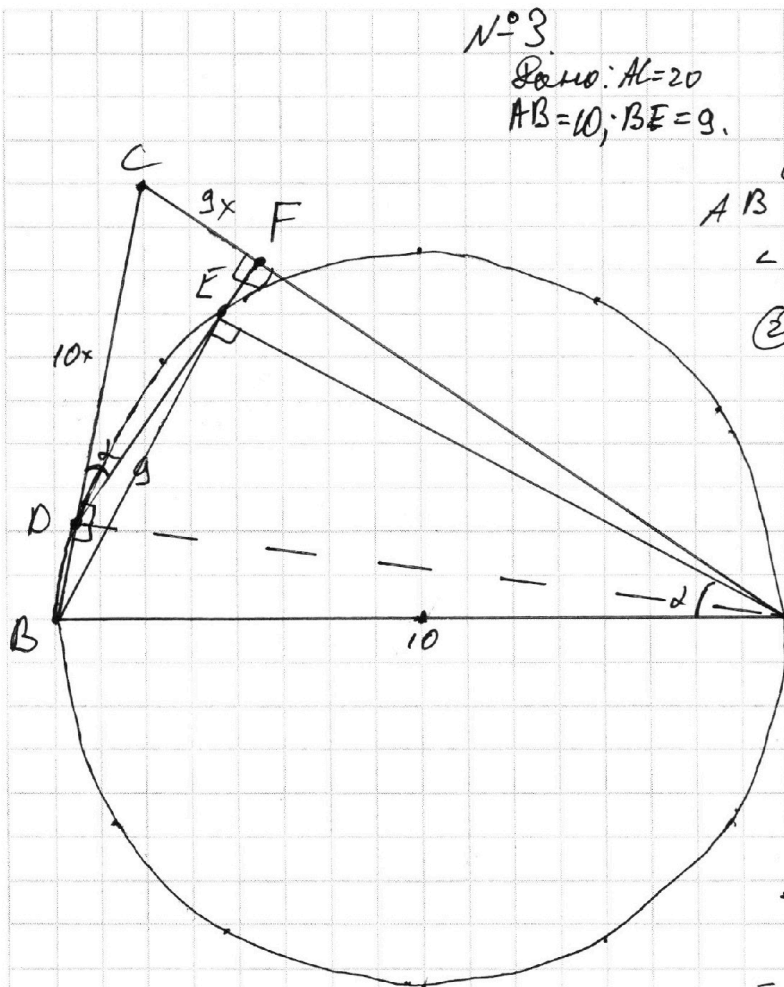
Ответ: 40001.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



N°3.

Дано: $AC=20$ $AB=10; BE=9.$

Решение:

① $\angle BDA$ и $\angle BEA$ — впис.,
опираются на диаметр
 $AB \Rightarrow \angle BDA = \angle BEA = 90^\circ$
 $\angle CDA = 180^\circ - \angle BDA = 90^\circ$ (линейн.)

② Пусть $\angle BAE = \alpha$, тогда

$BDEA$ — впис. ч.ч.ч.

$\Rightarrow \angle BDE + \angle BAE = 180^\circ$

(по впис. ч.ч.ч.)

$\Rightarrow \angle BDE = 180^\circ - \alpha;$

$\angle CDE = 180^\circ - \angle BDE = \alpha$
(линейн.)

③ $\triangle CDF$ и $\triangle BEA$:

$\angle CDF = \angle BAE = \alpha$

$\angle CFP = \angle BEA = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle CDF \sim \triangle BEA$ по 2-м.

$\Rightarrow \frac{BE}{CF} = \frac{BA}{CD} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{CD}{CF} = \frac{BA}{BE} = \frac{10}{9};$

пусть $CF = 9x$, тогда $CD = 10x$.

④ $\triangle CDF$ и $\triangle CDA$: $\angle CDF = \angle CDA = 90^\circ$
 $\angle DCF$ — общий $\Rightarrow \triangle CDF \sim \triangle CDA$
по 2-м.

$\Rightarrow \frac{CF}{CD} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow AC = \frac{CD^2}{CF} = \frac{(10x)^2}{9x} = \frac{100x}{9}$

⑤ $AC = \frac{100x}{9}$ (из п. 4)
 $AC = 20$ (по усл.) $\Rightarrow \frac{100x}{9} = \frac{20}{1} \Rightarrow x = \frac{20 \cdot 9}{100} = \frac{9}{5}.$

⑥ $AF = AC - CF = \frac{100x}{9} - 9x = \frac{100x - 81x}{9} = \frac{19x}{9} = \frac{19 \cdot 9}{9 \cdot 5} = 3,8.$

Ответ: $AF = 3,8.$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N°4.

Без ограничения общности пусть коробок было

n , при этом $n \geq 9$, так как максимально брали

3 порошка. Тогда всего вариантов положить 3

шара в n порошков: C_n^3 - кол-во сочетаний 3 из n .

1) Когда он брал 5 порошков, то благоприятных вариантов, когда 3 шара были в 5 порошках: C_5^3
Значит вероятность была: $P_0 = \frac{C_5^3}{C_n^3}$

2) Когда он взял 9 порошков, то благоприятных вариантов, когда 3 шара были в этих 9 коробках стало C_9^3 , значит вероятность:
 $P_1 = \frac{C_9^3}{C_n^3}$

3) Найдём во сколько раз вероятность увели-

чилась: $P_1 : P_0 = \frac{C_9^3}{C_n^3} : \frac{C_5^3}{C_n^3} = \frac{C_9^3 \cdot C_n^3}{C_5^3 \cdot C_n^3} =$

$$= \frac{9!}{3!6!} : \frac{5!}{3!2!} = \frac{9! \cdot 3! \cdot 2!}{3! \cdot 6! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5^3}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{21 \cdot 4}{10} = \frac{84}{10} = 8,4.$$

Ответ: 8,4.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N°5.

$$(1) x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$$

x_1, x_2 - корни, где

$$x_1 = a_6; \quad x_2 = a_4,$$

$$(2) 5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$$

$$x^2 - \frac{a^3 - 4a^2}{5}x - \frac{2a^3 + 6a + 15}{5} = 0 \quad / : 5$$

x_3, x_4 - корни, где

$$x_3 = a_5; \quad x_4 = a_8$$

где $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ - арифметическая прогрессия. Тогда:

$$(a) \begin{cases} x_1 = a_6 = a_5 + d, \text{ где } d - \text{разность прогрессии.} \\ x_2 = a_4 = a_5 - 2d. \\ x_3 = a_5 \\ x_4 = a_8 = a_5 + 3d. \end{cases}$$

По Т. Виета для (1) и (2) имеем:

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 = a^2 - 4a \quad (3) \\ x_1 \cdot x_2 = a^2 - 6a + 4 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_3 + x_4 = \frac{a^3 - 4a^2}{5} \quad (4) \\ x_3 \cdot x_4 = -\frac{2a^3 + 6a + 15}{5} \end{cases}$$

Подставим в (3) и (4) (a), получим:

$$\begin{cases} a_5 + d + a_5 + 2d = a^2 - 4a \\ a_5 + a_5 + 3d = \frac{a^3 - 4a^2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_5 + 3d = a^2 - 4a \\ 2a_5 + 3d = \frac{a^3 - 4a^2}{5} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a = \frac{a^3 - 4a^2}{5} / : 5; \quad 5a^2 - 20a - a^3 + 4a^2 = 0.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5a(a-4) - a^2(a-4) = 0$$

$$(5a - a^2)(a-4) = 0; \quad a(5-a)(a-4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a-4=0 \\ 5-a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=4 \\ a=5 \end{cases}$$

Подставим данные значения в первоначаль-
ные уравнения (1) и (2):

$$I) a=0: (1): x^2 - (0-0)x + 0 - 0 + 4 = 0.$$

$x^2 + 4 = 0$; $x^2 = -4$, ~~что не~~
~~нет~~ корней, значит $a=0$ не подходит, т.к.
 по условию 2 корня.

$$II) a=4: (1) \quad x^2 - (16-16)x + 16 - 6 \cdot 4 + 4 = 0.$$

$$x^2 + 20 - 24 = 0; \quad x^2 - 4 = 0; \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases} \text{ (пог. Виета)}$$

$$(2): 5x^2 - (4^3 - 4 \cdot 4^2)x - 2 \cdot 4^3 - 6 \cdot 4 - 15 = 0.$$

$$5x^2 - 128 - 24 - 15 = 0; \quad x^2 = \frac{164}{5}; \quad \begin{cases} x_3 = \sqrt{\frac{164}{5}} \\ x_4 = -\sqrt{\frac{164}{5}} \end{cases}$$

По условию корни первого - это a_6 и a_4 , тогда:

$$\begin{cases} a_6 = 2 \\ a_4 = -2 = a_6 + d \end{cases}$$

$$-d = 4; \quad d = -4.$$

$$\Rightarrow a_5 = a_6 - d = 6, \text{ но}$$

$$\begin{cases} x_3 \neq 6 \\ x_4 \neq 6 \end{cases} \Rightarrow \text{не может быть}$$

$$\begin{cases} a_6 = -2 \\ a_6 + d = a_4 = 2 \end{cases}$$

$$-d = -4; \quad d = 4$$

$$\Rightarrow a_5 = a_6 - d = -2 - 4 = -6, \text{ но}$$

$$\begin{cases} x_3 \neq -6 \\ x_4 \neq -6 \end{cases} \Rightarrow \text{не может быть}$$

$$\Rightarrow a \neq 4.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

III) $a=5$; (1): $x^2 - (5^2 - 4 \cdot 5)x + 5^2 - 6 \cdot 5 + 4 = 0$.

$$x^2 - 5x + 25 - 30 + 4 = 0.$$

$$x^2 - 5x - 1 = 0.$$

$$D = 25 - 4 \cdot (-1) = 29; \begin{cases} x_1 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} \\ x_2 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} \end{cases}$$

(2): $5x^2 - (5^3 - 4 \cdot 5^2)x - 2 \cdot 5^3 - 6 \cdot 5 - 15 = 0$. $/:5$

$$x^2 - (5^2 - 4 \cdot 5)x - 2 \cdot 5^2 - 6 - 3 = 0.$$

$$x^2 - 5x - 50 - 9 = 0; x^2 - 5x - 59 = 0.$$

$$D = 25 - 4 \cdot (-59) = 261 = (3\sqrt{29})^2$$

$$x_3 = \frac{5 + 3\sqrt{29}}{2}$$

$$x_4 = \frac{5 - 3\sqrt{29}}{2}$$

По укл. найдем x_1 и x_2 - это a_6 и a_4 :

$$a_6 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$$

$$a_4 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}$$

$$a_6 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}$$

$$a_4 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$$

$$-d = \frac{5 + \sqrt{29} - 5 + \sqrt{29}}{2} = \sqrt{29}$$

$$d = -\sqrt{29}$$

$$-d = \frac{5 - \sqrt{29} - 5 - \sqrt{29}}{2} = -\sqrt{29} \Rightarrow d = \sqrt{29}$$

$$\Rightarrow a_5 = a_6 - d = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} - \sqrt{29} = \frac{5 - 3\sqrt{29}}{2} = x_4$$

$$\Rightarrow a_5 = a_6 + d = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} + \sqrt{29} = \frac{5 + 3\sqrt{29}}{2} = x_3$$

$$a_8 = a_4 + d = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} + \sqrt{29} = \frac{5 + 3\sqrt{29}}{2} = x_3$$

$\Rightarrow a = 5$ - подходит.

$$x_3 = \frac{5 + 3\sqrt{29}}{2} = a_5$$

$$a_8 = a_4 + d = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} - \sqrt{29} = \frac{5 - 3\sqrt{29}}{2}$$

$$x_4 = \frac{5 - 3\sqrt{29}}{2} = a_8$$

Таким образом, подходит только $a = 5$.

Ответ: 5.

$\Rightarrow a = 5$ - подходит.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

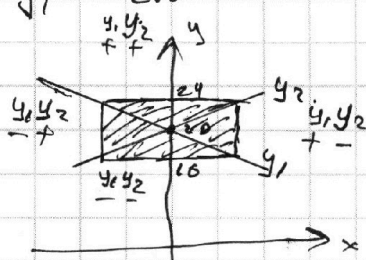
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N°6.

$$\left| y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \right| + \left| y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \right| \leq 8.$$

$$y_1 = -\frac{x}{2\sqrt{3}} + 20$$

$$y_2 = \frac{x}{2\sqrt{3}} + 20.$$



① Построим график:

$$1) \begin{cases} y_1 \geq 0; \\ y_2 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} + y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8 \\ y - 20 \leq 4 \\ y \leq 24. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y_1 < 0; \\ y_2 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -y + 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} - y + 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8 \\ -y + 20 \leq 4 \\ 16 \leq y \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} y_1 \geq 0; \\ y_2 < 0; \end{cases}$$

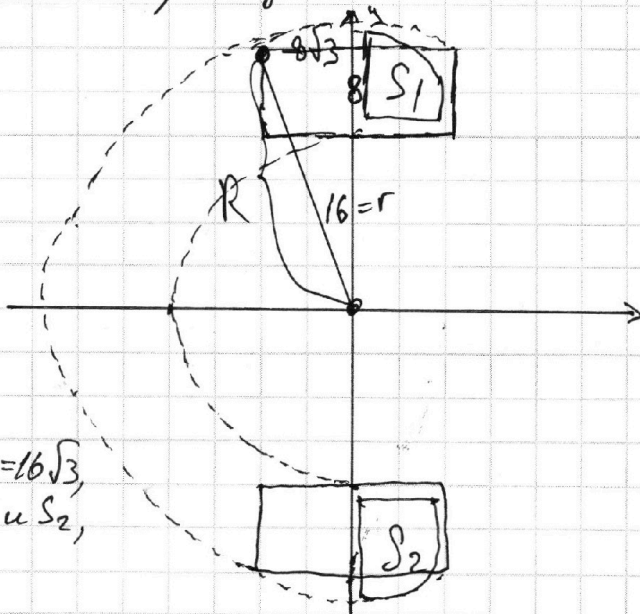
$$y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} - y + 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8. \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{3}} \leq 8; \quad x \leq 8\sqrt{3}$$

$$4) \begin{cases} y_1 < 0; \\ y_2 \geq 0; \end{cases} \quad -y + 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} + y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8; \quad -\frac{x}{\sqrt{3}} \leq 8 \\ x \geq -8\sqrt{3}$$

Заметим, что у нас получится прямоугольник со сторонами 8 и $16\sqrt{3}$.

② Построим множество M , получаемое при повороте P на π против часовой стрелки:

Заметим, что площадь данной фигуры — половина. Фигура между окружностями, радиусов 16 и R , где R по теореме $R = \sqrt{2^2 + 16^2} = 8\sqrt{3+1} = 16\sqrt{2}$, не считая при этом S_1 и S_2 , то есть $S_M = \frac{(\pi R^2 - \pi r^2)}{2} + S_1 + S_2$.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1



2



3



4



5



6



7

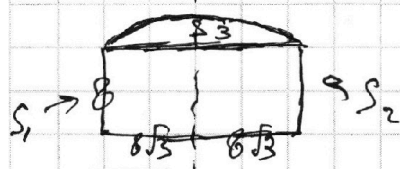


СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

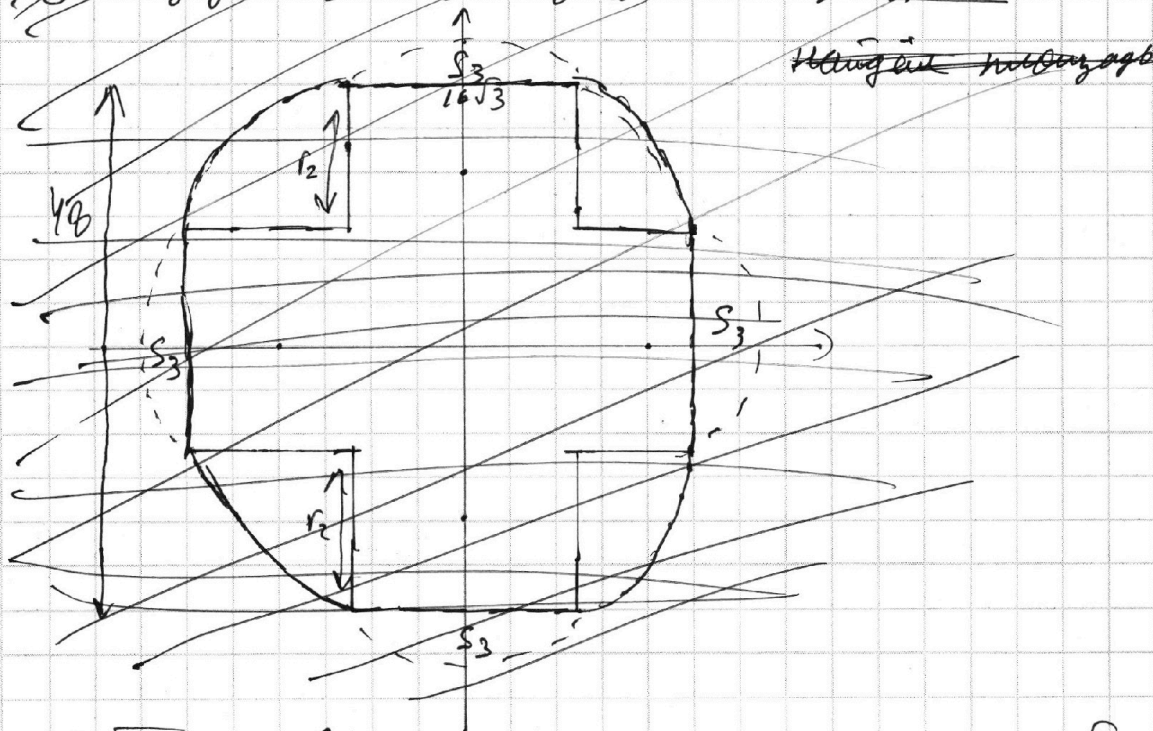
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

② Найдём $S_1 + S_2$, как площадь прямоугольника и S_3 :

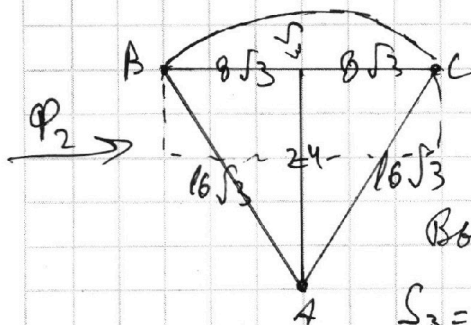


$$\Rightarrow S_1 + S_2 = 8 \cdot 16\sqrt{3} + S_3$$

~~③ Площадь S_3 найдём из формулы:~~



③ Площадь S_3 найдём из части $\omega \subset R = 16\sqrt{3}$:



Заметим что $\triangle ABC$ - $\triangle$
т.к. $AB = AC = BC = 16\sqrt{3} \Rightarrow \angle A = 60^\circ$
т.е. это $\frac{1}{6}$ от всех ω , т.к. $60^\circ \cdot 6 = 360^\circ$

$$\Rightarrow S_{\varphi_2} = \frac{1}{6} \cdot \pi (16\sqrt{3})^2 = \frac{16^2 \cdot 3 \pi}{6} = 128\pi$$

Вычтем из этого $S_{\triangle ABC}$ и получим S_3 :

$$S_3 = 128\pi - \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 16\sqrt{3} = 128\pi - 192\sqrt{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1} \text{ Чз п.2: } S_1 + S_2 = 8 \cdot 16\sqrt{3} + 128\pi - 12 \cdot 16\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 = 128\pi - 4 \cdot 16\sqrt{3}$$

Тогда вернёмся в пункт 2:

$$S_H = \frac{\pi \cdot (16\sqrt{3})^2 - \pi \cdot 16^2}{2} + 128\pi - 4 \cdot 16\sqrt{3} =$$

$$= \frac{\pi}{2} (16^2 \cdot 3 - 16^2) + 128\pi - 4 \cdot 16\sqrt{3} = \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot 16^2 + 128\pi - 64\sqrt{3} =$$

$$= 256\pi + 128\pi - 64\sqrt{3} = 384\pi - 64\sqrt{3}$$

Ответ: $384\pi - 64\sqrt{3}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

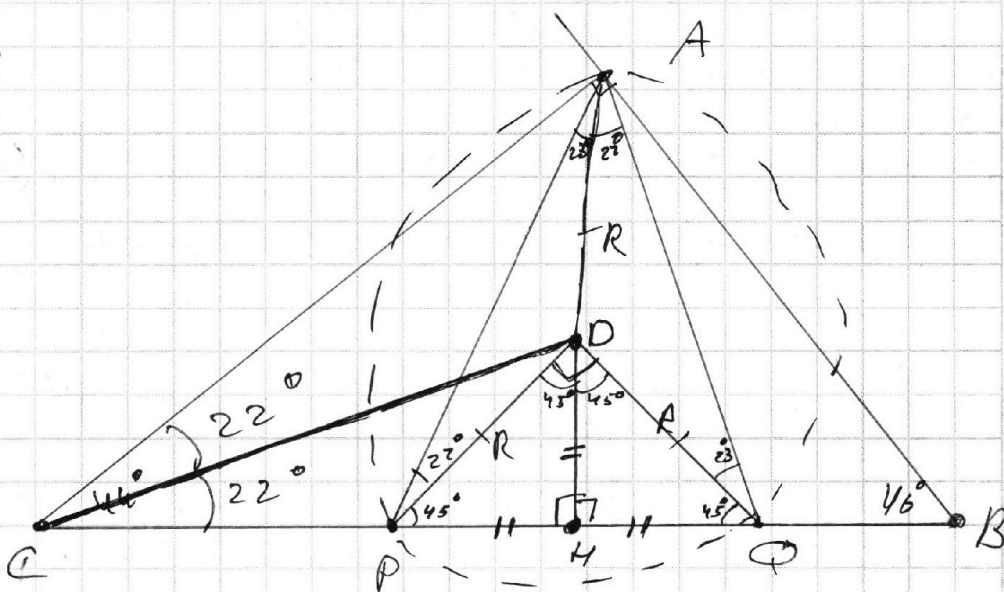
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:
 $AB = BP$
 $AC = CQ$
 $DP = DQ$
 $\angle PDQ = 90^\circ$
 $\angle CBA = 46^\circ$
 $\angle DCB = ?$

Решение:



① $DP = DQ \Rightarrow \triangle PDQ - \text{пр } \triangle (\text{по гипотенузе})$
 $\Rightarrow \angle DPQ = \angle DQP = \frac{180^\circ - \angle PDQ}{2} = 45^\circ (\text{по св. пр. } \triangle)$

$\Rightarrow$ Проведем DH - биссектрису $\Rightarrow DH$ - медиана и биссектриса $\triangle PDQ$ (по св. пр. $\triangle$) $\Rightarrow \angle PDH = \angle QDH = 45^\circ$

② $\angle ACB = 90^\circ - \angle CBA = 44^\circ (\text{по т. о } \angle \text{ в } \triangle \text{ с } \angle \text{ в } \triangle)$

1) $AB = BP (\text{по условию}) \Rightarrow \triangle ABP - \text{пр } \triangle (\text{по гипотенузе}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BAP = \angle BPA = \frac{180^\circ - \angle PBA}{2} = 64^\circ \Rightarrow \angle DPA = 64^\circ - 45^\circ = 22^\circ$

2) аналогично $\angle BQA = 23^\circ$ тогда по т. о $\angle \text{ в } \triangle \text{ с } \angle \text{ в } \triangle$ $\triangle APQ$:

$\angle PAQ = 45^\circ$, тогда можем построить в центре $\triangle APQ$

$\triangle APQ$, а D - будет центром, т.к. $\angle PDQ = 2\angle PAQ$, как центральный



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

и $\angle$ делит на ср. перп. отк $PQ \Rightarrow$
(сегментное расположение)
 $\Rightarrow DP = DQ = DA = R$

② $\triangle DCA$ и $\triangle DCQ$:

$$AD = QD = R.$$

CD - осев

$CQ = CA$ (по условию)

$\Rightarrow \triangle DCA = \triangle DCQ$
по трём сторонам.

$$\Rightarrow \angle ACD = \angle QCD = \frac{\angle ACQ}{2} = 22^\circ$$

Ответ: 22°



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 \\ yz = -6x + x^2 \\ zx = -6y + y^2 \end{cases}$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 12y + 36 + z^2 - 12z + 36 = ?$$

$$x \neq 0 \quad y \neq 0 \quad z \neq 0.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 6z - xy - yz - zx = 0.$$

$$(x+y+z)^2 - 3(xy+xz+yz) - 6(x+y+z)$$

$$xy - yz = 6x - 6z + z^2 - x^2$$

$$y(x-z) = 6(x-z) + (z-x)(x+z)$$

$$(z-x)(x+z) - 6(z-x) + y(z-x) = 0.$$

$$(z-x)(x+z-6+y) = 0.$$

$$z=x$$

$$x=y$$

$$y=z$$

$$x+y+z=6$$

$$x+y+z=6.$$

$$x+y+z=6.$$

$$x^2 = x^2 - 6x$$

$$\cancel{x}$$

$$x = x - 6.$$

$$y \cdot y =$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 1 \ 3 \ 6 \\ \underline{4} \\ 1 \ 4 \ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \\ x \ 1 \ 2 \\ \underline{6} \\ 4 \ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 4 \ 4 \\ - \ 4 \ 2 \\ \hline 4 \ 2 \end{array}$$

$$I) x^2 = x^2 - 6x, x=0 \quad \emptyset.$$

$$II) z=x=y \rightarrow \emptyset.$$

$$x=z$$

$$x+y+z=6$$

$$y \cdot y = -6x + x^2$$

$$xy = -6x + x^2$$

$$xy = -6x + x^2 \rightarrow y = -6 + x.$$

$$x^2 = -6y + y^2$$

$$x^2 = -6(-6+x) + (x-6)^2$$

$$x^2 = 36 - 6x + x^2 - 12x + 36$$

$$18x = 36 \cdot 2 \quad | :18$$

$$x=4$$

$$y \cdot y = -2.$$

$$16 = 12 + y^2$$

$$y \cdot y = -6 \cdot (-2) + 2^2 =$$

$$z=4$$

$$y = -6 + 4 = -2.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

n паровозов - 3 маршала.

$$\frac{C_5^3}{C_n^3} = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{n!}{3!(n-3)!} - \text{было.}$$

$$\frac{C_9^3}{C_n^3} = \frac{9!}{3!6!} \cdot \frac{n!}{3!(n-3)!} - \text{стало.}$$

$$\begin{aligned} \frac{9!n!}{3!6!3!(n-3)!} : \frac{5!n!}{3!2!3!(n-3)!} &= \frac{9!n!8!2!3!(n-3)!}{8!6!3!(n-3)!5!n!} = \\ &= \frac{9!2!}{6!5!} = \frac{4 \cdot \cancel{6}^2 \cdot 3}{\cancel{8} \cdot \cancel{4} \cdot 3} = \frac{42}{5} = 8,4. \end{aligned}$$

$$= \frac{19}{9} \cdot \frac{5}{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$$

x_1, x_2

" "

a_6, a_4

$$a_6 \cdot a_4 = a^2 - 6a + 4$$

$$a_6 + a_4 = a^2 - 4a$$

$a_5 + d, a_5 + 2d$

$$2a_5 + 3d = a^2 - 4a$$

$$a_6(a_6 + d) = 4 - 4$$

$$(a_6 - d)(a_6 + 2d) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a = \frac{a^3 - 4a^2}{5} \quad | :5$$

$$5a^2 - 4a - a^3 + 4a^2 = 0$$

$$5a(a - 4) - a^2(a - 4) = 0$$

$$a(a - 4)(5 - a) = 0$$

$$a = 0$$

$$a - 4 = 0$$

$$a = 4$$

$$5 - a = 0$$

$$a = 5$$

$$a = 0: x^2 + 4 = 0$$

$$a = 4:$$

$$x^2 + 16 - 24 + 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = -2$$

$$x = 2$$

$$5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0 \quad | :5$$

$$x^2 - \frac{(a^3 - 4a^2)}{5}x - \left(\frac{2a^3 + 6a + 15}{5}\right) = 0$$

4

$$\begin{array}{r} \times 16 \\ 8 \\ \hline 128 \end{array}$$

x_3, x_4

" "

a_5, a_8

$$128 + 24 + 15$$

$$a_5 \cdot a_8 = -\frac{2a^3 + 6a + 15}{5}$$

$$a_5 + a_8 = \frac{a^3 - 4a^2}{5}$$

$a_5 + 3d$

$$2a_5 + 3d = \frac{a^3 - 4a^2}{5} + \frac{128}{5} + \frac{24}{5} + \frac{15}{5}$$

$$\begin{array}{r} \times 16 \\ 4 \\ \hline 64 \\ \hline 128 \\ \hline 24 \\ \hline 15 \\ \hline 164 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 59 \\ 4 \\ \hline 236 \\ \hline 25 \\ \hline 261 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 29 \\ 9 \\ \hline 261 \end{array}$$

$$5x^2 - (4^3 - 4^2)x - 2 \cdot 4^3 - 6 \cdot 4 - 15 = 0$$

$$x^2 = \frac{164}{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

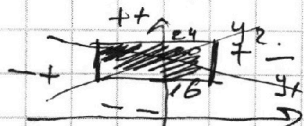
7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}| + |y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}| \leq 8.$$

$$y = 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}$$



$$y_2 = 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

$$++: y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} + y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8$$

$$2y - 40 \leq 8$$

$$y - 20 \leq 4; y \leq 24$$

$$--: -y + 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} - y + 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8$$

$$-2y + 40 \leq 8$$

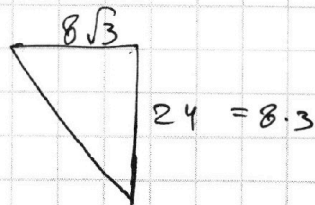
$$-y + 20 \leq 4$$

$$16 \leq y$$

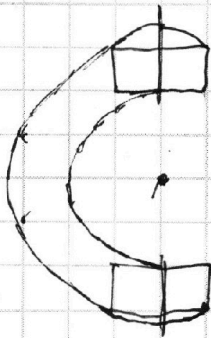
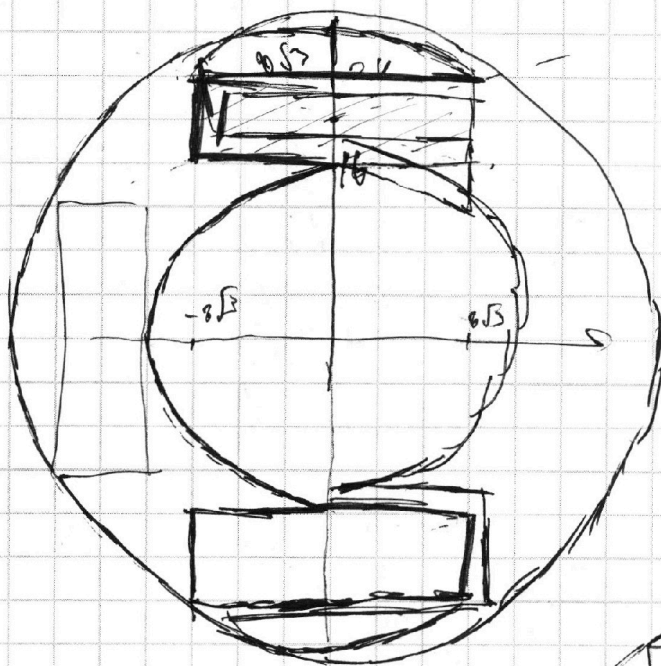
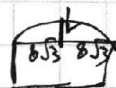
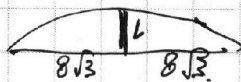
$$+-: y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} - y + 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}} \leq 8; x \leq 8\sqrt{3}$$

$$5 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 8$$



$$\sqrt{8^2 \cdot 3 + 24^2 \cdot 3^2} = 8\sqrt{3+9} = 16\sqrt{3} \quad 24 : 3 = 8$$





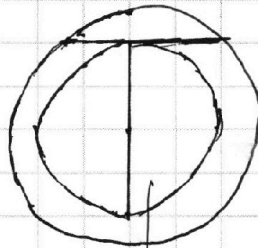
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

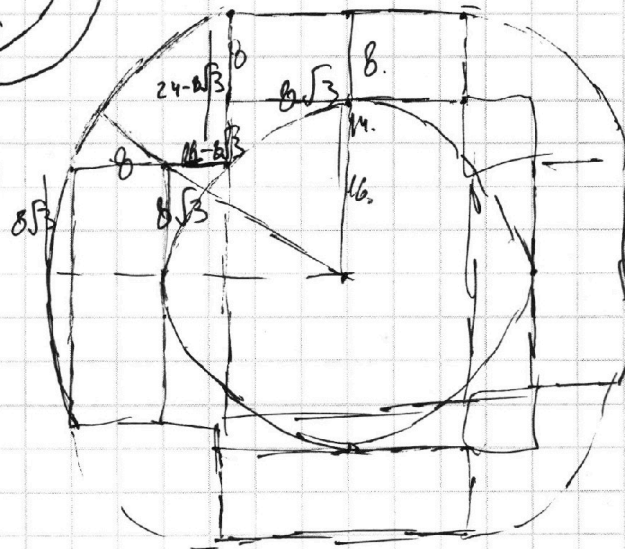
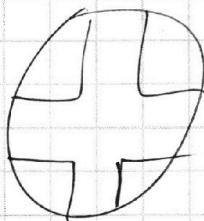
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 16 \\ \hline 48 \\ + 96 \\ \hline 144 \\ + 256 \\ \hline 400 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 16 \\ \hline 64 \\ + 128 \\ \hline 192 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 8\sqrt{3} \quad 8\sqrt{3} \\ \times 128 \\ \hline 1024 \\ + 1024 \\ \hline 2048 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3.128 \\ \times 122 \\ \hline 381.36 \end{array}$$



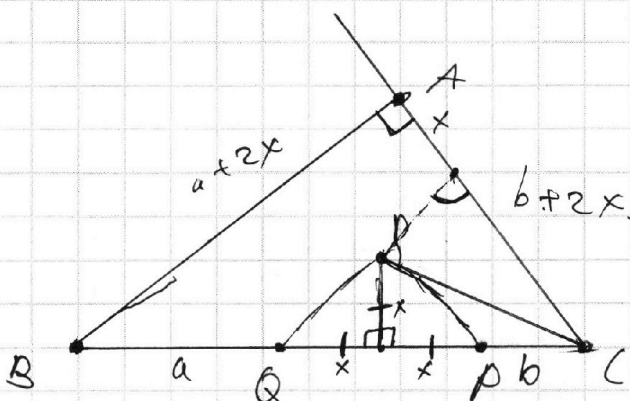
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

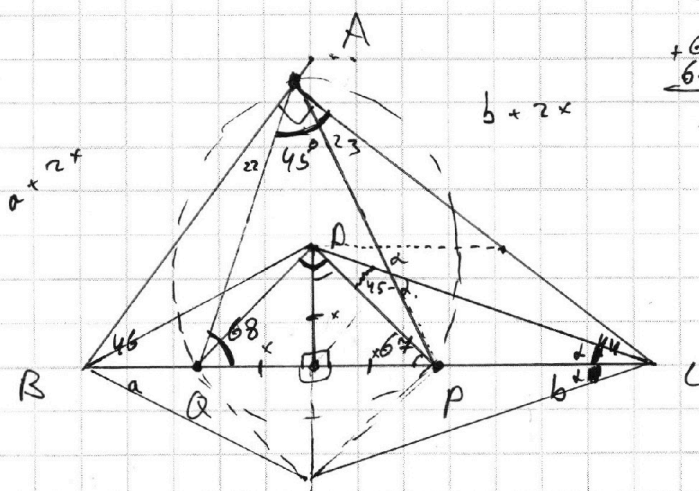
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\angle B = 46^\circ$
 $AB = BP$
 $AL = CQ$
 $DP = DQ$
 $\angle PDQ = 30^\circ$
 $\angle CBA = 46^\circ$
 $\angle DCB = ?$



4
 2
 (5)
 4
 10
 (5)
 (6)
 31
 26

$$a+b - \sqrt{a^2+b^2} = DP$$



$$\frac{180-44}{2} = \frac{90-22}{2} = \frac{68}{2} = 34$$

$$\frac{68}{5} = 13.6$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, featuring geometric diagrams and calculations.

Top Left: Calculations involving π and 16^2 .

$$\frac{\pi}{2} (16^2 - 16^2)$$
$$16^2 \pi$$
$$\sqrt{8^2 \cdot 3 + 8^2 \cdot 9}$$
$$8\sqrt{12}$$
$$4 \cdot 3$$
$$16\sqrt{3}$$

Top Center: A diagram of a triangle with internal lines and angles labeled (e.g., 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100).

Top Right: A diagram of a triangle with internal lines and angles labeled (e.g., 180, 158, 22).

$$\frac{180}{22}$$
$$\frac{158}{22}$$

Bottom Left: A diagram of a triangle with vertices labeled a and b .

$$\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$
$$\sqrt{2(a+b-\sqrt{a^2+b^2})}$$
$$\frac{1}{\pi} \cdot 16^2 \cdot \pi$$
$$16 \cdot 8$$

Bottom Center: A diagram of a triangle with internal lines and angles labeled (e.g., 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100).

$$\frac{\sqrt{3} \cdot 16^2 \cdot 3}{4}$$
$$\frac{3}{4} \cdot 16$$
$$\frac{192}{4}$$
$$\frac{182}{4}$$
$$\frac{128}{4}$$
$$\frac{64}{4}$$

Bottom Right: A diagram of a triangle with internal lines and angles labeled (e.g., 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100).

$$\frac{128\sqrt{3}}{2} + 8 \cdot 16\sqrt{3} = 182\sqrt{3}$$