



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2 \\ yz = -2x + x^2 \end{cases}$$

$$y(x-z) = z(x-z) - (x-z)(x+z) \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 2 - x - z \end{cases}$$

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

ABC - остроугольный Δ

AB - диаметр ω

$BC \cap \omega = \{B; D\}$

$F \in [AC]$

$DF \perp AC$

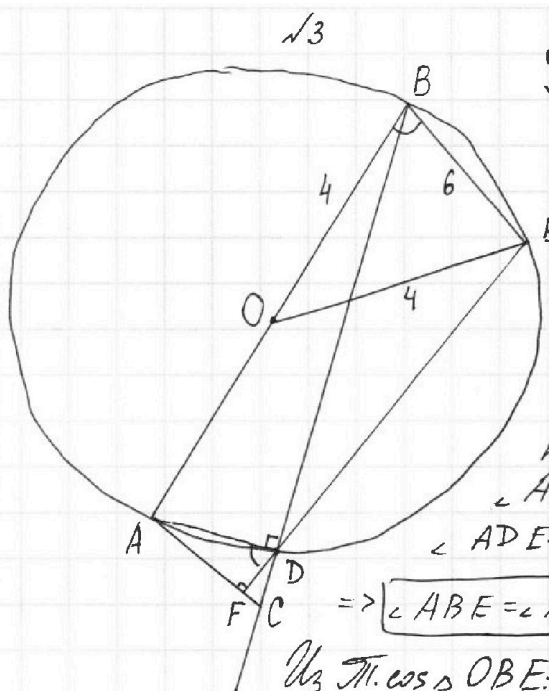
$DF \cap \omega = \{D; E\}$

$AC = 10$

$AB = 8$

$BE = 6$

$AF = ?$



Пусть O - центр ω . AB - диаметр $\Rightarrow OB$ и OE - радиусы;

$$OB = OE = \frac{AB}{2} = 4.$$

$ABED$ - вписанный в ω

четырёхугольник $\Rightarrow$ сумма противоположных углов у него равна 180° . Т.е.

$$\angle ABE + \angle ADE = 180^\circ.$$

$$\angle ADE + \angle ADF = 180^\circ \text{ как смежные}$$

$$\Rightarrow \angle ABE = \angle ADF$$

$$\text{Из тл. кос } \Delta OBE: OE^2 = OB^2 + BE^2 - 2 \cdot OB \cdot BE \cdot \cos \angle OBE$$

$$4^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos \angle ABE; 2 \cdot 4 \cdot \cos \angle ADF = 6; \boxed{\cos \angle ADF = \frac{3}{4}}$$

$\angle ADB$ опирается на диаметр $\Rightarrow \angle ADB = 90^\circ \Rightarrow$ и спущенный перпендикуляр

$\angle ADC = 90^\circ$. Пусть $AF = x$. Тогда $AF + FC = AC = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow FC = 10 - x$. В прямоугольном ΔADC DF - высота на гипотенузу $\Rightarrow$

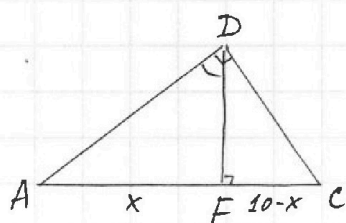
$$\Rightarrow DF = \sqrt{AF \cdot FC} = \sqrt{x(10-x)};$$

$$\sin \angle ADF > 0 \quad (0^\circ < \angle ADF < 90^\circ) \Rightarrow \sin \angle ADF = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ADF} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\operatorname{tg} \angle ADF = \frac{\sin \angle ADF}{\cos \angle ADF} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{3}. \quad \Delta ADF - \text{прямоугольный}; \operatorname{tg} \angle ADF = \frac{x}{\sqrt{x(10-x)}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$3x = \sqrt{7x(10-x)}; x > 0; 9x^2 = 7x(10-x); 9x^2 = 70x - 7x^2; 16x^2 = 70x; 16x = 70;$$

$$x = \frac{70}{16} = 4 \frac{3}{8}. \quad \text{Ответ: } 4 \frac{3}{8}.$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть всего $n \geq 7$ коробок. Нам можно открыть m коробок $\leq n$. Пусть надо в 3 коробки. Всего вариантов открыть m коробок C_n^m . Нам удовлетворяет случай, где мы взяли 3 определенных коробки и еще $m-3$, которые $(m-3)$ выбрали из $n-3$ вариантов. Т.е. подходят C_{n-3}^{m-3} варианта.

$$P(m) = \frac{C_{n-3}^{m-3}}{C_n^m} \quad \frac{P(k)}{P(m)} = \frac{C_{n-3}^{k-3}}{C_n^k} \cdot \frac{C_{n-3}^{m-3}}{C_n^m} = \frac{(n-3)! \cdot (n-k)! \cdot k!}{(k-3)! \cdot (n-k)! \cdot n!} \cdot \frac{(n-3)! \cdot (n-m)! \cdot m!}{(m-3)! \cdot (n-m)! \cdot n!} =$$

$$= \frac{k!}{(k-3)!} \cdot \frac{m!}{(m-3)!} = \frac{k(k-1)(k-2)}{m(m-1)(m-2)}$$

Посчитаем для $k=7$ и $m=5$:

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{7 \cdot 3}{2 \cdot 3} = 3,5$$

Ответ: в 3,5 раз.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№5

$$x^2 - (a^2 - 2a)x + (a^2 - a - 7) = 0$$

$$3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Phi = \underbrace{\left| x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \right|}_{f_0} + \underbrace{\left| x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \right|}_{f_1} \leq 4 \quad \text{или: } \begin{cases} x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} = f_0 \\ x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} = f_1 \end{cases}$$

Рассмотрим $x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} = 0$. $\frac{y}{2\sqrt{3}} = 10 - x$; $y = 2\sqrt{3}(10 - x)$ (1)

Рассмотрим $x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} = 0$. $\frac{y}{2\sqrt{3}} = x - 10$; $y = 2\sqrt{3}(x - 10)$ (2)

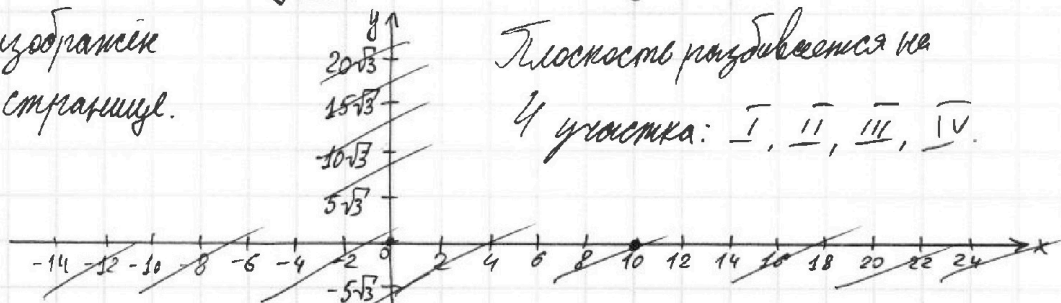
При $x = 10$ на (1) $f_0 = 0$; выше (1) $f_0 > 0$; ниже (1) $f_0 < 0$

При $y = 0$ на (2) $f_1 = 0$; выше (2) $f_1 < 0$; ниже (2) $f_1 > 0$

(1) и (2) — прямые. (1): $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 10 \\ \hline y & 20\sqrt{3} & 0 \end{array}$ (2): $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 10 \\ \hline y & -20\sqrt{3} & 0 \end{array}$

График изображен на др. странице.

Плоскость разбивается на 4 участка: I, II, III, IV.



I: $f_0 > 0$; $f_1 < 0$: $x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} + -x + 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} = \frac{y}{\sqrt{3}} \leq 4$

II: $f_0 < 0$; $f_1 < 0$: $-x + 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} + -x + 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} = -2(x - 10) \leq 4$

III: $f_0 > 0$; $f_1 > 0$: $x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} + x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} = 2(x - 10) \leq 4$

IV: $f_0 < 0$; $f_1 > 0$: $-x + 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} + x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} = -\frac{y}{\sqrt{3}} \leq 4$

I: $y \leq 4\sqrt{3}$; II: $x \geq 10 - 2 = 8$; III: $x \leq 2 + 10 = 12$; IV: $y \geq -4\sqrt{3}$

(1) в $y = 4\sqrt{3}$: $2 = 10 - x$; $x = 8 \Rightarrow$ как раз сходятся области

(2) в $y = -4\sqrt{3}$: $-2 = 10 - x$; $x = 12 \Rightarrow$

(2) в $y = 4\sqrt{3}$: $2 = x - 10$; $x = 12 \Rightarrow$

(2) в $y = -4\sqrt{3}$: $-2 = x - 10$; $x = 8 \Rightarrow$

продолж.

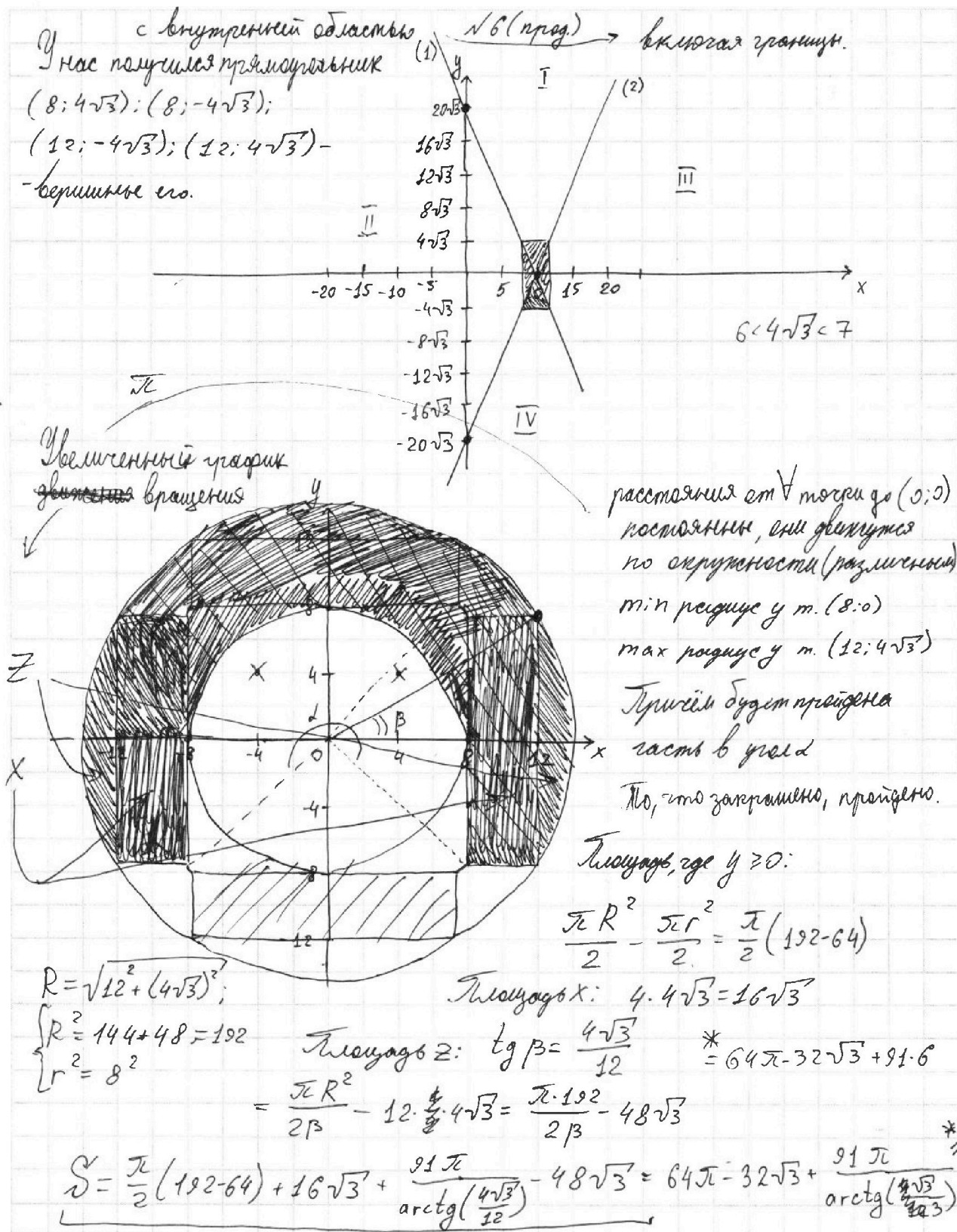


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

BC - гипотенуза $\triangle ABC$

$\angle BCA = 50^\circ$

$AB = BP$

$AC = CQ$

$P, Q \in [BC]$

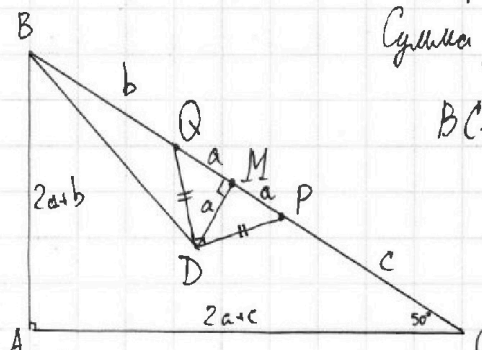
$DP = DQ$

D - центр $\triangle ABC$

$\angle PDQ = 90^\circ$

Найти:

$\angle DBC$?



$\sqrt{7}$
Сумма двух сторон $\triangle >$ третьей $\Rightarrow$ будет порядок
BQPC на [BC].
BC - гипотенуза $\triangle ABC \Rightarrow \angle BAC = 90^\circ$.

$DP = DQ \Rightarrow D \in$ серединному перпенди-
куляру к [PQ]. Пусть M - середина
[PQ].

$DM \perp PQ, \angle QDP = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow Q, D, P \in$ окружности с диаметром PQ. $\Rightarrow QM = MP = MD = a$

Пусть $QM = a = MP = MD$; $BQ = b$; $PC = c$. Тогда:

$AB = BP \Rightarrow AB = 2a + b$; $AC = CQ \Rightarrow AC = 2a + c$;

П. Пифагора $\triangle ABC$: $AB^2 + AC^2 = BC^2$: $(2a+b)^2 + (2a+c)^2 = (2a+b+c)^2$;

$4a^2 + 4ab + b^2 + (2a+c)^2 = (2a+c)^2 + 2b(2a+c) + b^2$; $4a^2 + 4ab = 2b(2a+c)$

$\frac{2a^2 + 2ab}{b} = 2a + c$; $c = \frac{2a^2 + 2ab}{b} - 2a$. $\triangle BMD$ прямоугольный $\Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg} \angle DBC = \frac{a}{a+b} = \frac{1}{1 + \frac{b}{a}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\operatorname{tg} 50^\circ}} (*)$. $\triangle ABC$ прямоугольный. $\operatorname{tg} \angle ACB = \frac{2a+b}{2a+c}$;

$\frac{2a+b}{2a + \frac{2a^2 + 2ab}{b} - 2a} = \operatorname{tg} 50^\circ = \frac{(2a+b)b}{2a^2 + 2ab}$; $2a^2 \operatorname{tg} 50^\circ + 2ab \cdot \operatorname{tg} 50^\circ = 2ab + b^2$;

$a = \frac{(1 - \operatorname{tg} 50^\circ)b \pm \sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 50^\circ - 2 \operatorname{tg} 50^\circ)b^2 + 2 \operatorname{tg} 50^\circ b^2}}{2 \operatorname{tg} 50^\circ} = \frac{(1 - \operatorname{tg} 50^\circ) \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 50^\circ}}{2 \operatorname{tg} 50^\circ} b$;

$0 < \operatorname{tg} 50^\circ \Rightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 50^\circ > 1$; $\Rightarrow 1 - \operatorname{tg} 50^\circ - \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 50^\circ} < 0 \Rightarrow a < 0$ - не подходит.

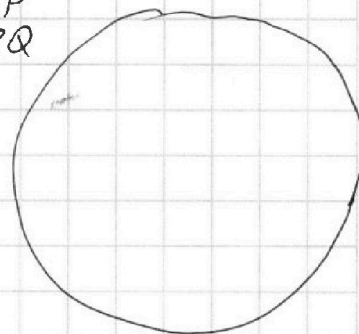
$\frac{a}{b} = \frac{1 - \operatorname{tg} 50^\circ + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 50^\circ}}{2 \operatorname{tg} 50^\circ}$; ОММ: $\sin^2 \angle + \cos^2 \angle = 1$; $1 \cdot \frac{1}{\cos^2 \angle}$; $\operatorname{tg}^2 \angle + 1 = \frac{1}{\cos^2 \angle}$; $\cos 50^\circ > 0$

$(*)$
 $\angle DBC = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{\operatorname{tg} 50^\circ}} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2 \sin 50^\circ}} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos 50^\circ - \sin 50^\circ + 1}{\cos 50^\circ + \sin 50^\circ + 1} \right)$

$(0 < \angle DBC < 90^\circ)$

из суммы $\angle \triangle ABC$

Ответ: $\operatorname{arctg} \left(\frac{\cos 50^\circ - \sin 50^\circ + 1}{\cos 50^\circ + \sin 50^\circ + 1} \right)$



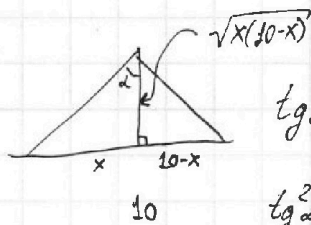
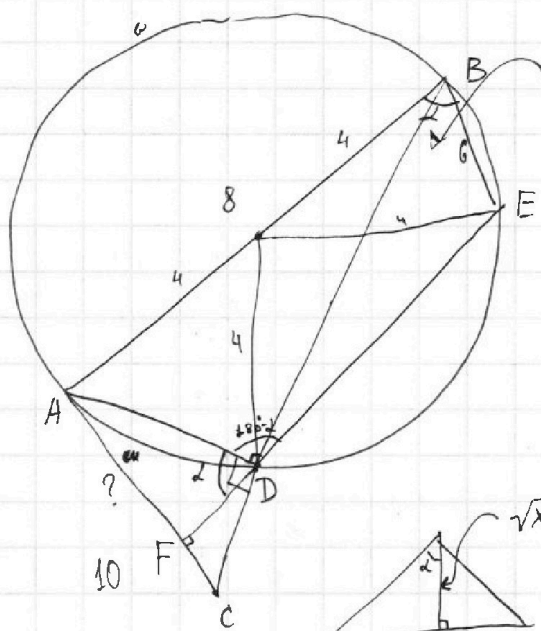


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{\sqrt{x(10-x)}}$$

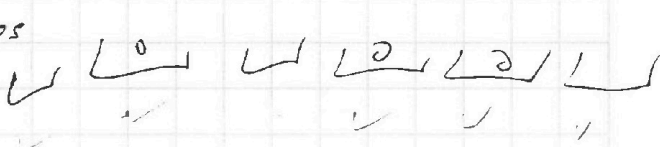
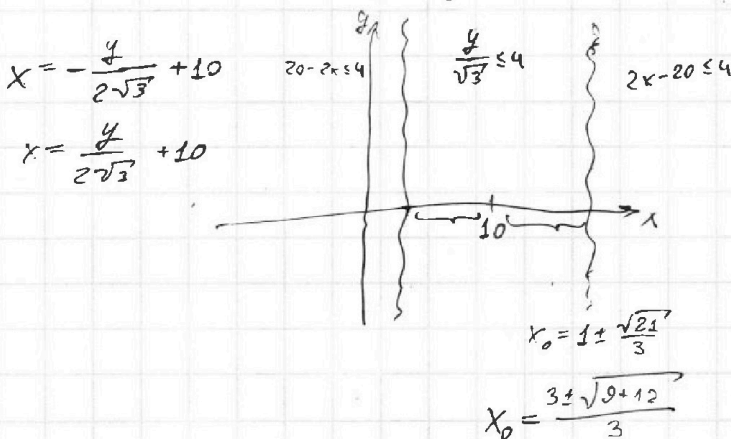
$$\operatorname{tg}^2 \alpha / (10-x) x = x^2$$

$$12 + xy + yz + zx - 2(x+y+z) \quad xy = (z-1)^2 - 1$$

$$12 + xy + (x+y) \cdot \frac{(x-1)^2 - 1}{y} - 2(xy + \frac{(x-1)^2 - 1}{y})$$

$$\Rightarrow xy + yz + xz = (z-1)^2 + (y-1)^2 + (x-1)^2 - 3$$

$$\frac{(x-1)^2 - 2x + 3}{2} = \frac{xy + yz + xz + 9 - 2(xy + z) + 9}{x(y+z) \cdot (y+z)}$$



n

$$\frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2}$$



$$\frac{C_{n-3}^{m-3}}{C_n^m} \quad C_{n-3}^k$$

$$\frac{(n-3)! \cdot m! \cdot (n-m)!}{(m-3)! \cdot 3! \cdot n!} \cdot \frac{(n-3)! \cdot k! \cdot (n-k)!}{(k-3)! \cdot 3! \cdot n!}$$

$$\frac{m! \cdot (n-m)! / (k-3)!}{(m-3)! \cdot k! \cdot (n-k)!}$$

$$\frac{z^2 - 2z}{x} = \frac{x^2 - 2x}{z}$$

$$z^3 - 2z^2 = x^3 - 2x^2$$

$$(z-x)(z^2 + zx + x^2) = 2(z-x)(z+x)$$

$$z^2 + z(x+2) + x^2 - 2x = 0$$

$$z = \frac{2-x \pm \sqrt{x^2 - 2x + 4 - 4x + 8x}}{2}$$

$$-3x^2 + 6x + 4$$

$$3x^2 - 6x - 4$$

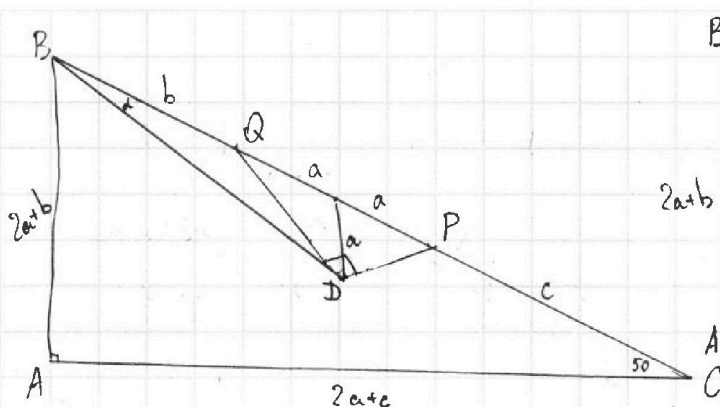


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



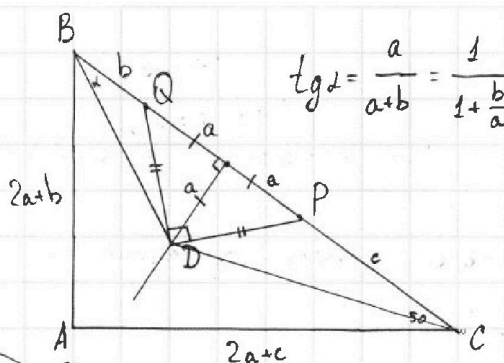
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$
$$\lg^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ + 48 \\ \hline 192 \end{array}$$



$$\lg 2 = \frac{a}{a+b} = \frac{1}{1+\frac{b}{a}}$$

$$\lg 50 = \frac{2a+b}{2a+c}$$

$$(2a+c)^2 + (2a+b)^2 = (2a+b+c)^2$$
$$(2a+c)^2 + 4a^2 + 4ab + b^2 = (2a+c)^2 + 2b(2a+c) + b^2$$

$$\begin{array}{r} 192 \\ - 64 \\ \hline 128 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

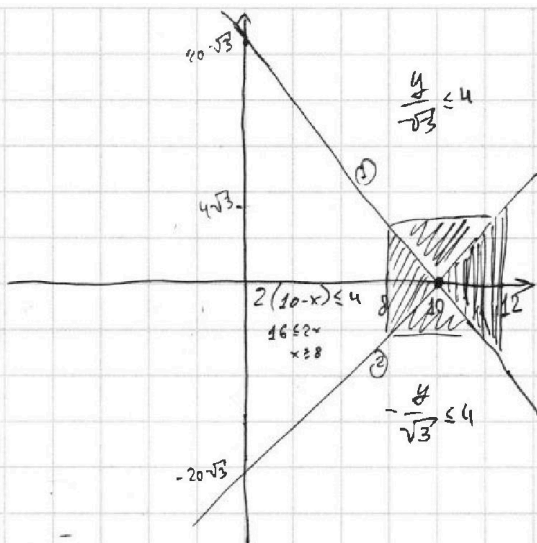
1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) $y = 2\sqrt{3}(10-x)$

2) $y = 2\sqrt{3}(x-10)$



$y(x+z) = 2(x+z) + (x+z)$

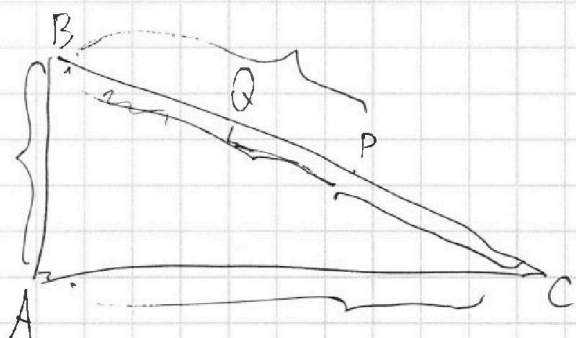
$\begin{cases} z=x \\ y=2+x+z \end{cases}$

$\begin{cases} x=y \\ z=2+x+y \end{cases}$

$y=z$
 $x=2+y+z$

x, y
 t, v

$y, x = \frac{a^2 - 2a \pm \sqrt{a^4 - 4a^3 + 4a^2 + 4a + 28}}{2}$



$x, \frac{a^2 - a - 7}{x}$

$b+5d=x$

$b+6d=y$

$b+3d=t$

$b+8d=v$

$d \neq 0$

$d=y-x$

$5d=v-t$

$3d=y-t$

$ax^2+bx+c=0$

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$
 $x_1x_2=\frac{c}{a}$

$\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a}}$

$3y-3x=y-t$
 $y \neq x$
 $y \neq t$

$2y=3x+t$

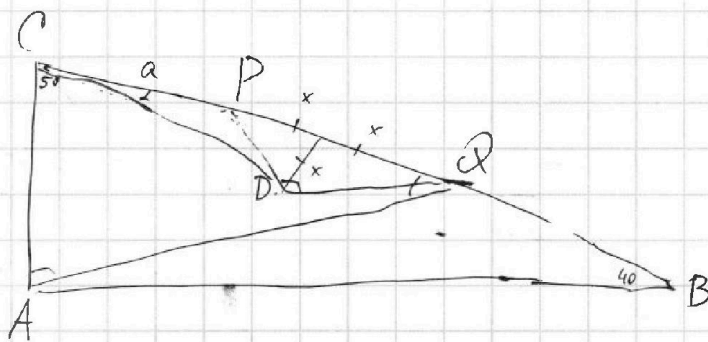
$3v-3t=5y-5t$

$5y=3v+2t$

$2y=3x+t$

$5y=v+2 \cdot \frac{a^3-2a^2}{3}$

$7y=3x+a^3-2a^2$



$\text{tg} \alpha =$