



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2 & (1) \\ yz = -2x + x^2 & (2) \\ zx = -2y + y^2 & (3) \end{cases} \quad \begin{cases} z-2 = \frac{xy}{z} \\ x-2 = \frac{yz}{x} \\ y-2 = \frac{xz}{y} \end{cases}$$

$$I = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = \frac{(xy)^2}{z^2} + \frac{(yz)^2}{x^2} + \frac{(xz)^2}{y^2} = \frac{(xyz)^2}{x^2 y^2 z^2} = \frac{(xyz)^2}{(xyz)^2} = 1$$

Т.к. $x, y, z \neq 0$.

$$\begin{aligned} (2) & \Rightarrow y = \frac{x(x-2)}{x-2} \\ (3) & \Rightarrow z = \frac{y(y-2)}{y-2} \end{aligned}$$

$$I = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = \frac{(xy)^2}{z^2} + \frac{(yz)^2}{x^2} + \frac{(xz)^2}{y^2} =$$

$$= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z + 4 = x^2 + y^2 + z^2 - 4(x+y+z) + 12$$

$$= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z + 4 = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 1$$

$$= 9yz + 2xy + 2xz + 3 - x^2 - y^2 - z^2 =$$

$$I = \frac{(xy)^2}{z^2} + \frac{(yz)^2}{x^2} + \frac{(xz)^2}{y^2} = \frac{(xyz)^2}{x^2 y^2 z^2} = \frac{(xyz)^2}{(xyz)^2} = 1$$

$\left(\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \right)$
 $n=60$
 σ среднее



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

12)

$$n = 10^{30001} - 1 = \underbrace{9 \dots 9}_{30001} \quad ((a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$$

↓

$$n^3 = (10^{30001} - 1)^3 = 10^{90003} - 3 \cdot 10^{60002} + 3 \cdot 10^{30001} - 1 =$$

$$= \underbrace{10^{60002} (10^{30001} - 3)}_{//} + \underbrace{3 \cdot 10^{30001} - 1}_{//}$$

$$\underbrace{9 \dots 9}_{30000} \underbrace{700 \dots 0}_{60002} + \underbrace{299 \dots 9}_{30000} = \underbrace{9 \dots 9}_{30000} \underbrace{70 \dots 0}_{31000} \underbrace{0299}_{30000}$$

↓

Ответ: 60000.

$N_9 = 60000$

$$\frac{AF}{FC} = \frac{28}{36} \quad AF = \frac{28}{36} FC$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нч

Пусть всего n коробок

P_1 - вероятность победы при начальных усл

P_2 - вер-ть победы при 2-х условиях

1-ые усл-ия: Кол-во способов выбрать выигрышный набор из 5 шариков, где должны лежать 3 победных шарика, которые лежат в 6 коробках, которые лежат в 6 коробках

т.е. C_{n-3}^2 , т.к. 3 коробки обязательно должны быть в этом наборе, а остальные 2 - произвольные из оставшихся

Кол-во всевозможных наборов из 5 шариков: C_n^5

$$P_1 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{(n-3)(n-4) \cdot 5!}{2 \cdot (n) \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)} = \frac{60}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

2-ые условия:

Из аналогичных соображений (из 1-го случая)

Кол-во выигрышных наборов коробок = C_{n-3}^4

Кол-во всевозможных наборов = C_n^4

$$P_2 = \frac{C_{n-3}^4}{C_n^4} = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{24} \cdot \frac{4!}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)} = \frac{4!}{24 n(n-1)(n-2)}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{4!}{24 \cdot 60} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 5}{60} = \frac{4 \cdot 5}{10} = \frac{4}{2} = 3,5 \text{ раз}$$

Ответ: в 3,5 раз



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) (1) $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 2 = 0$. Корни: x_1, x_2

(2) $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ Корни: x_3, x_4

Пусть a_1 - первый элемент прогрессии

тогда без отг. обобщим: $x_1 = a_1 + 5d$

$x_2 = a_1 + 6d$

Тогда из теоремы

Виета для (1):

$x_2 = a_1 + 3d$

$x_1 + x_2 = -(- (a^2 - 2a))$

$x_4 = a_1 + 8d$

$x_1 + x_2 = a^2 - 2a$

$2a_1 + 11d = a^2 - 2a$

Аналогично из т. Виета для (2):

$x_3 + x_4 = a^3 - 2a^2$

Заметим, что $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ $2a_1 + 11d = a^3 - 2a^2$

Тогда $a^2 - 2a = a^3 - 2a^2$

$a^2 - 2a - a(a^2 - 2a) = 0$

$(a^2 - 2a)(1 - a) = 0$

$$\begin{cases} a = 1 \\ a^2 = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \\ a = 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверим, если значения $\begin{cases} a=0 \\ a=1 \\ a=2 \end{cases}$ удовл. условию.

① $a=0$

(1): $x^2 - 4 = 0$

$x_1 = -\sqrt{4}$

$x_2 = \sqrt{4}$

(2): $3x^2 + 6 = 0$

$x^2 = -2 - \emptyset$ $a=0$ не удовл. условию

② $a=1$

(1): $x^2 + x - 4 = 0$

$D = 1 + 4 \cdot 4 = 29$

$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{29}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2}$
 $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{29}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2} \Rightarrow d = \sqrt{29}$

(2): $3x^2 + x + 5 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot 5 < 0 \Rightarrow \emptyset$ - не удовл. усл.

③ $a=2$

(1): $x^2 - 5 = 0$

$x = \pm\sqrt{5}$

$x_1 = -\sqrt{5} = a_4$

$x_2 = \sqrt{5} = a_6$

$d = 2\sqrt{5}$

$d = \frac{a_6 - a_4}{2} = \frac{\sqrt{5} - (-\sqrt{5})}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2}$

(2): $3x^2 - 26 = 0$

$x^2 = \frac{26}{3}$

$x_1 = \sqrt{\frac{26}{3}} = a_9$

$x_2 = \sqrt{\frac{26}{3}} = a_{10}$

$d = \frac{-\sqrt{\frac{26}{3}} - \sqrt{\frac{26}{3}}}{2} = -\frac{2\sqrt{\frac{26}{3}}}{2} = -\frac{2\sqrt{26}}{3\sqrt{3}}$

$\frac{\sqrt{5} - \sqrt{\frac{26}{3}}}{2} \neq -\frac{2\sqrt{26}}{3\sqrt{3}}$

Ответ: не существует таких a .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{5}{|x-10+\frac{y}{2\sqrt{3}}|+|x-10-\frac{y}{2\sqrt{3}}| \leq 4 \quad \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} - \cos 60^\circ \right)$$

Рассмотрим случаи:

1) ++ (оба скобки
оба выражения > 0)

$$\begin{cases} x-10+\frac{y}{2\sqrt{3}} > 0 \\ x-10-\frac{y}{2\sqrt{3}} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > -2\sqrt{3}x + 20\sqrt{3} \\ y < 2\sqrt{3}x - 20\sqrt{3} \end{cases}$$

(Прямые $y = 20\sqrt{3} - 2\sqrt{3}x$
 $y = 2\sqrt{3}x - 20\sqrt{3}$
пересекаются в
точке $x=10$)

$$x-10+\frac{y}{2\sqrt{3}}+x-10-\frac{y}{2\sqrt{3}} \leq 4$$

$$2x-20 \leq 4$$

$$x \leq 12$$

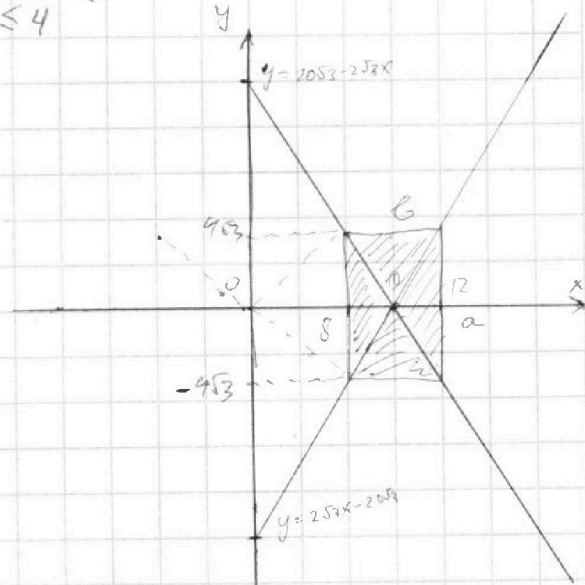
2) (1): - ; (2): -

$$\begin{cases} y < -2\sqrt{3}x + 20\sqrt{3} \\ y > 2\sqrt{3}x - 20\sqrt{3} \end{cases}$$

$$-x+10-\frac{y}{2\sqrt{3}}-x+10+\frac{y}{2\sqrt{3}} \leq 4$$

$$x \geq 8$$

Фигура Ф - Прямоугольник.
а, в - стороны прямоугольника.
 $a = 8\sqrt{3}$, $b = 4$



3) (1): + ; (2): -

$$\begin{cases} y > -2\sqrt{3}x + 20\sqrt{3} \\ y > 2\sqrt{3}x - 20\sqrt{3} \end{cases}$$

$$x-10-\frac{y}{2\sqrt{3}}-x+10+\frac{y}{2\sqrt{3}} \leq 4$$

$$\frac{y}{\sqrt{3}} \leq 4$$

Заменим $20\sqrt{3} - 2\sqrt{3}x = 4\sqrt{3}$
 $x=8$

4) (1): - ; (2): +

$$\begin{cases} y < -2\sqrt{3}x + 20\sqrt{3} \\ y < 2\sqrt{3}x - 20\sqrt{3} \end{cases}$$

$$y \geq -4\sqrt{3}$$

Аналогично
 $2\sqrt{3}x - 20\sqrt{3} = -4\sqrt{3}$
 $x=8$

$$S^i = \frac{1}{2} (R^2 - r^2) = \frac{1}{2} (64 - 36) = 14$$



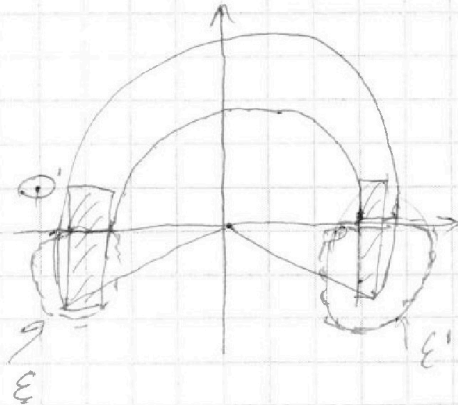
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

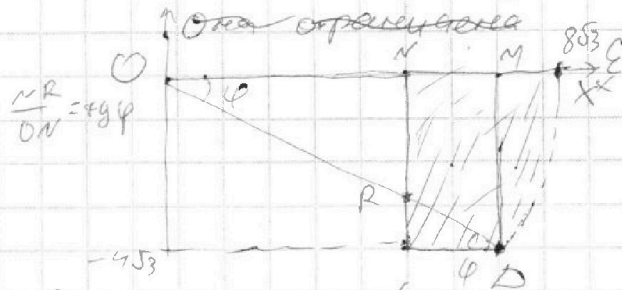
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



теперь посчитаем

площадь фигур S :



$$S_{\omega(x, \varphi)} = \frac{\varphi}{2\pi} \cdot \pi R^2 = \frac{1\pi \cdot 64}{42} = \frac{16\pi}{3}$$

$$S_{\triangle ONR} = \frac{1}{2} ON \cdot NR =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot ON \cdot ON \cdot \sin \varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{32\sqrt{3}}{3}$$

$$S_{\triangle RCD} = \frac{1}{2} R \cdot CD =$$

$$= \frac{1}{2} (NR - ON) \cdot CD =$$

$$= \frac{1}{2} \left(4\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{3}}{3} \right) \cdot 4 =$$

$$= 2 \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$S_E = \frac{16\pi}{3} - \frac{32\sqrt{3}}{3} + \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$S_E = \frac{16\pi - 32\sqrt{3} + 8\sqrt{3}}{3} = \frac{16\pi - 24\sqrt{3}}{3}$$

Отсюда т.к. $S_E = S_{E'}$ (из симметрии)

$$\text{Ответ: } S = 2S_E + S' = \frac{2}{3}(16\pi - 24\sqrt{3}) + 12\pi$$

$$S_{\omega(x, \varphi)} = \frac{\varphi}{2\pi} \cdot \pi R^2 = \frac{1\pi \cdot 64}{42} = \frac{16\pi}{3}$$

$$S_{\triangle RCD} = \frac{1}{2} R \cdot CD =$$

$$= \frac{1}{2} (NR - ON) \cdot CD =$$

$$= \frac{1}{2} \left(4\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{3}}{3} \right) \cdot 4 =$$

$$= 2 \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$S_E = \frac{16\pi}{3} - \frac{32\sqrt{3}}{3} + \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$S_E = \frac{16\pi - 32\sqrt{3} + 8\sqrt{3}}{3} = \frac{16\pi - 24\sqrt{3}}{3}$$

$$S_{\triangle RCD} = \frac{1}{2} R \cdot CD =$$

$$= \frac{1}{2} (NR - ON) \cdot CD =$$

$$= \frac{1}{2} \left(4\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{3}}{3} \right) \cdot 4 =$$

$$= 2 \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$



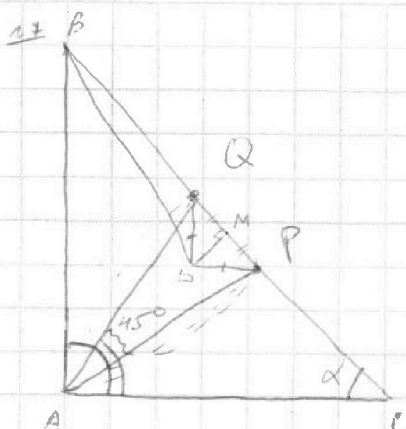
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☒

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Пусть $\alpha = 50^\circ \Rightarrow \angle BSA = \alpha$

$$\text{т.к. } \triangle AQC - \text{пр}, \angle QAC = \frac{180 - \alpha}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{т.к. } \triangle ABP - \text{пр}, \angle ABC = 90 - \alpha$$

$$\angle BAP = \frac{180 - 90 - \alpha}{2} = 45 + \frac{\alpha}{2}$$

2) Пусть $\angle QAP = \theta$

$$\text{тогда } \angle BAP + \angle QAC - \theta = 90^\circ$$

т.к. углы $\angle BAP$ и $\angle QAC$ накладываются друг на друга на величину угла θ

(они точно накладываются по мерку Δ :

$$AB + AC \geq BC$$

$$\angle Q + \angle P \geq \angle C$$



$$BP + CQ$$

накладываются друг на друга

друг на друга

друг на друга

друг на друга

друг на друга

друг на друга

друг на друга

друг на друга

друг на друга

друг на друга

друг на друга

друг на друга

друг на друга

друг на друга

друг на друга

друг на друга

друг на друга

друг на друга

друг на друга

друг на друга

друг на друга

друг на друга

$$\text{тогда } \theta = \angle BAP + \angle QAC - 90^\circ =$$

$$= 90 - \frac{\alpha}{2} + 45 + \frac{\alpha}{2} - 90 = 45^\circ$$

$$\angle QAP = 45^\circ,$$

а т.к. D равноудалена

от точек Q, P , и $\angle QAP = 2\angle QAR$



D - центр описанной

окр-ти $\triangle AQR$.

Значит серпер. к

отрезку AP , проходит

через точку D ,

но т.к. $\triangle BAP - \text{пр}$, то

сер. пер. к AP проходит

через вершину B

$\Rightarrow BD$ - бис-са, высота и медиана

$$\angle ABP \Rightarrow \angle ABP = \frac{\angle ABP}{2} = \frac{90 - \alpha}{2} =$$

$$= 20^\circ.$$

Ответ: 20°



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

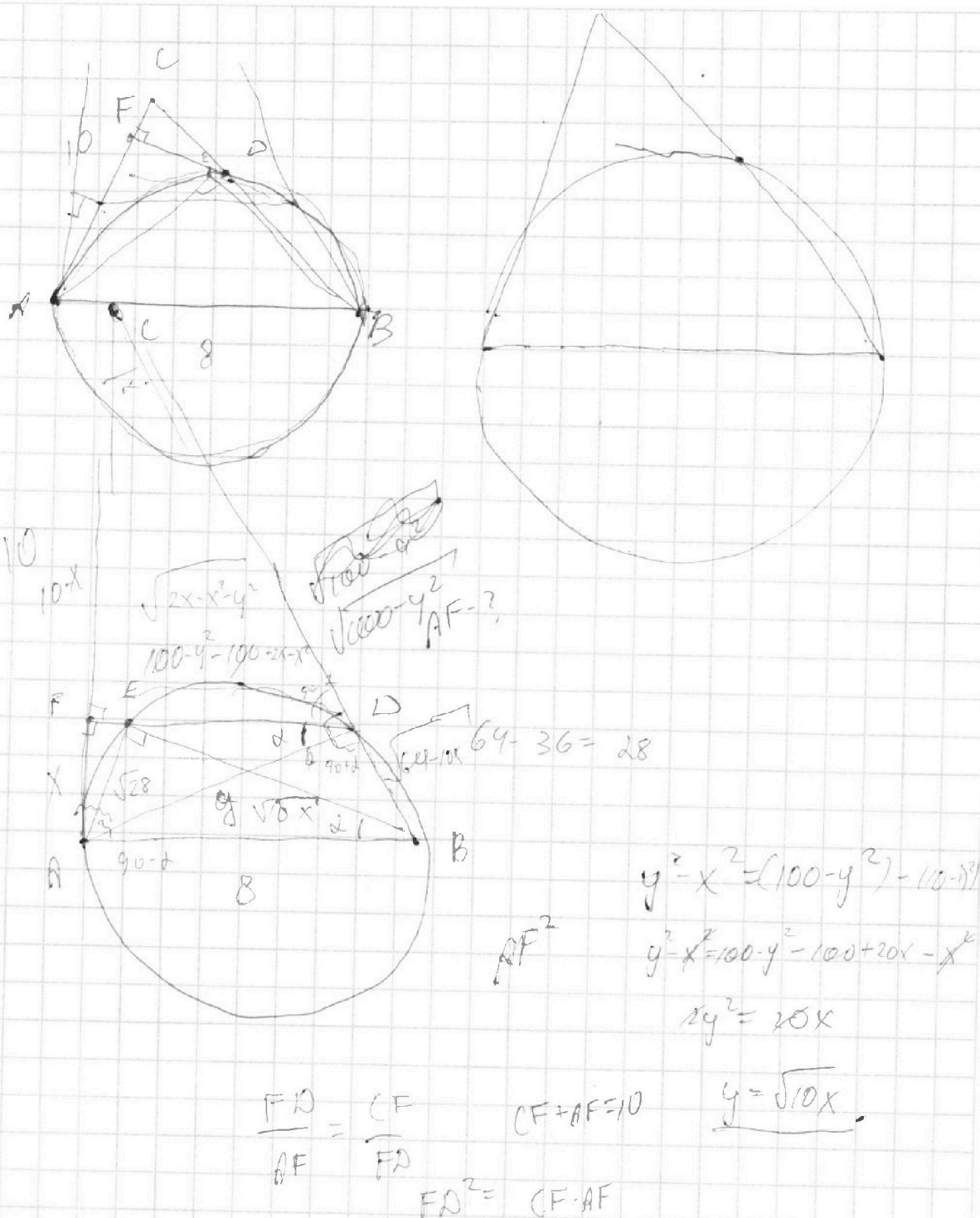
5
☐

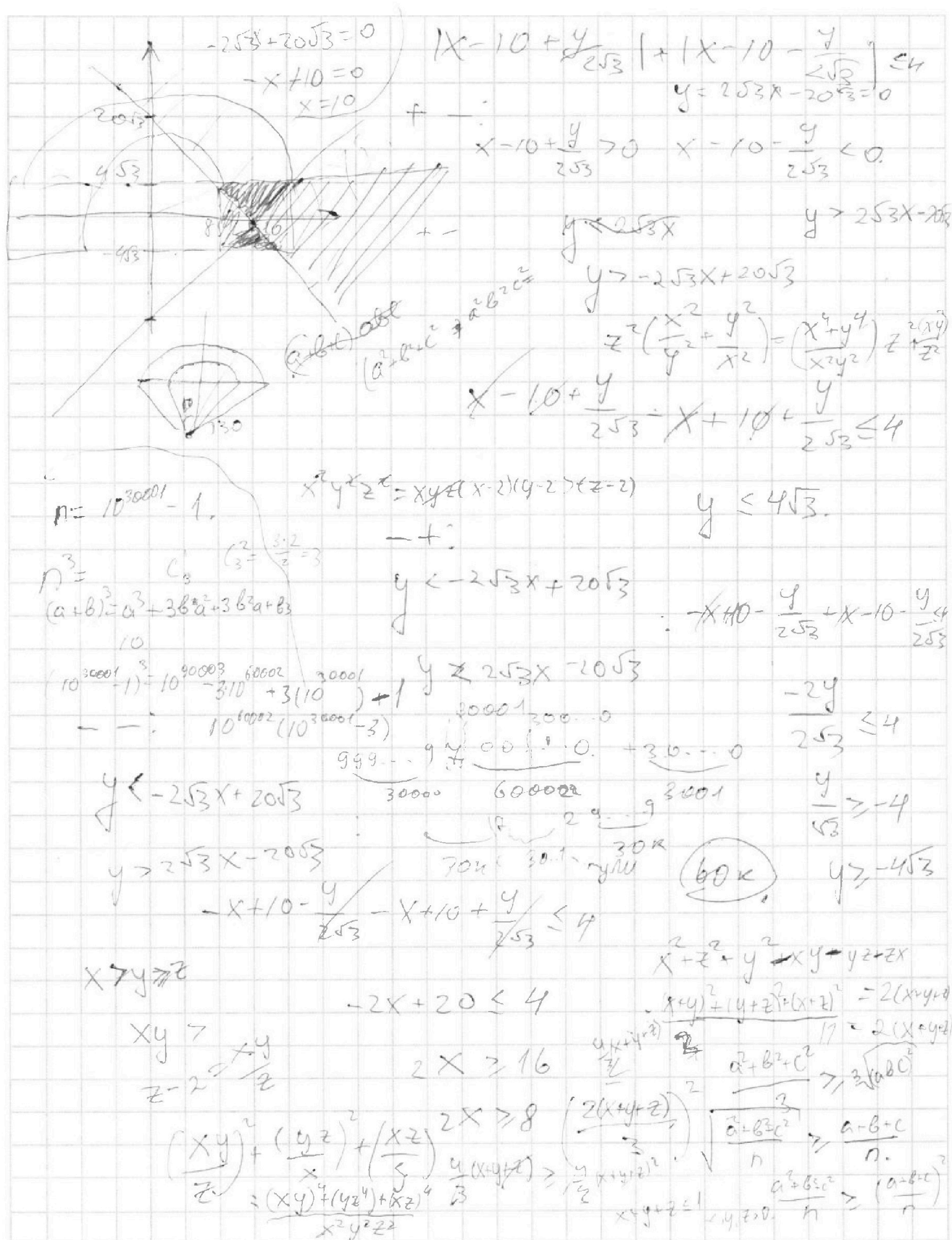
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





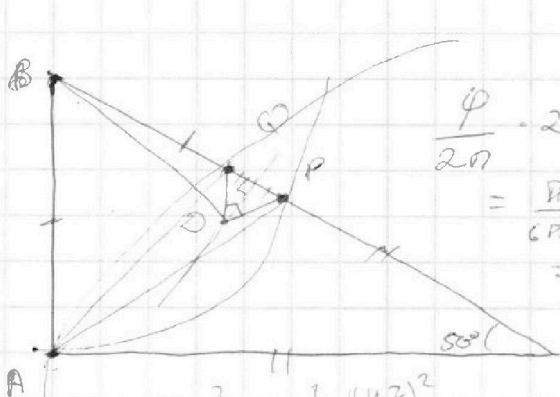


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.



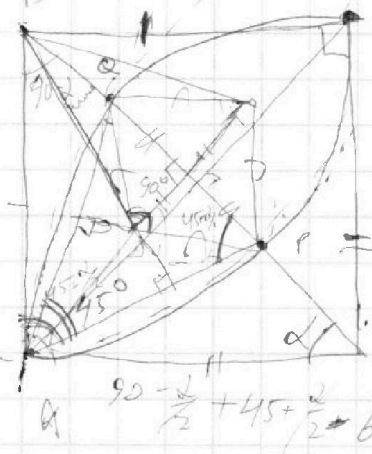
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{\varphi}{2n} = 2DR = \frac{16n\sqrt{3}}{6n} = \frac{16}{6}n\sqrt{3}$$

$$\frac{(xy)^2}{z} = \frac{(xz)^2}{y} = \frac{(yz)^2}{x} \Rightarrow x=y=z$$



$$\frac{180 - 90 + 2}{2} = 90 + \frac{2}{2}$$

α_1

$$X_1, X_2 \in \alpha_1 \cap (n-1)d,$$

$$X_1 = a_1 + sd$$

$$X_2 = a_1 + 6d$$

$$X_3 = a_1 + 3d$$

$$X_4 = a_1 + 8d$$

$$x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 4$$

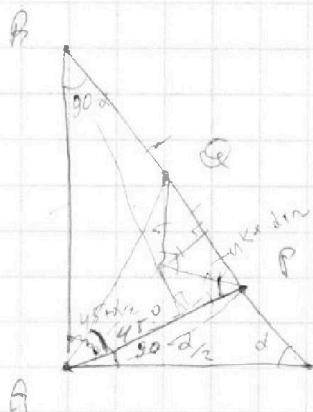
$$D = a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 4a^2 - 4a - 4$$

$$= a^4 - 4a^3 + 4a - 4$$

$$a^4 + 4 - 4a(a^2 - 1)$$

$$a^4 - 1 + 8 - 4(a^2 - 1)$$

$$(a^2 - 1)(a^2 + 1 - 4) + 8$$



$$\theta = 45^\circ$$
$$45 - \frac{2}{2} = 20^\circ$$

$$135 - \theta = 90$$

$$\theta = 45^\circ$$

