



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z - z^2, \\ yz = -6x - x^2, \\ zx = -6y - y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбрали точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. $x, y, z \neq 0$

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 & | -6z + 36 \\ yz = -6x + x^2 & | -6x + 36 \\ zx = -6y + y^2 & | -6y + 36 \end{cases}$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 - ? = a$$

Дополню левые части уравнений 3-го поимено квадрата $(x-6)^2$; $(y-6)^2$ и $(z-6)^2$

$$\begin{cases} xy - 6z + 36 = z^2 - 6z - 6z + 36 \\ yz - 6x + 36 = x^2 - 6x - 6x + 36 \\ zx - 6y + 36 = y^2 - 6y - 6y + 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy - 6z + 36 = (z-6)^2 \\ yz - 6x + 36 = (x-6)^2 \\ zx - 6y + 36 = (y-6)^2 \end{cases} \quad \text{Попарно вычту уравнения, тогда слева получится разность квадратов.}$$

$$\begin{cases} y(x-2) + 6(x-2) = (z-x)(z+x-12) \\ z(y-x) + 6(y-x) = (x-y)(x+y-12) \\ x(y-z) + 6(y-z) = (z-y)(z+y-12) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)(y+6) = (x-2)(12-(x+z)) \\ (y-x)(z+6) = (y-x)(12-(x+y)) \\ (y-z)(x+6) = (y-z)(12-(z+y)) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (x-2)((x+y+z)-6) &= 0 & x=2 & \text{ или } (x+y+z)=6 \\ (y-x)((x+y+z)-6) &= 0 & x=y & \text{ или } (x+y+z)=6 \\ (y-z)((x+y+z)-6) &= 0 & y=z & \text{ или } (x+y+z)=6 \end{aligned}$$

или $x=y=z$, или $x+y+z=6$

$$x^2 = -6x + x^2$$

$$x=0$$

Неверно, т.к. не можем получить 0 из условия.

Воспользуемся в итоге.

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 36$$

$$a = xy - 6z + yz - 6x + zx - 6y + 36 \cdot 3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 + 2^2 - 12x + 2^2 - 12y + 2y^2 = 36$$

$$3x^2 + 3y^2 + 3 \cdot 2^2 - 12x - 12y - 12 \cdot 2 = 36 \quad | :3$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2^2 - 4(x + y + 2) = 36 \\ x^2 + y^2 + 2^2 - 12(x + y + 2) + 36 \cdot 3 = a \end{cases}$$

Взяв из второго выражения первое.

$$-8(x + y + 2) = a - 36 \cdot 3 - 36$$

$$x + y + 2 = 6$$

$$-48 = a - 36 \cdot 3 - 36$$

$$a = 36 \cdot 4 - 48 = 96$$

Ответ: 96

$$\begin{array}{r} > 36 \\ & 4 \\ \hline & 144 \\ - & 144 \\ & 48 \\ \hline & 96 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N = \underbrace{999 \dots 999}_{20001 \text{ цифр}}$$

$$n^3 = ?$$

$$9^3 = 81 \cdot 9 = 729$$

$$99^3$$

$$\begin{array}{r} + 99 \\ 99 \\ \hline + 891 \\ 891 \\ \hline 9801 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 9801 \\ 99 \\ \hline + 88209 \\ 88209 \\ \hline 970299 \end{array}$$

$$999^3 = (9 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 9) (9 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 9) (9 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 9) = 9^3 (111)^3$$

$$9999^3 = (9 \cdot 1000 + 9 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 9) \dots 9^3 \cdot 1111^3$$

$$9^3 = 729$$

$$\underbrace{9 \dots 9}_{20001} = 9^3 (\underbrace{11 \dots 11}_{20001})^3$$

$$\begin{array}{r} + 11 \\ 11 \\ \hline + 121 \\ 121 \\ \hline + 1331 \\ 1331 \end{array}$$

При умножении
получим 111 9
меньше получим 9 +
или умножение на 9.

После чего

$$\text{будет } (\underbrace{11 \dots 11}_n)^3$$

$$\begin{array}{r} \times 11111 \\ 11111 \\ \hline 11111 \\ 11111 \\ \hline 11111 \\ 11111 \\ \hline 11111 \end{array}$$

$$\textcircled{1} 245543 \textcircled{1}$$

количество 4, значит
важно не 1, значит
значит в числе 6
минимум две двойки.

В таком
случае n или 2 при
умножении в сумме будет двойка
сдвиг на один разряд, то есть 2 будет
перенесено через разряд $\Rightarrow$ в числе 2
двойки.

$$\text{Answer: } 2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрю $\triangle ADC$ и его высоту DF :

$$\angle FDC = \angle OAE = \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{FC}{DF}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{DF}{AF}$$

Из $\triangle ADF$ и $\triangle AOC$

$$\angle OAE = 30^\circ - (30^\circ - \alpha) = \alpha = \angle FDC$$

Из $\triangle AOE$ по теореме синусов.

$$25 = 25 + 19 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{19} \cdot \cos \angle OAE$$

$$\cos \angle OAE = \frac{\sqrt{19}}{10}$$

$$\sin \angle OAE = \sqrt{1 - \cos^2 \angle OAE} = \frac{9}{10}$$

(или из $\triangle AOE$ — прямоугольного)

~~$DF = 25 - 19 = 6$~~

~~$AF = \frac{DF}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{6}{\frac{9}{\sqrt{19}}} = \frac{2}{3} \sqrt{19}$~~

~~$AC = \frac{AF}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2}{3} \sqrt{19}}{\frac{\sqrt{19}}{10}} = \frac{20}{3}$~~

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{9}{\sqrt{19}}$$

$$\frac{9}{\sqrt{19}} = \frac{20 - AF}{DF}$$

$$\frac{9}{\sqrt{19}} = \frac{DF}{AF}$$

$$DF = \frac{9AF}{\sqrt{19}}$$

$$\frac{9}{\sqrt{19}} \cdot \frac{9AF}{\sqrt{19}} = 20 - AF$$

$$\frac{81}{19} AF + AF = 20$$

$$\frac{28}{19} AF = 20$$

$$AF = \frac{19 \cdot 20}{28} = \frac{19 \cdot 5}{7} = \frac{95}{7}$$

$$\text{Ответ: } \frac{95}{7}$$

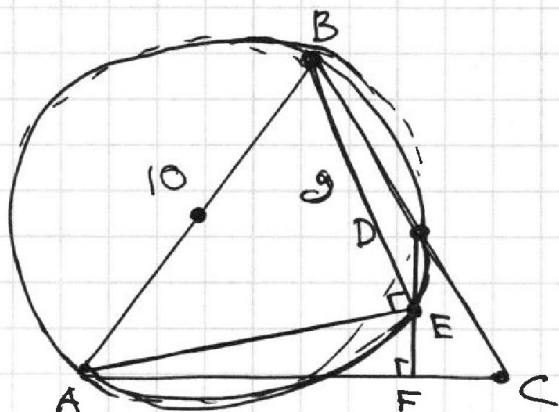


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

$\triangle ABC$ - остроугольный.

AB - диаметр.

$DF \perp AE$

$E \neq D$

$AE = 20$

$AB = 10$

$BE = 9$

AF - ?

Решение:

BE - хорда и

$\angle AEB$ - вписанный с AB диаметром

$\angle AEB = 90^\circ$, а $\triangle ABE$ - прямоугольный.

По теореме Пифагора.

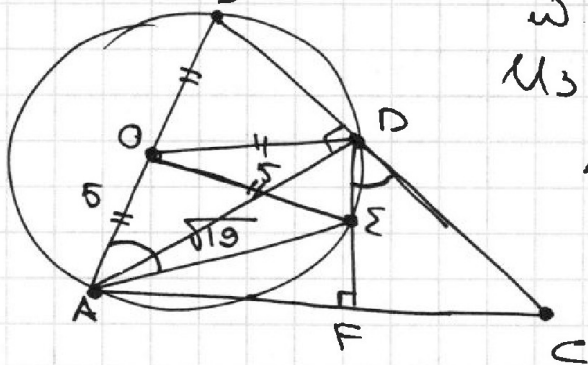
$$AB^2 = BE^2 + AE^2$$

$$100 = 81 + AE^2$$

$$AE = \sqrt{19}$$

Радиус окружности $R = \frac{AB}{2} = 5$

O - центр



Из $\triangle AOE$ по теореме косинусов.

$$AO^2 + OE^2 - 2 \cdot AO \cdot OE \cdot \cos \angle AOE = AE^2$$

$$25 + 25 - 2 \cdot 25 \cdot \cos \angle AOE = 19$$

$$50(1 - \cos \angle AOE) = 19$$

$$\cos \angle AOE = \frac{1 - 19}{50} = -\frac{18}{50}$$

$$= -\frac{9}{25}$$

$\triangle ABD$ - прямоугольный, т.к.

$\angle BDA$ - опирающийся на диаметр.

$\Rightarrow \angle ABC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

$\triangle BDE$ - вписанный четырехугольник $\Rightarrow$

$\angle BDE + \angle BAE = 180^\circ \Rightarrow \angle BDE + \angle CDE = 180^\circ$, т.к.

смежные $\Rightarrow \angle CDE = \angle BAE$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

④ Изначально у ведущего дилла и переходок. Вероятность собрать все 3 шарика, выходя 5 переходок.
 ~~C_5^3 - вероятность собрать 3 шарика за 5 переходок~~
 ~~C_n^3 - вероятность собрать 3 шарика за n переходок~~

u_1 - "шарик выкидывает при 5 переходках"

$$P(u_1) = \frac{C_5^3}{C_n^3} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

Изначально,
 u_2 - "шарик выкидывает при 9 переходках"

$$P(u_2) = \frac{C_9^3}{C_n^3} = \frac{84}{120} = \frac{7}{10}$$

$$\frac{P(u_2)}{P(u_1)} = \frac{84}{10} = 8.4$$

или $\frac{P(u_2)}{P(u_1)}$

$$\frac{P(u_2)}{P(u_1)} = \frac{C_9^3}{C_5^3} = \frac{84}{10} = 8.4$$

$$= \frac{6 \cdot 7}{5} = \frac{42}{5} = 8.4$$

Ответ: в 8,4 раза



1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

⑤ $x^2 - (a^2 - 4a)x + (a^2 - 6a + 4) = 0$

$x_1 = a_6 = a_0 + 5b$
 $x_2 = a_7 = a_0 + 6b$
 или эмпирически найдем (a_n)
 $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - (2a^3 + 6a + 15) = 0$
 $x_3 = a_5 = a_0 + 4b$
 $x_4 = a_8 = a_0 + 3b$

$x^2 - \frac{(a^3 - 4a^2)}{5}x - \frac{(2a^3 + 6a + 15)}{5} = 0$

↑
приведенное
обратное
уравнение.

По теореме Виетта: (для приведенного
обратного уравнения.)

$\begin{cases} a^2 - 4a = a_6 + a_7 \\ a^2 - 6a + 4 = a_6 \cdot a_7 \\ a^3 - 4a^2 = (a_5 + a_8) \cdot 5 \\ -(2a^3 + 6a + 15) = a_5 \cdot a_8 \cdot 5 \end{cases}$

$a_6 + a_7 = a_5 + a_8 =$
 $= 2a_0 + 11b.$

$a^2 - 4a = 2a_0 + 11b$
 $a(a^2 - 4a) = 5 \cdot (2a_0 + 11b)$

~~Выводим второе
уравнение~~

Если $a^2 - 4a \neq 0$ и $2a_0 + 11b \neq 0$, то

~~$(a^2 - 4a)(a - 1) = 5(2a_0 + 11b)$~~ $a = 5$

Если $a^2 - 4a = 0$, то $a = 0$ или $a = 4$

а! 4 Тогда: $x^2 - (16 - 16)x + (16 - 24 + 4) = 0$

$x^2 - 4 = 0 \quad x_{1,2} = \pm 2 \Rightarrow b = 4$ или

$x^2 - \frac{4 \cdot 0}{5}x - \frac{(2 \cdot 64 + 24 + 15)}{5} = 0 \quad b = -4$

$x^2 - \frac{128 + 24 + 15}{5} = 0$

$x \neq \pm 2 \Rightarrow a \neq 4$

$a \neq 0$, то

$x^2 + 4 = 0$

$x^2 \neq -4$, т.к. $x^2 \geq 0$

$a_0 = -\frac{11b}{2} \quad (b=4)$

$= -\frac{11 \cdot 4}{2}$

$= -22(10-4)$

$a_0 = 22$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a=5$$

$$x^2 - (25-20)x + (25-30+4) = 0$$

$$x^2 - 5x - 1 = 0$$

$$D=29$$

$$x_1 = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$$

$$x_2 = \frac{5-\sqrt{29}}{2}$$

$$b=\sqrt{29}$$

$$b=-\sqrt{29}$$

~~$$2 \cdot 125 + 30 + 15 = 280$$~~

$$5x^2 - 25(5-4)x - (2 \cdot 125 + 30 + 15) = 0$$

$$x^2 - 5x - (2 \cdot 25 + 6 + 3) = 0$$

$$x^2 - 5x - (59) = 0$$

$$D = 25 + 4 \cdot 59 = 261 = 3 \cdot 87 = 9 \cdot 29$$

$$x_3 = \frac{5+3\sqrt{29}}{2}$$

$$x_4 = \frac{5-3\sqrt{29}}{2}$$

$$3b=\sqrt{29}$$

$$3b=-\sqrt{29}$$

$$a_0 = \frac{5+\sqrt{29}}{2} - 5\sqrt{29} = 2,5 - 4,5\sqrt{29}$$

Других
a нет

$$a_0 = \frac{5+\sqrt{29}}{2} + 5\sqrt{29} = 2,5 + 5,5\sqrt{29}, \text{ верно.}$$

Ответ: $a=5$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6. \left| y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \right| + \left| y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \right| \leq 8$$

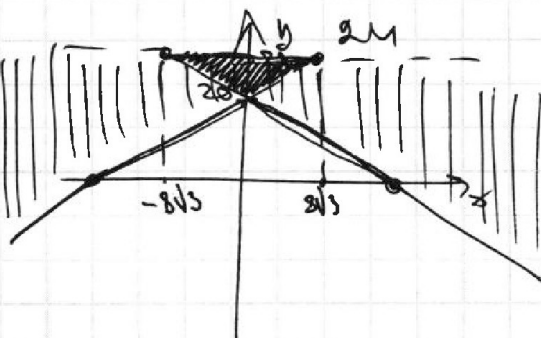
Решение F.

$$① \quad y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0$$

$$y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0$$

$$y \geq \frac{x}{2\sqrt{3}} + 20$$

$$y \geq -\frac{x}{2\sqrt{3}} + 20$$



Все внешние
прямые

$$2y - 40 \leq 8$$

$$y - 20 \leq 4$$

$$y \leq 24$$

$$\frac{x}{2\sqrt{3}} + 20 \leq 24$$

$$x \leq 8\sqrt{3}$$

$$-\frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8$$

$$\frac{x}{2\sqrt{3}} \geq -8$$

$$x \geq -8\sqrt{3}$$



Имеет
прямую
с отрицательным
наклоном
и внешнюю
с положительным

$$② \quad y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 0$$

$$y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 0$$

$$\frac{x}{2\sqrt{3}} + \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8$$

$$x \leq 8\sqrt{3}$$

$$y \geq -\frac{x}{2\sqrt{3}} + 20$$

$$y \leq \frac{x}{2\sqrt{3}} + 20$$

$$y = -\frac{x}{2\sqrt{3}} + 20$$

$$y = 0 \quad x = 40\sqrt{3}$$

Пересечение
с осью.

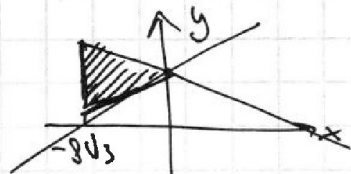
$$③ \quad y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} < 0$$

$$y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0$$

$$y < -\frac{x}{2\sqrt{3}} + 20$$

$$y \geq \frac{x}{2\sqrt{3}} + 20$$

почти равенство.



Имеет прямую
с отрицательным
наклоном, и внешнюю,
вместе с



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{-2x}{2\sqrt{3}} \leq 8$$

$$\frac{-x}{\sqrt{3}} \leq 8$$

$$\frac{-x}{\sqrt{3}} \leq 8$$

$$x \geq 8\sqrt{3}$$

$$\textcircled{a} \quad y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} < 0$$

$$y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} < 0$$

↙

$$-2y + 40 \leq 8$$

$$-2y \leq -32$$

$$y \geq 16$$

$$y = 16$$

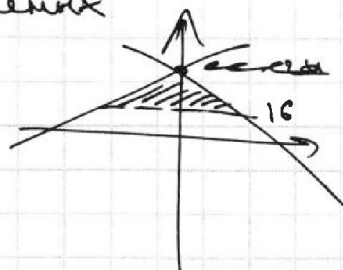
$$x_1 = 4 \cdot 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

$$x_2 = -8\sqrt{3}$$

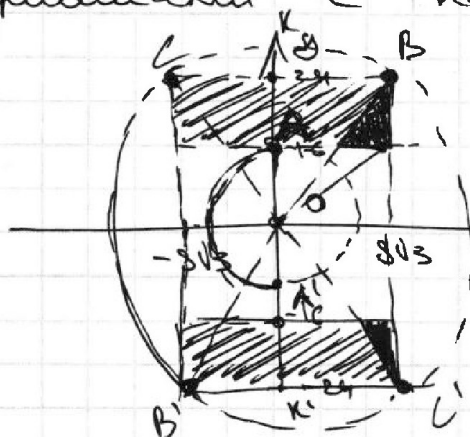
$$y < \frac{x}{2\sqrt{3}} + 20$$

$$y < -\frac{x}{2\sqrt{3}} + 20$$

имеем две прямые



Получается четырехугольник с вершинами с координатами (стрелочками)



Фигуру поворачивают на $\pi = 180^\circ$ (симметрично отражают относительно Ox)

Самое минимальное расстояние по которому может пройти окружность при повороте:
 $R_{\min} = 16 - 0 = 16 \Rightarrow$ Прямая ~~касается~~ ^{соединяет} центр окружности с вершиной A перпендикулярно BA .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 4

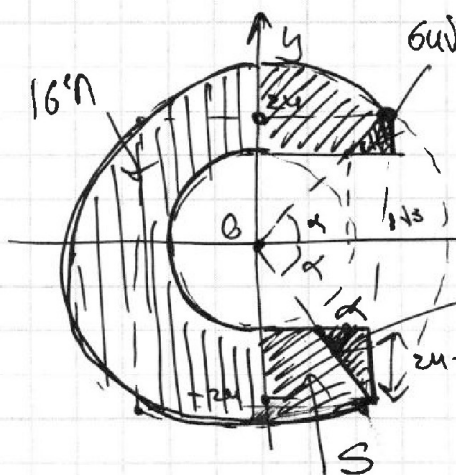
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найдём радиус SO по теореме Пифагора

прямоугольнике ROB $ROB = OB$

$OB = \sqrt{24^2 + (8\sqrt{3})^2}$ (по теореме Пифагора для $\triangle ROB$)

$$OB = \sqrt{8^2 \cdot 3^2 + 8^2 \cdot 3} = 8\sqrt{12} = 16\sqrt{3} \text{ (см)}$$



Сфера F
замечает разность
поверхностей между
сферическим шаром
и конусом.

Значит радиус
длина SO и O
вычисляется из теоремы
и получается $y = 16$.

Сферой с радиусом SO найдём

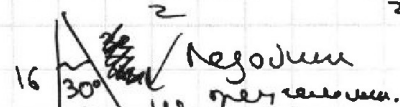
радиус SO и SO уменьшен
в SO и SO

$$\sin \alpha = \frac{24}{16\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{8 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\alpha = 60^\circ \Rightarrow$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{\text{прямоугольник}} = \sqrt{3} \cdot 8 \cdot 8 = 64\sqrt{3}$$

$$S_{\text{шар}} - S_{\text{шар}} = \frac{\pi}{2} (16^2 \cdot 3 - 16^2) = 16^2 \pi$$



Необходимо
решить.

радиус SO

$$S_1 = \frac{30^\circ \cdot 2\pi R^2}{360^\circ} - \frac{(16\sqrt{3})^2 \cdot \sin 30^\circ}{2} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{(16\sqrt{3})^2}{4} = \frac{\pi \cdot 16\sqrt{3}}{6} - \frac{(16\sqrt{3})^2}{4}$$

$$S_2 = \frac{24 + 16}{\sqrt{3}} \cdot 8 = \frac{40 \cdot 4}{\sqrt{3}}$$

$$S_3 = \left(\frac{40}{\sqrt{3}} - 24 \right) \cdot \frac{24}{\sqrt{3}} = 24^2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} S_F &= 16^2 n + 2 \cdot 64 \cdot \sqrt{3} + \frac{n \cdot 16 \sqrt{3}}{3} - \frac{(16 \sqrt{3})^2}{2} + \\ &+ \frac{8 \cdot 40}{\sqrt{3}} + \frac{24^2 (2 - \sqrt{3}) \cdot 2}{3} = \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \times 24 \\ 16 \\ \hline + 1844 \\ 24 \\ \hline 384 \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= n \left(256 + \frac{16}{\sqrt{3}} \right) + 128 \sqrt{3} - \frac{256 \cdot 3}{2} + \frac{8 \cdot 40}{\sqrt{3}} + 16 \cdot 24 (2 - \sqrt{3}) \\ &= n \left(256 + \frac{16}{\sqrt{3}} \right) + - \frac{256 \sqrt{3}}{2} - \frac{256 \cdot 3}{2} + \frac{320}{\sqrt{3}} + 768 = \\ &= n \left(256 + \frac{16}{\sqrt{3}} \right) - 256 \sqrt{3} - 128 \cdot 3 + \frac{320}{\sqrt{3}} + 768 = \\ &= n \left(256 + \frac{16}{\sqrt{3}} \right) - 256 \sqrt{3} + 384 + \frac{320}{\sqrt{3}} = \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \times 128 \\ 3 \\ \hline 384 \end{array}$$

Ответ:
$$\boxed{\frac{16}{\sqrt{3}} (n + 20) + 256 (n - \sqrt{3}) + 384.}$$

Orbit: 1°



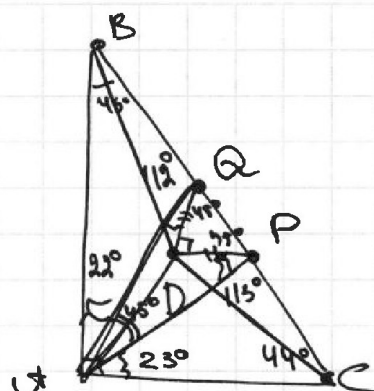
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:
 $\angle A = 90^\circ$
 $AB = BP$ ($P \in BC$)
 $AC = CQ$ ($Q \in BC$)
 $DP = DQ$.
 $\angle PDQ = 90^\circ$
 $\angle CDA = 46^\circ$
 Найти: $\angle DCB$

Решение:

Т.к. $BC > AB + AC$, то $Q \in BP$

$\triangle ABP$ и $\triangle ACQ$ — равнобедренные $\Rightarrow$
 углы при $\times$ основаниях равны:

$$\angle BAP = \angle APB = \frac{180^\circ - 46^\circ}{2} = \frac{134^\circ}{2} = 67^\circ$$

$$\angle CAQ = \angle AQC = \frac{180^\circ - (90^\circ - 46^\circ)}{2} = \frac{180^\circ - 44^\circ}{2} = \frac{136^\circ}{2} = 68^\circ$$

$$\angle CAQ + \angle BAP - \angle QAP = 90^\circ$$

$$\angle QAP = 68^\circ + 67^\circ - 90^\circ = 45^\circ$$

$$\angle PAQ = \angle CAQ - \angle QAP = 68^\circ - 45^\circ = 23^\circ$$

$$\angle BAQ = 90^\circ - \angle QAP - \angle PAQ = 90^\circ - 45^\circ - 23^\circ = 22^\circ$$

Из $\triangle PQR$ — равнобедренного и равнобедренного

$$\angle RPQ = \angle RQP = 45^\circ$$

$$1) \triangle APE : 180^\circ - 23^\circ - 44^\circ = \angle APC = 113^\circ$$

$$2) \triangle BAQ : 180^\circ - 46^\circ - 22^\circ = \angle AQB = 112^\circ$$

$$\angle BQD = 155^\circ - 112^\circ = 23^\circ$$

$$\angle QPC = 155^\circ - 113^\circ = 22^\circ$$

~~Видно, что $\angle PAQ = \angle QAP$ и $DP \perp AQ$ и т.д.~~
~~то $DP \parallel AB$~~
 ~~$QD \parallel BA$ и т.д.~~



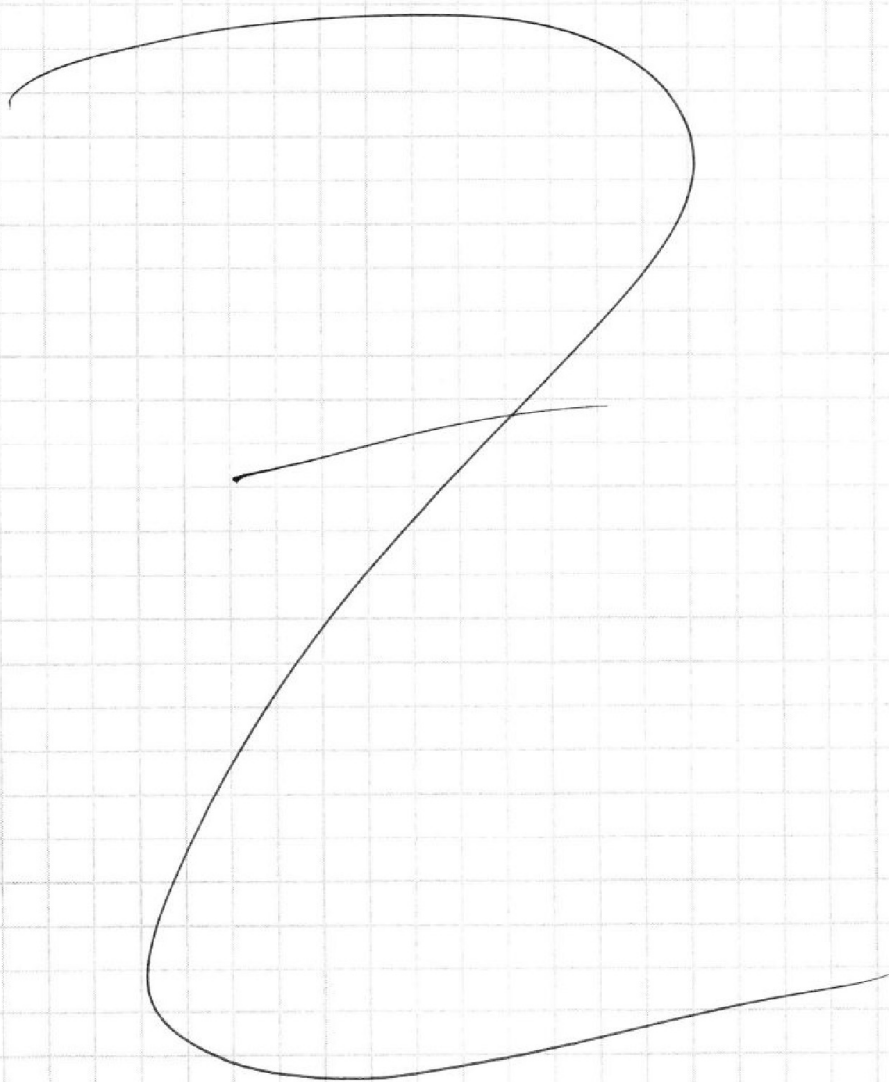
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6(z + x + y) - xy - yz - zx = 0$$

$$x(x-6-y) + y($$

Черновик.

$$xy - 6z + 36 = z^2 - 12z + 36$$

$$yz - 6x + 36 = x^2 - 12x + 36$$

$$zx - 6y + 36 = y^2 - 12y + 36$$

$$(z-6)^2 = xy - 6z + 36$$

$$(x-6)^2 = yz - 6x + 36$$

$$(y-6)^2 = zx - 6y + 36$$

$$z = 6 - (x+y)$$

$$y(6 - (x+y)) = -6x + x^2$$

$$6y - xy - y^2 = -6x + x^2$$

$$(6 - (x+y))x = -6y + y^2$$

$$6x - x^2 - xy = -6y + y^2$$

$$xy - 6x + yz - 6y + zx - 6z + 36 \cdot 3 =$$

$$= 0$$

$$x(y-6) + y(z-6) + z(x-6) + 36 \cdot 3 = 0$$

$$(x-2)(y-2) + 6(x-2) + 36$$

$$y(x-2) + 6(x-2) + 36$$

$$(y+6)(x-2) + 36$$

$$(2-x)(2+x-12) = (y+6)(x-2)$$

$$(x-2)(z+x+y-6) = 36$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 12y - 12z = 36$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 36$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 12y - 12z$$

$$+ 36 \cdot 3 = 0$$

$$36 - 2(x^2 + y^2 + z^2)(x-y)(x+y-12) = 2(y-x) + 6(x+y) + 36$$

$$22 - 45 = 2$$

$$22 - 16 = 6$$

$$22 - 7 \cdot 4 = -6$$

$$(x-y)(x+y+2-6) = 36$$

$$x-2 = x-y$$