



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замесла фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① $x, y, z \neq 0$

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 & (1) \\ yz = 3x + x^2 & (2) \\ zx = 3y + y^2 & (3) \end{cases}$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = ?$$

перемножим (1), (2) и (3): $x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = (3z + z^2) \cdot (3x + x^2) \cdot (3y + y^2) =$
 $= xzy \cdot (3+z)(3+x)(3+y)$

т.е. $x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = xyz \cdot (3+z)(3+x)(3+y) \quad | : xyz \text{ (т.к. } x, y, z \neq 0)$

$$\Rightarrow xyz = (3+z)(3+x)(3+y) = (9+3x+3z+xz)(3+y) = (27+9y+9x+3xy + 9z+3zy+3xz+xyz)$$

$$\Rightarrow xyz = 27 + 9y + 9x + 3xy + 9z + 3zy + 3xz + xyz$$

$$\Rightarrow -27 = 3xy + 3yz + 3xz + 9(x+y+z) \quad (*)$$

добавим (1) и 3: $3xy = 9z + 3z^2$

добавим (2) и 3: $3yz = 9x + 3x^2$

добавим (3) и 3: $3zx = 9y + 3y^2$

наберем в (*):

$$-27 = 3z^2 + 3x^2 + 3y^2 + 9(x+y+z) + 9(x+y+z)$$

$$-27 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 18 \cdot (x+y+z) \quad | : 3$$

$$-9 = x^2 + y^2 + z^2 + 6 \cdot (x+y+z) \quad (*1)$$

теперь преобразуем исходное выражение:

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 6z + 9 =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 6 \cdot (x+y+z) + 27 = -9 + 27 = 18$$

$$\text{из } (*1) \quad x^2 + y^2 + z^2 + 6 \cdot (x+y+z) = -9$$

$$\Rightarrow \text{исходное выражение равно } -9 + 27 = 18$$

Ответ: 18



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) $n = \underbrace{99999 \dots 999}_{40.000 \text{ цифр}}$

$n^3 - \text{коп-во цифр} - ?$
 $n = \underbrace{9999 \dots 999}_{40.000 \text{ цифр}} = 10^{80.000} - 1$, тогда $n^3 = (10^{40.000} - 1)^3 = 10^{120.000} - 3 \cdot 10^{80.000} + 3 \cdot 10^{40.000} - 1 =$

$= 10^{120.000} - 1 + 3 \cdot 10^{40.000} - 3 \cdot 10^{80.000}$

получим ~~10^{120.000} - 1~~ ~~3 \cdot 10^{40.000}~~ ~~3 \cdot 10^{80.000}~~ сколько цифр содержится в n^3 :

$n^3 = 10^{120.000} - 1 + 3 \cdot 10^{40.000} - 3 \cdot 10^{80.000}$

$\underbrace{999 \dots 9}_{120.000 \text{ цифр}}$

Вместе с ~~10^{120.000} - 1~~ и ~~3 \cdot 10^{40.000}~~ число $999 \dots 9$ число $3 \cdot 10^{80.000}$, тогда

число будет иметь вид $\underbrace{9 \dots 9996}_{120.000 \text{ цифр}} \underbrace{99 \dots 9999}_{80.000 \text{ цифр}}$

оставшиеся цифры $\downarrow$ 80.000 цифр
 $120.000 - 1 = 119.999$ цифр

Такое число будет содержать $120.000 - 1 = 119.999$ цифр
 Вспомогательные и полученные числа $3 \cdot 10^{40.000}$
 т.е. выполните операции $+ 9999 \dots 996 9999 \dots 9999 \dots 999$

тогда каждая 40.000 цифр сохраняется, далее,

когда мы к 9 добавим 3, то каждая цифра перейдет в

каждую цифру, как не дойдет до 6 (мы идём к концу)

как только дошли до 6, $6+1=7$, а далее идет оставшиеся

цифры, т.е. через цифру мы уже переходим к другим,

т.е. наше исходное число n^3 имеет вид:

~~9999 \dots 9996~~ $\underbrace{9999 \dots 997000 \dots 002999 \dots 9}_{120.000 - 80.000 = 40.000 \text{ цифр}}$

$\Rightarrow$ итого $40.000 + 39.999 = 79.999$ цифр

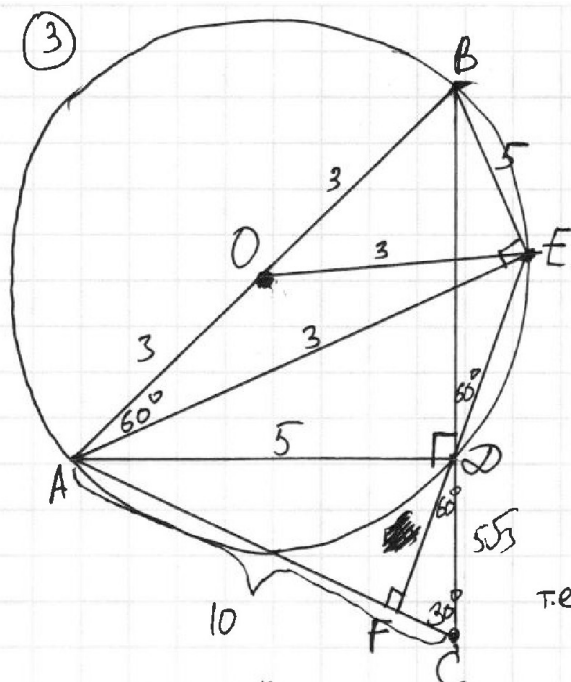
Ответ: 79.999 цифр



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



AB - диаметр окр ω

$\omega \cap BC = D$

$OD \perp AC$

$OD \cap \omega = E$

$AC = 10$

$AB = 6$

$BE = 5$

AF - ?

Пусть $T.O$ - центр окр., т.е. сеп. AB

$\Rightarrow AO = OB = 3$

т.к. AB - диаметр $\Rightarrow \angle AEB = 90^\circ$

$\Rightarrow$ по т. Пифагора для $\triangle ABE$:

$$AE = \sqrt{36 - 25} = 3$$

т.е. т.е. $\triangle AOE$ - р/с

($AO = OE = 3$ (радиусы))
и $AE = 3$)

$\Rightarrow \angle OAE = 60^\circ$. рассм. Опис. кр-к ABED: $\angle BAE = \angle BDE = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle BDE = 60^\circ$. т.е. $\angle FDC = \angle BDE = 60^\circ$ (верт.) (Опис. окр. кр. дугу дугу)

рассм. $\triangle FDC$: он прямоугол., $\angle FDC = 60^\circ \Rightarrow \angle DCA = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

т.к. $\angle AOB = 90^\circ$

(окр. кр. диаметр AB) $\Rightarrow \triangle AOC$ - прямоугол.

рассм. $\triangle ADC$: катет $\angle C$ в 30° имеет четв. равные гипотенузы

$\Rightarrow AD = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5 \Rightarrow$ по т. Пифагора для $\triangle ADC$:

$$\text{т.е. высота } DF = \frac{AD \cdot DC}{AC} = \frac{5 \cdot 5\sqrt{3}}{10} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{т.е. в } \triangle ADF \text{ по т. Пифагора } AF = \sqrt{25 - \frac{25 \cdot 3}{4}} = \sqrt{\frac{100 - 75}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow AF = \frac{5}{2}$$

$$\text{Ответ: } AF = \frac{5}{2}$$

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



④ $p(A)$ - вероятность выигрыша при открытии 5 коробок $p(B)$ - ?
 $p(B)$ - вероятность выигрыша при открытии 6 коробок $\frac{p(B)}{p(A)}$ - ?

пусть всего было x коробок.

исчисляем теперь $p(A)$: всего возможных исходов C_x^5
 (выберем пять коробок из x)
 тогда благоприятных

исходов $1 \cdot C_{x-3}^2$ ← способ, выбрать ещё 2 коробки

единственным способом
 выбираем три коробки, где лежат шарики

$$\Rightarrow p(A) = \frac{C_{x-3}^2}{C_x^5}$$

исчисляем теперь $p(B)$: всего возможных исходов C_x^6
 (выберем шесть коробок из x)

тогда благоприятных исходов $1 \cdot C_{x-3}^3$ ← способ, выбрать ещё 3 коробки
 единственным способом
 выбираем три коробки с шариками

$$\Rightarrow p(B) = \frac{C_{x-3}^3}{C_x^6}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{p(B)}{p(A)} &= \frac{C_{x-3}^3}{C_x^6} \cdot \frac{C_x^5}{C_{x-3}^2} = \frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{2 \cdot 3} \cdot \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \\ &= \frac{\frac{1}{2 \cdot 3}}{\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2 \text{ раз} \end{aligned}$$

Ответ: вероятность увеличилась
 в 2 раза



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(5) $x^2 - (a^2 - a) \cdot x + a - 5 = 0$ $x_1 = a_5 = a_3 + 2d$ $a_1 - a_5 \div d - \text{разность} \div$
 $x_2 = a_6 = a_3 + 3d$
 $4x^2 - (a^3 - a^2) \cdot x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ $x_1 = a_3$ $x_2 = a_8 = a_3 + 5d$

тогда у нас есть по т. Виета: ~~они должны быть:~~

система I уравн - $\begin{cases} a_3 + 2d + a_3 + 3d = a^2 - a \Rightarrow 2a_3 + 5d = a^2 - a & (1) \\ (a_3 + 2d)(a_3 + 3d) = a - 5 & (2) \end{cases}$
система II уравн - $\begin{cases} a_3 + a_3 + 5d = \frac{a^3 - a^2}{4} \Rightarrow 2a_3 + 5d = \frac{a^3 - a^2}{4} & (3) \\ a_3 + (a_3 + 5d) = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4} & (4) \end{cases}$

(2): $a_3^2 + 3a_3d + 2a_3d + 6d^2 = a^2 - a + 5$

(3): $a_3^2 + 5a_3d = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4}$ - подстав. в (2):

$\Rightarrow \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4} + 6d^2 = a^2 - a + 5$ (*)

приравняем (1) и (3): $a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4} \quad | \cdot 4 \Rightarrow 4a^2 - 4a = a^3 - a^2$

$a^3 - 5a^2 + 4a = 0$

$a \cdot (a^2 - 5a + 4) = 0$

$\begin{cases} a = 0 \\ a^2 - 5a + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 4 \\ a = 1 \end{cases}$ по т. Виета

проверим, существуют ли при таких a арифмет. прогрессия

подставим найденные a в (*):

$a = 0: \frac{0 + 0 - 0 - 4}{4} + 6d^2 = -5 \Rightarrow 6d^2 = -4$ $\rightarrow$ $\uparrow$ убавляет не $\text{ис } < 0$

$a = 1: \frac{2 + 2 - 1 - 4}{4} + 6d^2 = -4 \Rightarrow \frac{1}{4} + 6d^2 = -4 \Rightarrow 6d^2 = -4 - \frac{1}{4} = -\frac{17}{4}$

$a = 4: \frac{2 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^2 - 4^6 - 4}{4} + 6d^2 = -1 \Rightarrow 2 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4 - 4^5 - 1 + 6d^2 = -1$

$\Rightarrow 6d^2 = 4^5 - 2 \cdot 4^3 - 2 \cdot 4 = 4(4^4 - 2 \cdot 4^2 - 2) = 4(256 - 2 \cdot 16 - 2) = 4 \cdot 222$

$\Rightarrow d^2 = \frac{4 \cdot 222}{6} = 4 \cdot 37 \Rightarrow d = \pm 2\sqrt{37}$

$\Rightarrow$ при $a = 4$ $\div$ существует

Ответ. $a = 4$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

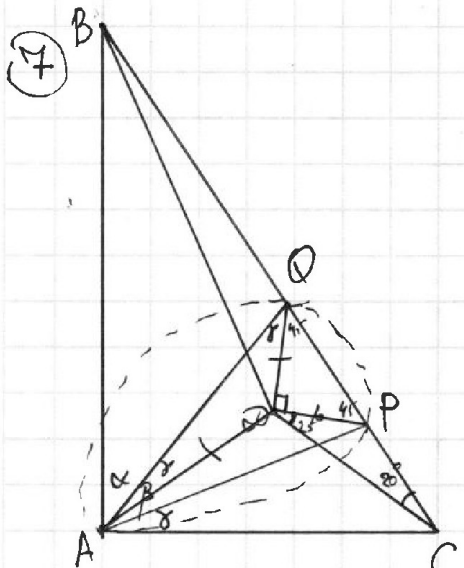
5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = BP$$

$$AC = CR$$

$$DP = DQ$$

$$\angle PDQ = 90^\circ$$

$$\angle DCB = 20^\circ$$

$$\angle DBC = ?$$

$$\text{пусть } \angle BAQ = \alpha, \angle QAP = \beta, \angle PAC = \gamma$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 90^\circ \Rightarrow \alpha + \gamma = 90^\circ - \beta$$

$$\text{т.к. } \triangle ABP - \text{р/б}, \Rightarrow \angle APB = \angle BAP = \alpha + \beta$$

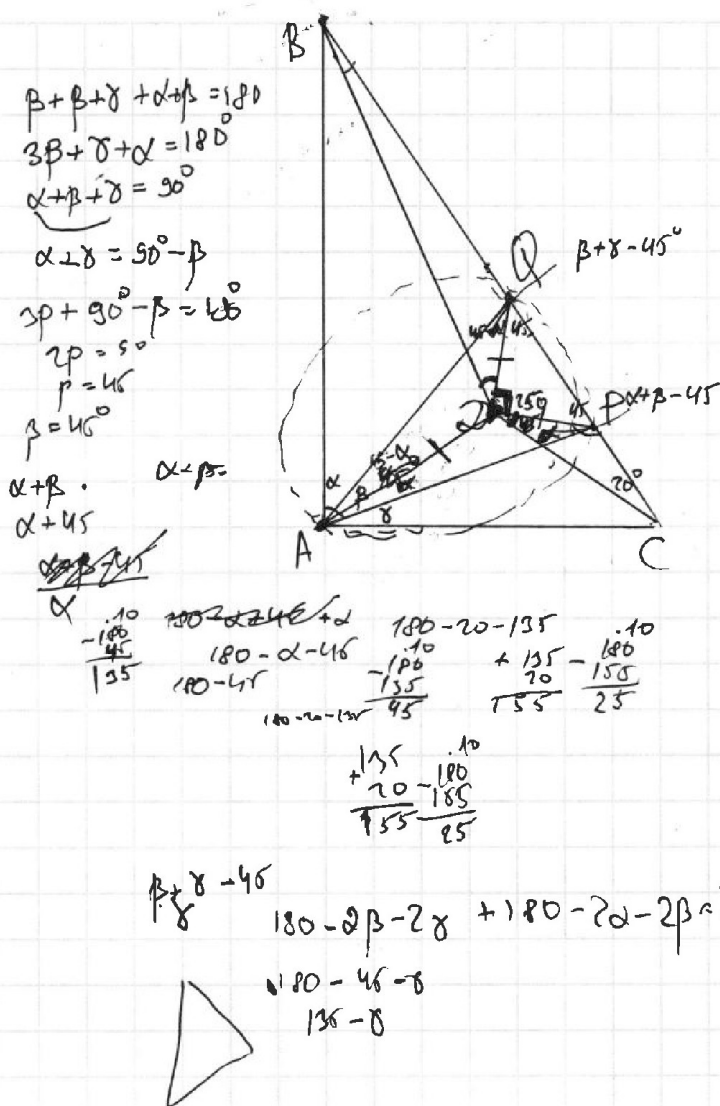
$$\text{т.к. } \triangle ACQ - \text{р/б}, \Rightarrow \angle AQC = \angle QAC = \beta + \gamma$$

$$\Rightarrow \text{в } \triangle AQP: \angle AQP + \angle PAQ + \angle APQ = \beta + \gamma + \beta + \alpha + \beta = 3\beta + \alpha + \gamma = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 3\beta + 90^\circ - \beta = 180^\circ; \quad 2\beta = 90^\circ \Rightarrow \beta = 45^\circ$$

$$\text{т.е. } \angle QPA = 45^\circ$$

Решим $\triangle AQP$: $\angle AQP = 45^\circ$, $\angle QAP = 90^\circ \Rightarrow \text{в } \triangle AQP$ т.е. $\triangle AQP$ — равнобедренный.
 (т.к. $\angle QAP = 45^\circ = \frac{1}{2} \angle QDP = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$) $\Rightarrow AQ = QP = QD$
 $\angle PQC = 180^\circ - 135^\circ - 20^\circ = 25^\circ$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

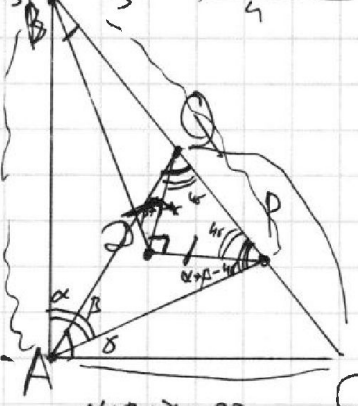
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 &= 0 & a_5 \text{ и } a_6 \\ 4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 &= 0 & a_3 \text{ и } a_8 \\ \text{т.д.} \begin{cases} (a_3 + 2d) \cdot (a_3 + 3d) = a - 5 \\ a_3 + 2d + a_3 + 3d = a^2 - a \end{cases} & \begin{matrix} a_3 + 2d & a_3 + 3d \\ a_3 & a_3 + 5d \end{matrix} \\ \begin{cases} a_3 + a_3 + 5d = \frac{a^3 - a^2}{4} \\ a_3 \cdot (a_3 + 5d) = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4} \end{cases} & \begin{matrix} a_3^2 + 5da_3 = \frac{a^3 - a^2}{4} \\ 2a_3 + 5d = \frac{a^3 - a^2}{4} \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2a_3 + 5d &= \frac{a^3 - a^2}{4} \\ 2a_3 + 5d &= \frac{a^3 - a^2}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3^2 + a_3 \cdot 3d + 2a_3 \cdot d + 6d^2 &= a_3^2 + 5a_3d + 6d^2 \\ a_3^2 + 5da_3 &= \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4} + 6d^2 = \frac{a - 5}{4} \end{aligned}$$



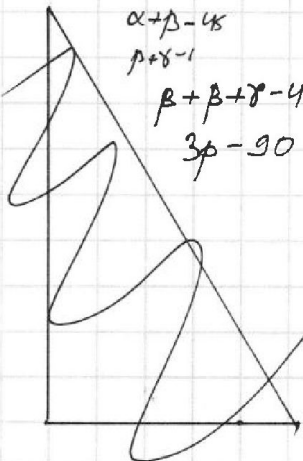
$$\alpha + \beta + \gamma = 90$$

$$\alpha + \beta = 45$$

$$\beta + \gamma = 45$$

$$\beta + \beta + \gamma - 45 + \alpha + \beta - 45$$

$$3\beta - 90 + \gamma + \alpha = 180$$



$$\begin{aligned} 2 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4 - 4^5 - 1 &= \\ 4 \cdot (4^4 - 2 \cdot 4^2 - 2) &= \\ 256 - 2 \cdot 16 - 2 &= \\ -256 &= \\ -224 &= \\ 224 &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2a_3 + 5d &= 16 - 4 = 12 \\ 3\beta + \gamma + \alpha &= 270 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \\ \left| -x + \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \\ (x - 5) \end{aligned}$$