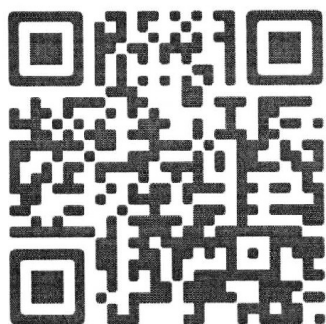




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В теленг্রে ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 & (1) \\ yz = 3x + x^2 & (2) \\ zx = 3y + y^2 & (3) \end{cases}$$

ищем решение при $x, y, z \neq 0$

Тогда:

$$\begin{aligned} (1) - (2): \quad xy - yz &= 3z + z^2 - 3x - x^2 \\ y(x - z) &= 3(z - x) + (z - x)(z + x) \\ 0 &= (z - x)(x + y + z + 3) \\ \begin{cases} z = x \\ x + y + z = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

Аналогично $(2) - (3)$ и $(3) - (1) \Rightarrow$ либо все равно $\Rightarrow \begin{cases} z = x \\ x = y \\ y = z \end{cases} \Rightarrow x = y = z$
либо хотя бы для одного $x + y + z = -3$

I случай) $x = y = z \rightarrow (1): x^2 = 3x + x^2$
 $0 = 3x \Rightarrow x = 0$, но по условию x ненулевое
 $\Downarrow$
противоречие

 $\Rightarrow$ из системы уравнений не получаем

II случай) $\xrightarrow{x+y+z=-3} (1)+(2)+(3) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = -3(x+y+z) = -3 \cdot (-3) = 9$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = (x+y+z)^2 = (-3)^2 = 9$$

$$\Rightarrow 3(xy + yz + zx) = 0 \Rightarrow xy + yz + zx = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

Тогда $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 3 \cdot 9^2 = 9 + 6(-3) + 27 = 18$

Ответ: 18



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Изначальное $\frac{n!}{5!(n-5)!}$ способов (выбрать) N_4 . Пусть есть n коробок. $\frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{2}$ из них вынимаем 1 и 2. 3 коробки - фиксированные с шариками, а остальные 2 - любые из тех оставшихся

$\Rightarrow$ Вероятность выигрыша $\frac{(n-3)(n-4)}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}} = \frac{5!}{2n(n-1)(n-2)} = M$

2) Из шести открытых коробок может быть

I) 3 шарика $\Rightarrow$ гарант. победа.

Способов вынуть 3 шарика из 6 коробок $\frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (n-3)(n-4)(n-5)}{3!}$

3 коробки - фиксированные с шариками, а другие 3 - любые из оставшихся

II) 2 шарика $\Rightarrow$ нужно вынуть 1 из $n-6$ коробок $\frac{1 \cdot 1 \cdot (n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{4!}$ * (н.к. 2 шарика есть)

* Всего способов выбрать 3 $\frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{3!} \Rightarrow$ вероятность $\frac{3!}{2(n-8)}$ 2 коробки фикс с шариками, а другие 4 - любые без шарика

III) 1 шарик $\Rightarrow$ нужно вынуть 2 шарика из $n-6$ коробок $\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{4!} \Rightarrow$ вероятность $\frac{4!}{2(n-8)(n-9)}$ (н.к. 1 шарик определен)

А способов выбрать 2 шарика $\frac{1 \cdot 1 \cdot (n-6)(n-7)}{2}$

А способов выбрать 1 шарик $\frac{1 \cdot (n-2) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (n-4)(n-5)(n-6)}{5!}$

IV) 0 шариков $\Rightarrow$ нужно вынуть 3 шарика из $n-6$ коробок $\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{5!} \Rightarrow$ вероятность $\frac{5!}{2(n-8)(n-9)(n-10)}$

Способ вынуть 0 шариков $\frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{6!}$

$\Rightarrow$ Общая вероятность победы. Всего способов выбрать 6 коробок $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6!}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4. (Продолжение)

⇒ Общая вероятность во II случае:

$$\begin{aligned} & \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{3!} + \frac{3!}{2(n-8)} \cdot \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{4!} + \frac{4!}{2(n-8)(n-9)} \cdot \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{5!} + \\ & \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6!} + \frac{5!}{2(n-8)(n-9)(n-10)} \cdot \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{6!} = \frac{1}{6} + \frac{n-6}{8(n-8)} + \frac{(n-6)(n-7)}{10(n-8)(n-9)} + \\ & \frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{12(n-8)(n-9)(n-10)} = N = \frac{A}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6!}} \end{aligned}$$

⇒ Вероятность выигрыша увеличилась в $\frac{N}{M}$ раз

$$\frac{N}{M} = \frac{\frac{A}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6!}}}{\frac{5!}{2n(n-1)(n-2)}} = \frac{A \cdot 6!}{5!} = 12A$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{6} + \frac{n-6}{8(n-8)} + \frac{(n-6)(n-7)}{10(n-8)(n-9)} + \frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{12(n-8)(n-9)(n-10)} = \frac{1}{6} + \frac{n-6}{2(n-8)} \left(\frac{1}{4} + \frac{n-7}{5(n-9)} + \frac{(n-8)(n-9)}{8(n-9)(n-10)} \right) = \\ &= \frac{1}{6} + \frac{n-6}{2(n-8)} \left(\frac{1}{4} + \frac{(n-7)(6n-60+5n-40)}{30(n-9)(n-10)} \right) = \frac{1}{6} + \frac{n-6}{2(n-8)} \left(\frac{15n^2 - 19 \cdot 15n + 15 \cdot 90 + 22n^2 - 2 \cdot 197n + 1400}{60(n-9)(n-10)} \right) = \\ &= \frac{37n^2 - (285 + 354)n + 2750}{60(n-9)(n-10)} \cdot \frac{n-6}{2(n-8)} + \frac{1}{6} = \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5. Пусть арифметическая прогрессия: $a_1 = b$
 $a_{n+1} = a_n + d$

1) $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ (1)

(ис. гла м.к. арифм. прогрессии нечетности, т.е. $d \neq 0$)
Корни - a_5, a_6 , т.е. $b+4d$ и $b+5d$

По теореме Виета $a_5 + a_6 = (a^2 - a) \Rightarrow 2b + 9d = -(a^2 - a) = a^2 - a$

2) $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ (2)

(ис. гла м.к. арифм. прогрессии нечетности т.е. $d \neq 0 \Rightarrow a_3 \neq a_8$)
Корни - a_3, a_8 , т.е. $b+2d$ и $b+7d$

По теореме Виета $a_3 + a_8 = (a^3 - a^2) \Rightarrow a^3 - a^2 = a^2 - a$

3) Заметим, что $a_5 + a_6 = b+4d + b+5d = 2b+9d = b+2d + b+7d = a_3 + a_8$

$\Rightarrow a^2 - a = a^3 - a^2$

$(a^2 - a)(1 - a) = 0$

$-a(a-1)^2 = 0$

$\begin{cases} a=1 & \text{I случай} \\ a=0 & \text{II случай} \end{cases}$

I случай: $a=1 \Rightarrow a^2 - a = a^3 - a^2 = 1 - 1 = 0$

(1): $x^2 - 5 = 0 \Rightarrow$ корни $\pm\sqrt{5} \Rightarrow |a_6 - a_5| = |d| = \sqrt{5} - (-\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}$

(2): $4x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow \left| \frac{a_8 - a_3}{5} \right| = |d| = 1 - (-1) = 2$

Но $2 \neq 2\sqrt{5}$
 $\Downarrow$
случ. не подходит

II случай: $a=0 \Rightarrow a^2 - a = a^3 - a^2 = 0$

(1): $x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow |a_6 - a_5| = |d| = 2 - (-2) = 4$

(2): $4x^2 + 2 + 2 - 1 - 4 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \left| \frac{a_8 - a_3}{5} \right| = |d| = \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 1$

Но $4 \neq 1 \Rightarrow$ случай не подх.

Оба возможных случая не подходят $\Rightarrow$ таких a не существует

Ответ: таких a не существует



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐

2 ☐

3 ☐

4 ☐

5 ☐

6 ☒

7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6

Нарисуем прямые

$$x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} = 0 \quad \text{и} \quad x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$y = -6\sqrt{3}x + 45\sqrt{3}$$

$$\Downarrow$$

$$y = 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3}$$

От пересек в точке:

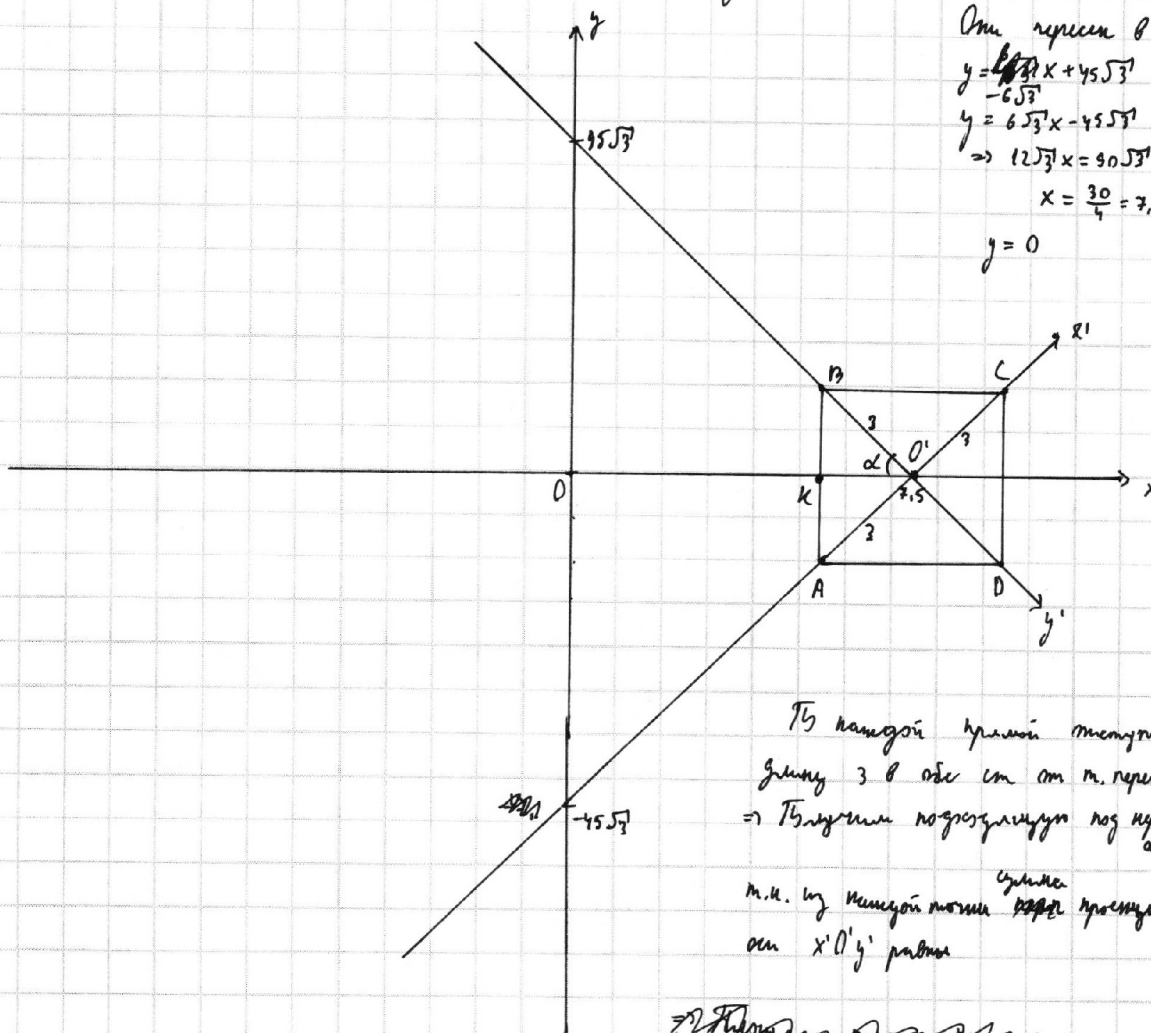
$$y = -6\sqrt{3}x + 45\sqrt{3}$$

$$y = 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 12\sqrt{3}x = 90\sqrt{3}$$

$$x = \frac{90}{12} = 7,5$$

$$y = 0$$



По каждой прямой построим
длины 3 в обе стороны от м. пересек.
 $\Rightarrow$ Построим прямоугольник по кр-во
симметрии

м.к. из каждой точки перес. проекции на
оси $x'O'y'$ равны

$\Rightarrow$ Построим параллельные прямые

$\Rightarrow$ Построим пар-м симметрии относительно Oх
(или пересек в середине) $\Downarrow$
прямоугол

$$AB = 2 \cdot 3 \sin \alpha = 2 \cdot 3 \cdot \frac{45\sqrt{3}}{\sqrt{7,5^2 + 45^2}} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{45\sqrt{3}}{\sqrt{7,5^2 + 36 \cdot 3}} = 36 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{109}}$$

$$BC = 2 \cdot 3 \cos \alpha = 2 \cdot 3 \cdot \frac{7,5}{\sqrt{7,5^2 + 45^2}} = \frac{6}{\sqrt{109}}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{6^2 \sqrt{3}}{109}$$

(К)

(См D)

При повороте будет $\frac{1}{4}$ площади от самой фигуры
м.к. по тем же правилам в обе стороны $\Rightarrow$ + S_{ABCD}



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6

$$OK = 7,5 - KO' = 7,5 - \frac{AB}{\sin \alpha} = 7,5 - \frac{3 \cos \alpha}{\sin \alpha} = 7,5 - \frac{3 \cdot 7,5}{7,5 \sqrt{1+3}} = 7,5 - \frac{3}{\sqrt{109}}$$

$$OC = \sqrt{7,5^2 + 3^2 - 2 \cdot 7,5 \cdot 3 \cos(180^\circ - \alpha)} = \sqrt{7,5^2 + 3^2 - 2 \cdot 7,5 \cdot 3 \frac{1}{\sqrt{109}}} = 3 \sqrt{2,5^2 + 1 - \frac{5}{\sqrt{109}}}$$

$$\Rightarrow S = \frac{-\pi \cdot OK^2 + \pi \cdot OC^2}{4} + S_{ABCD} = \frac{\pi \left(7,5^2 + \frac{9}{109} - \frac{9}{109} + 7,5^2 + 3^2 - \frac{2 \cdot 7,5 \cdot 3}{\sqrt{109}} \right)}{4} + \frac{6^2 \sqrt{3}}{109} =$$

$$= \frac{\pi \cdot 9 \cdot 108}{4 \cdot 109} + \frac{6^3 \sqrt{3}}{109} = \frac{9 \cdot 27 \pi}{109} + \frac{6^3 \sqrt{3}}{109} = \frac{243 \pi}{109} + \frac{216 \sqrt{3}}{109}$$

$$\text{Ответ: } \frac{243 \pi}{109} + \frac{216 \sqrt{3}}{109}$$

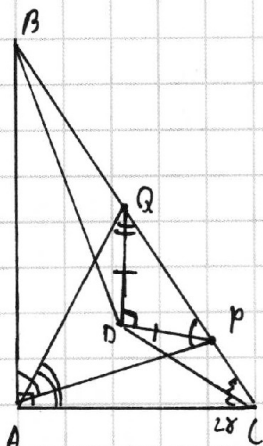


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



№7 $\triangle ABC$ - равнобедренный, Δ - перпендикуляр, m - точка

а) Пусть $\angle BCA = 28^\circ$

1) $CQ = CA \Rightarrow \triangle QCA$ - $\triangle$ (по определению)

$\Rightarrow$ По св-ву $\triangle$ $\angle AQC = \angle QAC$

Сумма углов $\Delta = 180^\circ \Rightarrow \angle AQC = \angle QAC = \frac{180^\circ - \angle QCA}{2} = 90^\circ - x$

2) $AB = BP \Rightarrow \triangle ABP$ - $\triangle$ (по определению)

$\Rightarrow$ По св-ву $\triangle$ $\angle BAP = \angle BPA$

Сумма углов $\Delta = 180^\circ$: в $\triangle ABC$ $\angle ABC = 180^\circ - 90^\circ - 28^\circ = 90^\circ - 28^\circ$

в $\triangle ABP$: $\angle BAP = \angle BPA = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2} = \frac{180^\circ - (90^\circ - 28^\circ)}{2} = 45^\circ + x$

3) $\angle BAP = 45^\circ + x \Rightarrow \angle PAC = \angle BAC - \angle BAP = 45^\circ - x$

$\Rightarrow \angle QAP = \angle QAC - \angle PAC = (90^\circ - x) - (45^\circ - x) = 45^\circ$

4) $\angle QDP = 90^\circ$ и $QD = DP \Rightarrow D$ - центр описанной окружности $\triangle QAP$ по теореме (т.к. по стороне QP в круге через ABC лишь одна т. является пересечением серединных перпендикуляров к QP и MT такое, что $\angle QDP$ задан (т.е. 90°) т.е. орт-на к QP или к диаметру)

$\Rightarrow$ По св-ву центра описанной орт-ны $\angle ADP = 2\angle AQP = 2(90^\circ - x) = 180^\circ - 2x = 180^\circ - \angle ACP$

$\Rightarrow$ По св-ву прилежащих угловых четырехугольника D лежит на описанной орт-не $\triangle APC \Rightarrow$ по св-ву этих углов, опирающихся на одну дугу $\angle PDC = \angle PAC = 45^\circ - x$

Аналогично т.к. $\angle ADQ = 2\angle APQ = 90^\circ + 2x = 180^\circ - \angle ABQ$, то D лежит на описанной орт-не $\triangle ABQ$ и $\angle BDQ = \angle BAQ$ по св-ву этих углов, опирающихся на одну дугу

5) $\Rightarrow$ в $\triangle BDC$: $\angle BDC = \angle BDQ + 90^\circ + \angle PDC = \angle BAQ + \angle PAC + 90^\circ = \angle BAC - \angle QAP + 90^\circ = 90^\circ - 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$

$\Rightarrow$ т.к. сумма углов $\Delta = 180^\circ$, то $\angle DBC = 180^\circ - \angle BDC - \angle DCB = 180^\circ - 135^\circ - 20^\circ = 25^\circ$

Ответ: 25°



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

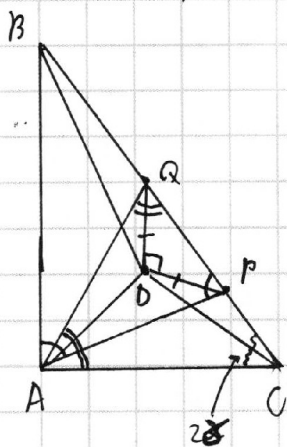
$$\begin{aligned} xy &= 3z + z^2 \\ yz &= 3x + x^2 \\ zx &= 3y + y^2 \end{aligned}$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 6z + 9 = 2(xy + yz + zx) - x^2 - y^2 - z^2 + 27$$

Тогда n коробок $\Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}$ способов у игрока и $\frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (n-3)(n-4)}{2}$ способов выигрыша

Тогда открытыми имеют коробки если попали шарик, то $\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{5!}$ способов и $\frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (n-7)(n-10)}{2}$ способов выигрыша
 если не попали, то

если все 3 попадания
 если 2, то
 если 1, то



$$\angle BCA = 2x \Rightarrow \angle CAQ = \angle AQC = 90^\circ - x$$

$$\angle ABC = 90^\circ - 2x \Rightarrow \angle BAP = \angle BPA = \frac{180^\circ - (90^\circ - 2x)}{2} = 45^\circ + x$$

$$\Downarrow \\ \angle PAC = 45^\circ - x$$

$$\Rightarrow \angle QAP = \angle QAC - \angle PAC = 45^\circ$$

$\angle QDP = 2\angle QAP$ и D лежит на ср перпенд к QP
 $\Rightarrow D$ — уг отн отн $\angle QAP$

$$\Rightarrow \angle ADP = 2\angle AQP = 180^\circ - 2x \Rightarrow D \in (APC)$$

$$\Downarrow \\ \angle PDC = \angle PAC$$

Аналогично $\angle BDR = \angle BAR \Rightarrow$ знаем $\angle BDC$ ~~не~~

$$= 90^\circ + \angle BAC - \angle QAP = 135^\circ$$

$\Downarrow$

$$\angle DBC = 180^\circ - 135^\circ - 20^\circ = 25^\circ$$

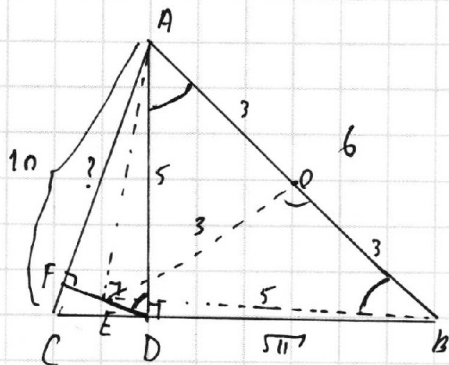


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AE^2 = 36 - 25 = 11 \Rightarrow AE = \sqrt{11}$$

E и D - точки симм-ки перпендикуляра к AB
 $\Rightarrow AD = EB = 5$, $BD = AE = \sqrt{11}$

$$9 + 9 - 2 \cdot 9 \cos \angle EOB = 25$$

$$18 \cos \angle EOB = -7$$

$$\cos \angle EOB = -\frac{7}{18}$$

$$\Rightarrow \cos \frac{\angle EOB}{2} = \cos \angle EOB + 1 = \frac{11}{18}$$

$$\cos \frac{\angle EOB}{2} = \frac{\sqrt{11}}{36} = \cos \angle ABC$$

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$

$$\text{Корни} = b + 2d, b + 3d \quad b + b + 2d + 3d = a^2 - a$$

$$4x^2 - (a^2 - a)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

$$\text{Корни} = b, b + 5d$$

$$\Rightarrow b + b + 5d = a^2 - a^2$$

$$\Rightarrow a^2 - a = a^3 - a^2$$

$$a(a^2 - a)(a - 1) = 0$$

$$a(a - 1)^2 = 0$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ a = 0 \end{cases}$$

$$I \quad x^2 - 5 = 0$$

$$\text{Корни} \pm \sqrt{5}$$

$$4x^2 - 4 = 0$$

$$\text{Корни} \pm 1$$

$$\begin{matrix} -1 & -\sqrt{5} & \sqrt{5} & 1 \\ \sin & \sin & \sin & \sin \end{matrix}$$

$$|разность| = 2\sqrt{5}, \text{ но } |1 - (-1)| \neq 5 - 2\sqrt{5}$$

$$II) \quad x^2 - 4 = 0$$

$$x = \pm 2$$

$$4x^2 + 2 + 2 - 1 - 4 = 0$$

$$4x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = \pm \frac{1}{2}$$



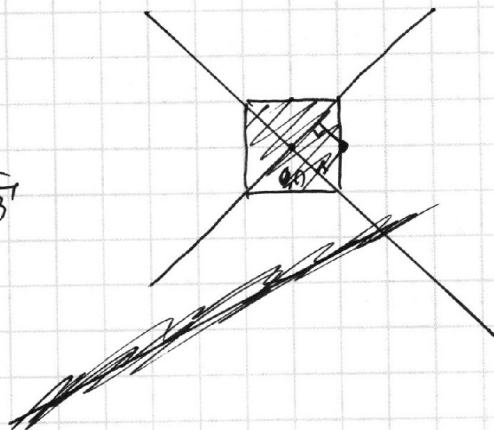
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

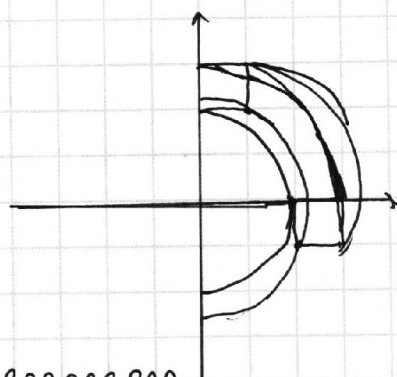
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x - \frac{15}{2} + \frac{2}{6\sqrt{3}}$$



$$|x| + |y| \leq 3$$



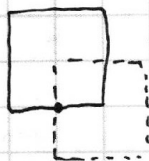
$$999^3 = (1000 - 1)^3 = 1000^3 - 3 \cdot 1000^2 + 3 \cdot 1000 - 1 = 997\,002\,999$$

$$99^3 = 970299$$

$$\begin{array}{r} \times 99 \\ 99 \\ + 891 \\ \hline 9801 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 9801 \\ 99 \\ + 88209 \\ \hline 970299 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2756 \overline{) 37} \\ 259 \\ \hline 180 \end{array}$$



$$(a - 5)(a - 10) = a^2 - 15a + 50$$

$$\frac{100\%}{1}$$

$$\frac{5!}{2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{1}{\frac{2}{7}} = 12A = \frac{2}{2} \Rightarrow A = \frac{2}{24}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(x-z) = 3(z-x) + (z+x)(z-x) \\ (z-x)(x+y+z+3) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ x+y+z = -3 \end{cases} \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = -3(x+y+z)$$

$$\frac{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}{2}$$

либо $x+y+z = -3$

либо

$$x = y = z$$

$$x^2 = 3x + x^2$$

$$3x = 0$$

не подходит

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 27$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 9$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = 9$$

$$\Rightarrow 3(xy + yz + zx) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

$$999 \dots 99$$

ВЗ

$$9^3 = 729$$

$$99^3 = (100-1)^3 = 100^3 - 3 \cdot 100^2 + 3 \cdot 100 - 1 = -$$

$$1000000$$

$$- 30000$$

$$+ 30000$$

$$- 300$$

$$+ 1$$

8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

