



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) \begin{cases} xy = -2z + z^2 \\ yz = -2x + x^2 \\ zx = -2y + y^2 \end{cases}$$

$$, x, y, z \neq 0.$$

$$(2)$$

система имеет решение при

$$(3)$$

$$x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0.$$

$$\text{Найти: } (x-z)^2 + (y-z)^2 + (z-z)^2.$$

$$(1)-(2): xy - yz = -2z + z^2 - x^2 + 2x$$

$$y(x-z) = 2(x-z) + (z-x)(z+x)$$

$$y(x-z) = 2(x-z) - (x-z)(z+x)$$

$$y(x-z) = (x-z)(z-z-x)$$

$$\text{Если } x \neq y, \text{ то } z = 0$$

$$yz = -z - x + z$$

подставим в (3):

$$zx = -2(-z-x+z) + (-z-x+z)^2$$

$$zx = 2z + 2x - 4 + (z+x-2)^2$$

$$zx = 2z + 2x - 4 + z^2 + x^2 + 4 + 2zx - 2z - 2x$$

$$z^2 + x^2 + zx = 0$$

$$z^2 + x^2 = -zx, \quad zx \leq 0$$

§ Аналогично (1)-(3) и (2)-(3) получаем

$$xz = -z - y + z, \quad z = -x - y + z$$

$$\text{Тогда } (x-z)^2 + (y-z)^2 + (z-z)^2 =$$

$$(-z - y + z - z)^2 + (-x - z + z - z)^2 + (-x - y + z - z)^2 =$$

$$(z+y)^2 + (x+z)^2 + (x+y)^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) 1) + (2):

$$xy + yz = z^2 + x^2 - 2z - 2x \quad | + 2xz$$

$$z^2 + x^2 + 2xz - xy - yz - 2z - 2x = 2xz$$

$$(z+x)^2 - y(z+x) - 2(z+x) = 2xz$$

$$(z+x)(z+x-y-2) = 2xz,$$

$$y = -x - z + 2$$

$$(z+x)(z+x - (-x - z + 2) - 2) = 2xz$$

$$(z+x)(z+x+x+z-2-2) = 2xz$$

$$(z+x)(2z+2x-4) = 2xz \quad | : 2$$

$$(z+x)(z+x-2) = xz$$

подставим в *:

$$z^2 + x^2 + (z+x)(z+x-2) = 0$$

$$z^2 + x^2 + z^2 + zx - 2z + xz + x^2 - 2x = 0.$$

то же самое, но нужно.

Рассмотрим A:

$$x^2 + yx + y^2 + x^2 + 2xz + z^2 + y^2 + 2yz + z^2,$$

$$2xy = -4zxz^2, \quad 2xz = -4y+y^2, \quad 2yz = -4x+x^2$$

$$x^2 - 4z + 2z^2 + y^2 + x^2 - 4y + 2y^2 + z^2 + y^2 - 4x + 2x^2 + z^2 =$$

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4z - 4x - 4y = 24S, \quad S \rightarrow \text{то, что можно}$$

$$\text{Решая, тогда } S = (x^2 + y^2 + z^2 - z - x - y)$$

тогда, если $x=y=z$, то $S=0$.

$$2x^2 + z^2 + y^2 - (-x - y + 2) - x - y = x^2 + z^2 + y^2 - 2.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n \in \mathbb{N}, \quad n = \overbrace{9999 \dots 99}^{30001 \text{ девяток}},$$

$$n = 9 \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^2 + \dots + 9 \cdot 10^{29999} + 9 \cdot 10^{30000}$$

$$n = 9(10^0 + 10^1 + 10^2 + \dots + 10^{29999} + 10^{30000})$$

$\{b_n\}$ — вставка геометрическая прогрессия, $b_1 = 10^0 = 1$, $q = 10$,
 $p = 30001$ членов

$$\sum_{k=1}^p b_k = \frac{b_1 \cdot (q^p - 1)}{q - 1} = \frac{1 \cdot (10^{30001} - 1)}{10 - 1} = \frac{1 \cdot (10^{30001} - 1)}{9}$$

$$n = 9 \cdot \sum_{k=1}^p b_k = 10^{30001} - 1.$$

$$n^3 = (10^{30001} - 1)^3 = (10^{30001})^3 - 3 \cdot (10^{30001})^2 \cdot 1 + 3 \cdot 10^{30001} \cdot (1)^2 - (1)^3 =$$

$$10^{90003} - 3 \cdot 10^{60002} + 3 \cdot 10^{30001} - 1.$$

1) $10^{90003} = \underbrace{10000 \dots 000}_{90003 \text{ нулей}}, \quad 3 \cdot 10^{60002} = \underbrace{3000000 \dots 000}_{60002 \text{ нуля}} = \underbrace{3000}_{30001 \text{ нулей}} \underbrace{000}_{60002 \text{ нуля}}.$

$$10^{90003} - 3 \cdot 10^{60002} = \underbrace{1000 \dots 000}_{30001 \text{ нулей}} \underbrace{000}_{60002 \text{ нуля}} = \underbrace{999 \dots 997}_{30000 \text{ девяток}} \underbrace{000}_{60002 \text{ нуля}}.$$

2) $(10^{90003} - 3 \cdot 10^{60002}) - 3 \cdot 10^{30001} + 1 =$

$$\underbrace{999 \dots 997}_{30000 \text{ девяток}} \underbrace{000}_{60002 \text{ нуля}} - \underbrace{3000}_{30001 \text{ нулей}} \underbrace{000}_{60002 \text{ нуля}} + 1 =$$

$$\underbrace{999 \dots 996}_{30000 \text{ девяток}} \underbrace{999}_{30001 \text{ нулей}} \underbrace{970}_{60002 \text{ нуля}} \dots 000 + 1 =$$

$$\underbrace{999 \dots 996}_{30000 \text{ девяток}} \underbrace{999}_{30001 \text{ нулей}} \underbrace{971}_{60002 \text{ нуля}} \dots 000$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3) (10^{90003} - 10^{60002} - 10^{30001}) - 10^{30000} \cdot 9^9 \cdot 10^{30001} \cdot 9^9$$

$$\begin{array}{r} 999 \dots 9996999 \dots 9700 \dots 000 \\ - 999 \dots 9996999 \dots 9699 \dots 999 \\ \hline 30000 \cdot 9^9 \quad 30000 \cdot 9^9 \quad 30001 \cdot 9^9 \end{array}$$

тогда получится в 10^3 всего $30000 + 30000 + 30001 = 90001$

Ответ: 90001

П.ч. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, то

$$2) (10^{90003} - 3 \cdot 10^{60002} + 3 \cdot 10^{30001} - 10^0) + 300 \dots 000$$

$$\begin{array}{r} 999 \dots 999700 \dots 000 \dots 000 \\ + 300 \dots 000 \\ \hline 999 \dots 999700 \dots 300 \dots 000 \end{array}$$

$30000 \cdot 9^9$ $1 \cdot 7^9$ $30000 \cdot 10^9$ $1 \cdot 3^9$ $30001 \cdot 10^9$

$$3) ((10^{90003} - 3 \cdot 10^{60002} + 3 \cdot 10^{30001}) - 10^{30000} \cdot 9^9 \cdot 10^{30001} \cdot 9^9) + 10^0$$

$$\begin{array}{r} 999 \dots 999700 \dots 00300 \dots 000 \\ - 999 \dots 999700 \dots 00299 \dots 999 \\ \hline 1 \end{array}$$

$30000 \cdot 9^9$ $1 \cdot 7^9$ $30000 \cdot 10^9$ $1 \cdot 2^9$ $30001 \cdot 10^9$

тогда получится в 10^3 всего $30000 + 30001 = 60001$.

Ответ: 60001

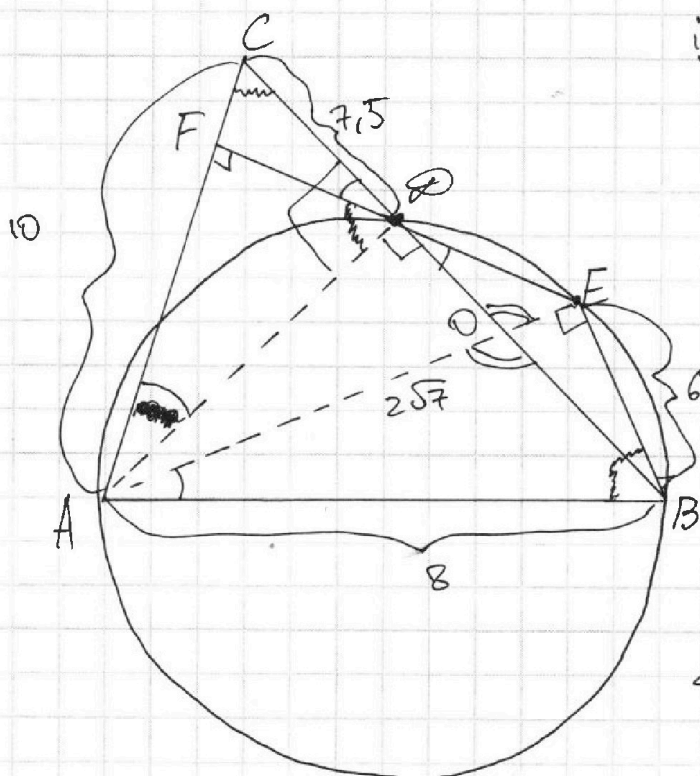


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Проведем AD , AE .
Тогда $AD \perp EB$ - вписанный
(все точки лежат на окружности по условию).
 $\angle CDF = \angle BDE$ как
вертикальные
 $\angle BDE = \angle BAE$ -
вписанные, опирающиеся
на EB .

Т.к. AB - диаметр, то
 $\angle ADB = \angle AEB = 90^\circ$.

Тогда $\triangle AEB \sim \triangle FDC$ по двум углам.

2) По теореме Пифагора в $\triangle AEB$:

$$AE^2 = AB^2 - BE^2 = 64 - 36 = 28 \Rightarrow AE = 2\sqrt{7}$$

пусть $O = AE \cap DB$. Тогда $\triangle AOB \sim \triangle EOD$ по двум углам
($\angle AOB = \angle EOD$ как вертикальные, $\angle EDO = \angle BAO$)
(см. п. 1).

Далее $AC \cap \omega = X$, и AC - касательная, т.е. в точках

скасания $\angle CAB = 90^\circ$ (как угол между касательной
и радиусом (диаметром)), а по условию $\triangle AEB$ - остроу-
глый.

$$\Rightarrow \angle ACD = 180^\circ - \angle CAD - \angle CDA = 180^\circ - \angle CAD - 90^\circ =$$

$$90^\circ - \angle CAD = \angle FDA = 180^\circ - \angle AFD - \angle FAD = 90^\circ - \angle FAD,$$

$$\angle CAD = \angle FAD.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{т.е. } \angle AED = \angle FDA \Rightarrow \angle FAD = \angle FDC.$$

$\Rightarrow \triangle AFD \sim \triangle FDC$ по двум углам.

и $\triangle AFD \sim \triangle FDC$ и $\triangle AEC$, т.к. DF - высота в $\triangle AEC$ - равнобедренной. и т.д. $\triangle AEB \sim \triangle FDC$, то

3) $\Rightarrow \triangle AEC \sim \triangle AEB$ по двум углам,

$$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CE}{EB} \Rightarrow CE = \frac{AC \cdot EB}{AB} = \frac{10 \cdot 6}{8} = \frac{60}{8} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2} = 7,5.$$

4) $\triangle CDF \sim \triangle BAE$ (см. п. 1)

$$\Rightarrow \frac{CD}{AB} = \frac{FC}{EB} \Rightarrow FC = \frac{CD \cdot EB}{AB} = \frac{7,5 \cdot 6}{8} = \frac{7,5 \cdot 3}{4} =$$

$$\frac{15 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{45}{8}$$

$$\text{тогда } AF = AC - FC = 10 - \frac{45}{8} = \frac{80}{8} - \frac{45}{8} = \frac{35}{8}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{35}{8}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть событие $B =$ "Игроку выиграли, открыв 7 коров" (после разрешения открыв 7 коров)
Замечание. Если не "открыв 7 коров" (зигзаг), то у игрока есть возможные (после изменения правил) открыв 7 коров. "

тогда, аналогично $P(B) = \frac{C_3^3 \cdot C_{n-3}^{7-3}}{C_n^7} =$

$$\frac{C_{n-3}^4}{C_n^7} = \frac{\frac{(n-3)!}{4!(n-7)!}}{\frac{n!}{7!(n-7)!}} = \frac{(n-3)!}{4!(n-7)!} \cdot \frac{7!(n-7)!}{n!} =$$

$$\frac{(n-3)! \cdot 7!}{4! \cdot n!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot (n-2)(n-1)(n)} = \frac{210}{4(n-1)(n-2)}$$

Разделим $P(B)$ на $P(A)$, тогда получим, насколько раз вероятности выигрыша увеличились:

$$\frac{P(B)}{P(A)} = \frac{210}{4(n-1)(n-2)} \cdot \frac{4(n-1)(n-2)}{60} = \frac{210}{60} = \frac{70}{20} = \frac{7}{2} = 3,5 \text{ раз}$$

Ответ: в 3,5 раза



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

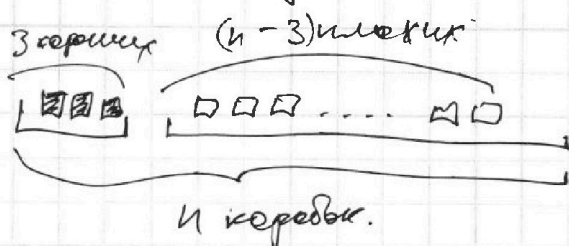
СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Поря QR-кода недопустима!

Пусть всего $n \in \mathbb{N}$ коробов.

Назовем коробки «хорошими», если в них есть шарик, и «плохими» — если нет (по условию всего хороших — 3 коробки).



Пусть событие $A \Leftarrow$ Игра выиграет, ^{выиграв 5 коробов} (то есть разрешенная игра ^{с участием 5 коробов} будет 7).

тогда $P(A) = \frac{C_3^3 \cdot C_{n-3}^{n-3}}{C_n^5}$, C_3^3 — комбинаторика

выбрав 3 хороших, $C_{n-3}^{n-3} = C_{n-3}^2$ — комбинаторика

выбрав 2 плохих и C_n^5 — общее количество

способов выбрать 5 коробов из n .

тогда $P(A) = \frac{1! \cdot 3! \cdot (n-3)!}{3! \cdot 0! \cdot 2! \cdot (n-3-2)!} = \frac{n!}{4 \cdot 2! \cdot (n-3-2)!}$

$$\frac{(n-3)!}{2! \cdot (n-3-2)!} \cdot \frac{5! \cdot (n-5)!}{n!} = \frac{(n-3)! \cdot 5!}{2! \cdot n!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{4 \cdot 2 \cdot (n-1)(n-2)n} = \frac{60}{(n-2)(n-1)n}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Вс~~
~~Глобальная задача~~

* - ** : $d - d = (a^2 - 2a - 2a_6) - \left(\frac{a^3 - 2a^2}{3} - 2a_6 \right)$

$0 \approx a^2 - 2a - 2a_6 - \frac{(a^3 - 2a^2)}{3} + 2a_6$

$\frac{a^3 - 2a^2}{3} = a^2 - 2a \quad | \cdot 3$

$a^3 - 2a^2 = 3(a^2 - 2a)$

$a^2(a - 2) - 3(a^2 - 2a) = 0$

$a^2(a - 2) - 3a(a - 2) = 0$

$(a^2 - 3a)(a - 2) = 0$

$\begin{cases} a^2 - 3a = 0 \Leftrightarrow a(a - 3) = 0 \Leftrightarrow a = 0, a = 3 \\ a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2 \end{cases}$

Ответ: $a = 0, a = 2, a = 3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) Рассмотрим Виета для (2):

$$\begin{cases} a_4 \cdot a_9 = \frac{6-a^5}{3} \rightarrow 6-a^5 = 3a_4 a_9 \\ a_4 + a_9 = \frac{a^3 - 2a^2}{3} \end{cases} \quad a^3 - 2a^2 = 3a_4 + 3a_9 = 3(a_4 + a_9)$$

$$D = (a^3 - 2a^2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \left(\frac{6-a^5}{3}\right) \cdot 3 \cdot \left(\frac{a^3 - 2a^2}{3}\right) =$$

$$\begin{aligned} & (3(a_4 + a_9))^2 - 12 \cdot 3a_4 a_9 = 9(a_4^2 + 2a_4 a_9 + a_9^2) - \\ & - 36a_4 a_9 = 9a_4^2 + 18a_4 a_9 + 9a_9^2 - 36a_4 a_9 = \\ & 9a_4^2 - 18a_4 a_9 + 9a_9^2 = (3a_4 - 3a_9)^2 \end{aligned}$$

Раз прогрессия возрастает ($a_7 > a_6$), то $a_9 > a_4$

$$a_4 = \frac{a^3 - 2a^2 + 3a_4 - 3a_9}{6}, \quad a_9 = \frac{a^3 - 2a^2 + 3a_9 - 3a_4}{6}$$

$$a_4 + 5d = a_9, \quad a_4 = \frac{a^3 - 2a^2 + 3a_4 - 3(a_4 + 5d)}{6} \Rightarrow a_4 = \frac{a^3 - 2a^2 - 15d}{6} \quad | \cdot 6$$

$$6a_4 = a^3 - 2a^2 - 15d$$

$$6a_4 = a^3 - 2a^2 - 15d \quad \Rightarrow \quad 15d = a^3 - 2a^2 - 6a_4, \quad a_4 = a_6 - 2d.$$

$$15d = a^3 - 2a^2 - 6(a_6 - 2d)$$

$$15d = a^3 - 2a^2 - 6a_6 + 12d$$

$$3d = a^3 - 2a^2 - 6a_6 \quad | : 3$$

$$d = \frac{a^3 - 2a^2}{3} - 2a_6$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0, \quad x_1 = a_6, \quad x_2 = a_7$$

$$(2) 3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0, \quad x_3 = a_4, \quad x_4 = a_3,$$

где $\{a_n\}$ - арифметическая прогрессия, a_n - целое, $n \in \mathbb{N}$.

1) По теореме Виета для (1):

$$\begin{cases} a_6 \cdot a_7 = a^2 - a - 7 \\ a_6 + a_7 = a^2 - 2a \end{cases}$$

$$\Delta = (a^2 - 2a)^2 - 4(a^2 - a - 7) = a^4 + 4a^2 - 4$$

$$(a_6 + a_7)^2 - 4a_6a_7 = a_6^2 + a_7^2 + 2a_6a_7 - 4a_6a_7 =$$

$$a_6^2 + a_7^2 - 2a_6a_7 = (a_6 - a_7)^2.$$

$$x_1 = \frac{a^2 - 2a + a_6 - a_7}{2}$$

1) если $a_7 > a_6$, то

$$a_6 = \frac{a^2 - 2a + a_6 - a_7}{2}, \quad a_7 = \frac{a^2 - 2a + a_7 - a_6}{2}$$

$a_7 = a_6 + d$, d - разность $\{a_n\}$, $a_6 = a_7 - d$

$$a_6 = \frac{a^2 - 2a + a_6 - a_6 - d}{2}, \quad a_7 = \frac{a^2 - 2a + a_7 - (a_7 - d)}{2}$$

$$a_6 = \frac{a^2 - 2a - d}{2}, \quad a_7 = \frac{a^2 - 2a + d}{2}$$

верно.

$$2a_6 = a^2 - 2a - d$$

$$d = a^2 - 2a - 2a_6$$

$$2) \text{ если } a_7 < a_6, \text{ то } a_6 = \frac{a^2 - 2a + a_6 - a_7}{2}, \quad a_7 = \frac{a^2 - 2a + a_7 - a_6}{2}$$

$$a_7 = \frac{a^2 - 2a + a_7 - a_6}{2} \rightarrow \text{абсолютно идентично п. 1}$$

без ограничения общности будем считать, что $a_7 > a_6$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle = 180^\circ - 70^\circ - 50^\circ$$

$\angle APC = 180^\circ - \angle APQ = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ по свойствам смежных углов

$$\text{тогда } \angle PAC = 180^\circ - \angle APC - \angle ACP = 180^\circ - 110^\circ - 50^\circ = 20^\circ.$$

$$\angle CAQ = 65^\circ = \angle QAP + \angle PAC = 20^\circ + \angle QAP$$

$$\Rightarrow \angle QAP = 65^\circ - 20^\circ = 45^\circ$$

$$\text{тогда } \angle BAQ = \angle BAP - \angle QAP = 70^\circ - 45^\circ = 25^\circ$$

4) Пусть $O = AQ \cap BD$.

$$\angle BQO = 180^\circ - \angle OQP = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$$

Проведем OC и OA — медианы $\triangle OAP$ (M — середина QP)

тогда: 1) $QQD'P$ — квадрат (т.к. $QD \perp QD'$ и $\angle QDP = \angle QD'P = 90^\circ$).

2) ~~Важная особенность~~

$$\angle AOP = \angle MOP = 45^\circ = \frac{1}{2} \angle QDP$$

$$\text{тогда } \angle AOP = 180^\circ - \angle BAP = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ.$$

Заметим, что $\angle AOP = \angle APC = 110^\circ \Rightarrow$ $\triangle OAP \sim \triangle PCP$ по признаку (ш.п.3)

$\triangle OPC$ — равнобедренный и $\angle COP = \angle CAP = 20^\circ$ (анал. на $\triangle AOP$)

5) Аналогично $\angle AOP = \angle BQA = 115^\circ$ и $BQOA$ — равнобедренный. Тогда $\angle BOQ = \angle BAQ = 25^\circ$ (аналогично на $\triangle AOP$)

$$\Rightarrow \angle OBQ = 180^\circ - \angle BQO - \angle BOQ = 180^\circ - 115^\circ - 25^\circ = 20^\circ$$

Ответ: 20°

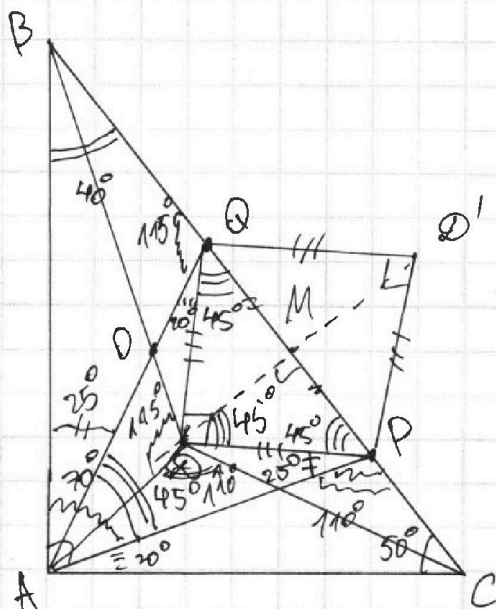


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = BP, AC = CQ.$$

точка D внутри $\triangle ABC$
расположена симметрично
образом, т.е. подобно $\triangle PQR$,
с.о. д.г.т.с. линия на
срединном перпендику-
ляре к QR , причем
 $\angle PQR = 30^\circ$ (те же
точки D будут $\rightarrow$
одна по разному сторона
от QR).

1) Т.к. $\angle BCA = 50^\circ$, то $\angle ABC = 90^\circ - \angle BCA = 40^\circ$, т.е. $\triangle ABC$ - прямоугольный.

Т.к. $\triangle QPR$ прямоугольный и равнобедренный, то
 $\angle QRP = \angle PRQ = 45^\circ$

2) Соединим AP . Т.к. $AB = BP$, то $\triangle ABP$ - равнобедренный

$$\angle BAP = \frac{180^\circ - \angle ABP}{2}, \text{ т.к. } \angle BAP = \angle BPA$$

$$\angle BAP = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ = \angle BPA.$$

$$\text{тогда } \angle APQ = \angle BPA - \angle QPR = 70^\circ - 45^\circ = 25^\circ$$

3) Соединим AQ . Т.к. $AC = CQ$, то $\triangle ACQ$ - равнобедренный

$$\angle CAQ = \angle AQC = \frac{180^\circ - \angle BCA}{2} = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2}$$

$$\frac{130^\circ}{2} = 65^\circ. \text{ Тогда: } \angle AQP = \angle AQC - \angle QRP =$$

$$65^\circ - 45^\circ = 20^\circ, \text{ т.к. } \angle PAC = 180^\circ - \angle APQ - \angle PCA =$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

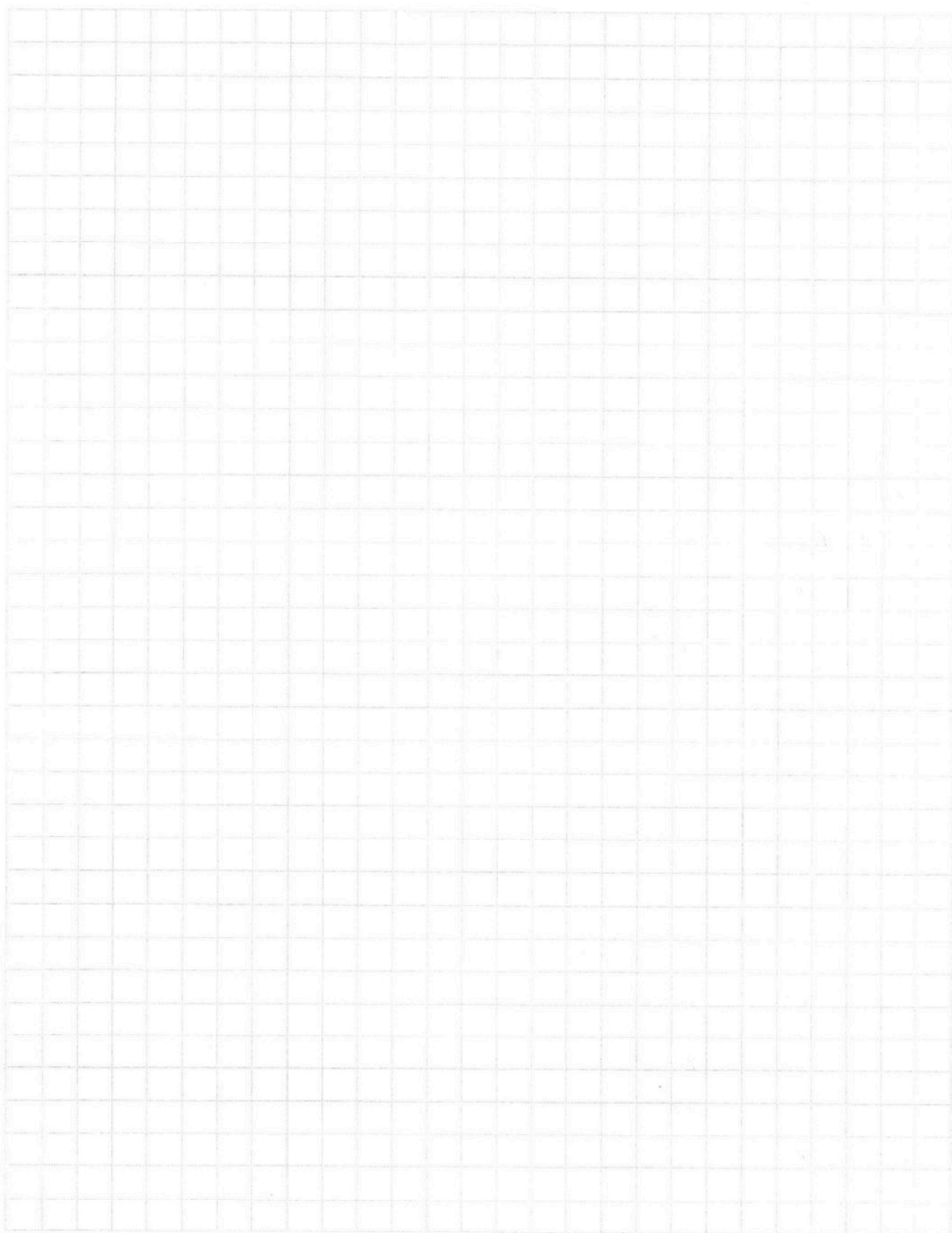
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



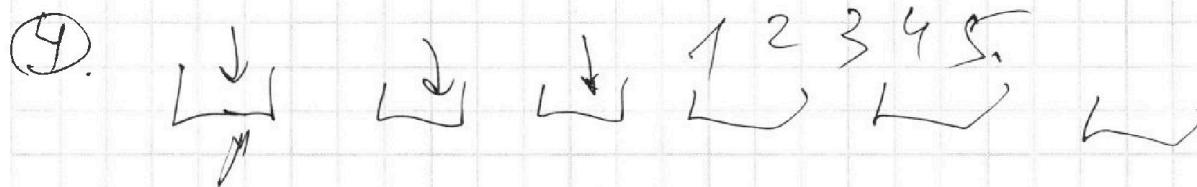


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



и корабля.

~~$P(A) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} \dots$~~ $\rightarrow$ не так.

то $P(A) = \frac{3}{n}$ - вышло в этой коробке 1 шарик

$P(B) \rightarrow$ выигрыш за 5 кораб.

$1 - \frac{3}{n}$ - P проигрыша.

$$\frac{3}{n}$$

$C_n^3 \rightarrow$ ком. во сколько выигрывает.

$$\frac{C_n^3 \cdot C_{n-3}^2}{C_n^5} = 1 \cdot \frac{(n-3)!}{2! \cdot (n-5)!} = \frac{n!}{5! \cdot (n-5)!}$$

$$\frac{(n-3)!}{2! \cdot (n-5)!} \cdot \frac{5! \cdot (n-5)!}{n!} = \frac{5!}{2! \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}$$

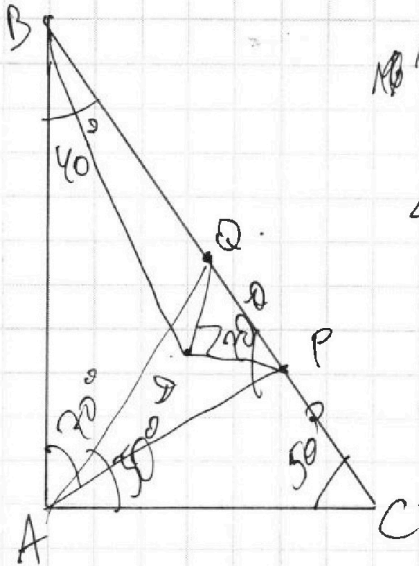


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



140/20

$\angle PBC, \angle PCA = 50^\circ$

$\frac{AC}{AB} = \frac{CB}{AB}$

$\frac{AC}{AB} = \frac{CB}{AB}$

$\frac{CB}{AB} = \frac{AC}{AB}$

$\frac{10 \cdot 6}{8} = \frac{60}{8} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$

$\frac{CB}{AB} = \frac{FC}{AB}$

$\frac{CB}{AB} = \frac{FC}{AB} \Rightarrow FC = \frac{CB \cdot AB}{AB} = \frac{CB}{1} = CB$

$AC = 10 - \frac{15}{2} = \frac{20-15}{2} = \frac{5}{2}$

$AB^2 + AC^2 = BC^2 + AP^2 = 2BC \cdot AP$

$AB^2 + AC^2 = BC^2 + AP^2 = 2BC \cdot AP$

115/4

$155^\circ - 40^\circ + 40^\circ = 155^\circ$
 $180^\circ - 20^\circ - 115^\circ = 45^\circ$
 $10 \cdot 170 = 1700$

$\angle AOB = 180^\circ - 20^\circ - 40^\circ = 120^\circ$

$\angle BOQ = 180^\circ - 105^\circ - 40^\circ = 35^\circ$

$\angle AOB = 180^\circ - 20^\circ - 40^\circ = 120^\circ$

$\angle ABO = 20^\circ, \angle OBA = 40^\circ - 20^\circ = 20^\circ$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

②. $n \in \mathbb{N}$. 30001 девятка. $\rightarrow ?$

$$9^3 = 729$$

$$n = \underbrace{999 \dots 99}_{30001}$$

$$n^3 = n \cdot n \cdot n$$

$$\begin{array}{r} 899 \\ \times 99 \\ \hline 1891 \\ + 891 \\ \hline 9801 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ \times 1111 \\ \hline 1111 \\ + 1111 \\ + 1111 \\ + 1111 \\ \hline 1000 + 100 + 10 + 1 = 1111 \end{array}$$

$$\frac{99}{2} = 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1$$

$$\underbrace{999 \dots 99}_{30001} = \cancel{99999}$$

$$\cancel{99999}$$

$$9 \cdot 10^{30001} + 9 \cdot 10^{30000} + \dots + 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$$

$$9(10^{30001} + 10^{30000} + \dots + 10^2 + 10^1 + 10^0)$$

сколько получится единиц?

$$\frac{b_1 \cdot q^{n-1}}{q-1} = \frac{1 \cdot 9^{30001}}{9-1} = \frac{1 \cdot 10^{30001}}{9}$$

$$10^0 + 10^1 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{30000}$$

$$\frac{b_1 \cdot q^{n-1}}{q-1} = \frac{1 \cdot 10^{30000}}{10-1} = \frac{1 \cdot 10^{30000}}{9}$$

$$\frac{1 \cdot 10^{30000}}{9} \cdot 9 = 1 \cdot 10^{30000}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2xy = -4z + 2z^2$$

$$x^2 - 4z + 2z^2 + y^2 - 4x + 2x^2 + z^2 +$$

$$2yz = -4x + 2x^2$$

$$x^2 - 4z + 2z^2 + y^2 - 4x + 2x^2 + z^2 + y^2 - 4x + 2x^2 + z^2 + y^2 - 4y + y^2 + x^2$$

$$= 4x^2 + 4z^2 + 4y^2 - 4z - 4x - 4y =$$

$$4(x^2 + y^2 + z^2) - 4(x + y + z) =$$

$$4(x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z)$$

$$4.S, S = x^2 + z^2 + y^2 - z - x - y =$$

$$x^2 - x + z^2 - z + y^2 - y = x(x-1) + z(z-1) + y(y-1)$$

$$x^2 + z^2 + y^2 - (x + y + z) - x - y =$$

$$x^2 + z^2 + y^2 + x + y - 2 = x + y =$$

$$(x^2 + z^2 + y^2 - 2)$$

$$(-y - z + 2)^2 + z^2 + y^2 = (y + z - 2)^2 + z^2 + y^2 =$$

$$y^2 + z^2 + 4 + 2yz - 2z - 2y + z^2 + y^2 =$$

$$2y^2 + 2z^2 - 2yz - 2z - 2y + 4 = 0. \quad | +6yz$$

$$2y^2 + 2z^2 - 2yz - 2z - 2y + 4 + 6yz =$$

$$2y^2 + 2z^2 + 4yz - 2(z + y) + 4 = 0$$

$$2y(y + z) + 2z(z + y) - 2(z + y) + 4 = 0$$

$$(y + z)(2y + 2z - 2) + 4 - 6yz = 0.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$xy + yz = z^2 - 2z - 2x + x^2$$

$$xy - yz = z^2 - 2z + 2x - x^2$$

$$y(x-z) = (z^2 - x^2) + 2(x-z)$$

$$y(x-z) = (z-x)(z+x) + 2(x-z)$$

$$xy - yz = z^2 - 2z - x^2 + 2x$$

$$y(x-z) = z^2 - x^2 + 2(x-z)$$

$$y(x-z) = (z-x)(z+x) + 2(x-z)$$

$$y(x-z) = (x-z)(-z-x) + 2(x-z)$$

$$y(x-z) = (x-z)(-z-x+2)$$

$$y = -z-x+2 \Leftrightarrow -xz = y+z-2$$

$$yz - zx = x^2 - 2x - y^2 + 2y$$

$$z(y-x) = (x-y)(x+y) + 2(y-x)$$

$$z(y-x) = (y-x)(-x-y) + 2(y-x)$$

$$z(y-x) = (y-x)(-x-y+2), y \neq x$$

$$z = -x-y+2$$

$$(x-z)^2 = (-y-z+2-z)^2 = (y+z)^2 + (-x-y+2-z)^2 = \frac{15}{2}$$

$$(x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+z)^2 =$$

$$x^2 + 2xy + y^2 + y^2 + 2yz + z^2 + x^2 + 2xz + z^2$$

$$\left. \begin{aligned} xy + yz &= z^2 - 2z - 2x + x^2 \\ xy - yz &= z^2 - 2z + 2x - x^2 \end{aligned} \right\} 2xy = -4z + 2x^2$$

$$\begin{aligned} (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

$$2.5 \cdot 3^{1/4}$$

$$2.5 \cdot 3^{1/4}$$

$$2.5 \cdot 3^{1/4}$$



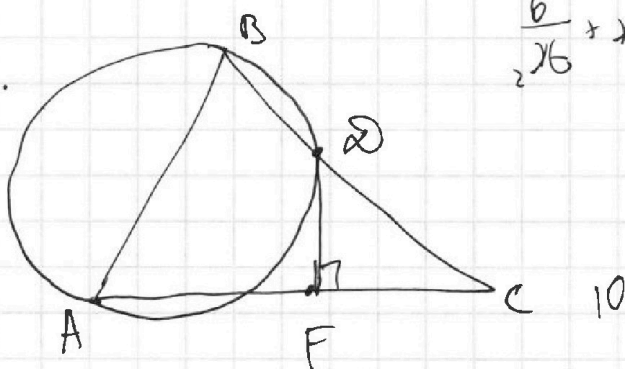
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

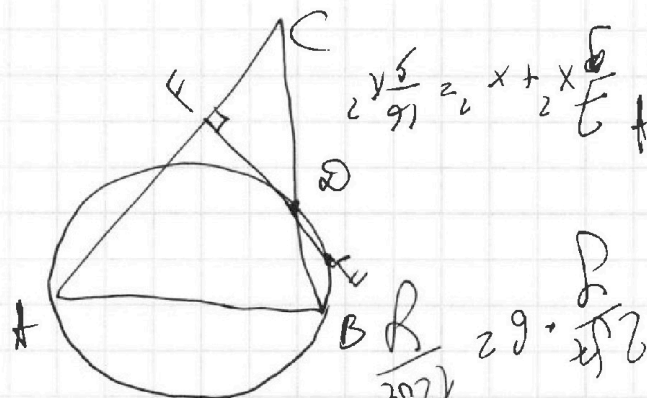
СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

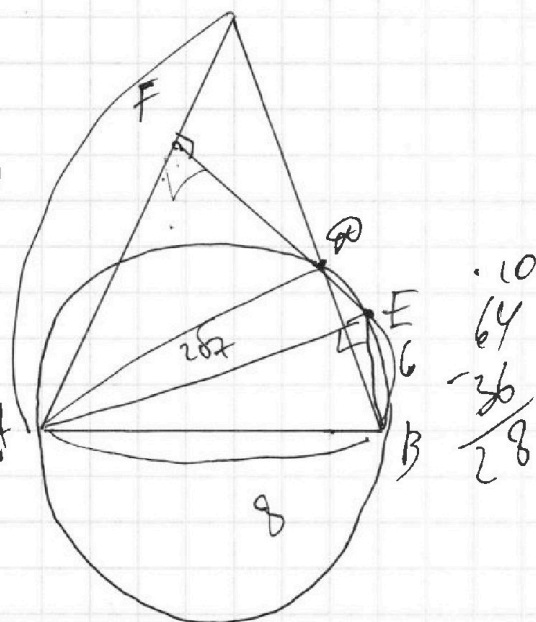
3



$$\frac{6}{2 \cdot 6} + \frac{10}{2} - \frac{1}{2} = \frac{6}{2 \cdot 6} + \frac{(10-0)}{2}$$



$$\frac{6}{2 \cdot 6} + \frac{10}{2} - \frac{1}{2} = \frac{6}{2 \cdot 6} + \frac{(10-0)}{2}$$



$$\begin{array}{r} 10 \\ 64 \\ - 36 \\ \hline 28 \end{array}$$

$$AE^2 = 64 - 36 = 28$$

$$AE^2 = 25x$$

$$AF^2 + FE^2 = AE^2$$

$$FE^2 = AE^2 - AF^2$$

$$FE^2 = 28 - \frac{9}{x}$$

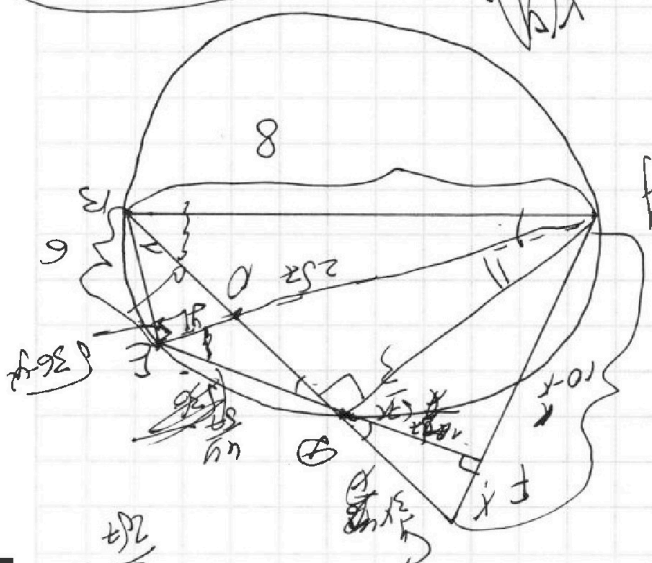
$$FE^2 = 28 - \frac{9}{x}$$

$$FE^2 = 28 - \frac{9}{x}$$

$$FE^2 = 28 - \frac{9}{x}$$

$$FE^2 = 28 - \frac{9}{x}$$

$\triangle ABE \sim \triangle CFE$



$$AF^2 = 25x$$

$$CA^2 = (10-x)^2 + FE^2$$

$$CA^2 = (10-x)^2 + FE^2$$

$$CA^2 = (10-x)^2 + FE^2$$

$$CA^2 = (10-x)^2 + FE^2$$

$$CA^2 = (10-x)^2 + FE^2$$

$$CA^2 = (10-x)^2 + FE^2$$

$$FE^2 = \frac{64}{x}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

36

$$x-10+\frac{y}{2\sqrt{3}}=a\sqrt{2\sqrt{3}}, x-10-\frac{y}{2\sqrt{3}}=b$$

$$2\sqrt{3}x - 20\sqrt{3} + y = a2\sqrt{3}$$

$$y = 2\sqrt{3}x - 20\sqrt{3} - 2\sqrt{3}a$$

$$x^2 - 2x + 4 +$$

$$2^2 + x^2 - xy - y^2 - 2z - 2x = 0$$

$$2^2 + x^2 - y(x+z) - 2(z+x) = 0$$

$$2^2 + (z+x)^2 - y(z+x) - 2(z+x) = 2xz$$

$$(z+x)(z+x-y-2) = 2xz$$

$$-y(z+x) - 2(z+x) = 2xz$$

$$2(z+x) - 2(z+x) = 2xz$$

$$2(z+x) - 2(z+x) = 2xz$$

$$2(z+x) - 2(z+x) = 2xz$$

$$2(z+x) - 2(z+x) = 2xz$$

$$2(z+x) - 2(z+x) = 2xz$$

$$2(z+x) - 2(z+x) = 2xz$$

$$2(z+x) - 2(z+x) = 2xz$$

$$2(z+x) - 2(z+x) = 2xz$$

$$2(z+x) - 2(z+x) = 2xz$$

$$2(z+x) - 2(z+x) = 2xz$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5. $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7$. корни увеличиваются a_6 и a_7

$3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ a_4 и a_5

$\Delta_1: (a^2 - 2a)^2 - 4(a^2 - a - 7) = a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 4a^2 + 4a + 28 = a^4 - 4a^3 + 4a + 28 =$

$\begin{cases} a_6 \cdot a_7 = a^2 - a - 7 \\ a_6 + a_7 = a^2 - 2a \end{cases}$

$a_7 \neq a_6$

$a_7 = a_6 + d$

$2a_6 + d = a^2 - 2a$

$d = a^2 - 2a - 2a_6$

$\begin{cases} a_4 \cdot a_5 = \frac{6 - a^5}{3} \\ a_4 + a_5 = \frac{a^3 - 2a^2}{3} \end{cases}$

$\Delta_2: (a_6 + a_7)^2 - 4 \cdot a_6 \cdot a_7 =$

$a_6^2 + a_7^2 + 2a_6a_7 - 4a_6a_7 =$

$a_6^2 + a_7^2 - 2a_6a_7 =$

$2a_6 + 5d = \frac{a^3 - 2a^2}{3}$

$d = \frac{a^3 - 2a^2}{15} - \frac{2a_6}{5}$

$a^2 - 2a - 2a_6 = \frac{a^3 - 2a^2}{15} - \frac{2a_6}{5} \quad | \cdot 15 \quad \frac{2 \cdot 5 \cdot 3 a_6}{5}$

$15a^2 - 30a - 30a_6 = a^3 - 2a^2 - 6a_6$

$2a_6 +$

$a^4 + 4a^2 - 4a^3 + 2a^2 - 2a - 2 \cdot 7 =$

$a^4 + 6a^2$

$\Delta = (a_6 - a_7)^2$

$a_6 = \frac{a^2 - 2a + a_6 - a_7 + 2a_6 + d}{2}$

$a_6 = \frac{a^2 - 2a + a_6 - a_7 - d}{2}$

$a_6^2 = \frac{a^2 - 2a - d}{2} \quad | \cdot 2$
 $2a_6^2 = a^2 - 2a - d$
 $d = a^2 - 2a - 2a_6$