



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

$$x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0.$$

удовл.

системе:

она имеет ≥ 1 решение.

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ xz = 3y + y^2 \end{cases}$$

Найти все возм. значения

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 \leftarrow \text{пусть} = A.$$

Решение.

$$\begin{aligned} A &= (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 6z + 9 = \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 27. \end{aligned}$$

Сложим 3 ур-ия системы: $xy + yz + xz = x^2 + y^2 + z^2 + 3(x+y+z)$

~~$$xy + yz + xz = x^2 + y^2 + z^2 + 3(x+y+z)$$~~

~~$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 27$$~~

$$\Rightarrow A = xy + yz + xz + 3(x+y+z)$$

$x, y, z \neq 0$: можно : на них; $\Rightarrow$

$$\frac{xy}{z} = z+3; \quad \frac{xz}{y} = y+3; \quad \frac{yz}{x} = x+3.$$

$$\begin{aligned} A &= (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = \frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{x^2 z^2}{y^2} + \frac{x^2 y^2}{z^2} = \\ &= \frac{(yz)^4 + (xz)^4 + (xy)^4}{(xyz)^2} \end{aligned}$$

~~$$\frac{xy}{z} \cdot \frac{xz}{y} \cdot \frac{yz}{x} = (x+3)(y+3)(z+3)$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$xyz = (x+3)(y+3)(z+3).$$

$$A = \frac{(3x+x^2)^4 + (3y+y^2)^4 + (3z+z^2)^4}{((x+3)(y+3)(z+3))^2} =$$

$$= \frac{x^4(x+3)^4 + y^4(y+3)^4 + z^4(z+3)^4}{(x+3)^2 \cdot (y+3)^2 \cdot (z+3)^2}.$$

Перемн. ур-ня системы.

$$x^2y^2z^2 = xyz(x+3)(y+3)(z+3)$$

$$xyz = (x+3)(y+3)(z+3).$$

$$\frac{x^2y}{xz} = \frac{z}{y} \cdot \frac{z+3}{y+3}$$

$$\frac{y^2}{z^2} = \frac{z+3}{y+3}.$$

$$y^2(y+3) = z^2(z+3)$$

аналог. другое.

Ответ:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

$$\begin{aligned}
 10 &= \overbrace{99 \dots 9}^{40\,000} = 9 \cdot \overbrace{11 \dots 1}^{40\,000} = 9(10^0 + 10^1 + 10^2 + \dots + 10^{39999}) \\
 &= 9(1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{39999}) \\
 n &= 9(1 + 10A) \quad \text{тогда } A \in \mathbb{N} \\
 n^3 &= 9^3(1 + 10A)^3 = 729(1 + 3 \cdot 10A + 3 \cdot 10^2 A^2 + 10^3 A^3) = 729(1 + 30A + 300A^2 + 1000A^3)
 \end{aligned}$$

$$n = \overbrace{999 \dots 99}^{40\,000} = -1 + \overbrace{100000 \dots 00}^{40\,000} = -1 + 10^{40\,000} =$$

$$= 10^{40\,000} - 1.$$

$$\begin{aligned}
 n^3 &= (10^{40\,000} - 1)^3 = (10^{40\,000})^3 - 3 \cdot (10^{40\,000})^2 \cdot 1 + \\
 &+ 3 \cdot 10^{40\,000} \cdot (+1)^2 - 1^3 = 10^{120\,000} - 3 \cdot 10^{80\,000} + \\
 &+ 3 \cdot 10^{40\,000} - 1.
 \end{aligned}$$

$$n^3 = 10^{120\,000} - 3 \cdot 10^{80\,000} + 3 \cdot 10^{40\,000} - 1 =$$

$$= \underbrace{1000 \dots 0}_{120\,000} - \underbrace{3000 \dots 0}_{80\,000} + \underbrace{3000 \dots 0}_{40\,000} - 1$$

$$\underbrace{100 \dots 0}_{120\,000} - \underbrace{300 \dots 0}_{80\,000} = \underbrace{99 \dots 99}_{39\,999} \underbrace{700 \dots 0}_{80\,000}$$

(напр., можно
это показать
при вычит. в
столбик)

$$n^3 = \underbrace{99 \dots 9}_{39\,999} \underbrace{700 \dots 0}_{80\,000} + \underbrace{300 \dots 0}_{40\,000} - 1 = \underbrace{99 \dots 9}_{39\,999} \underbrace{70 \dots 0}_{80\,000} + \underbrace{299 \dots 9}_{40\,000} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ между 7 и 2 будет много "0"
т.к. $80\,000 > 40\,000$. Кол-во "9":
 $39\,999 + 40\,000 = 79\,999$

Ответ: 79999



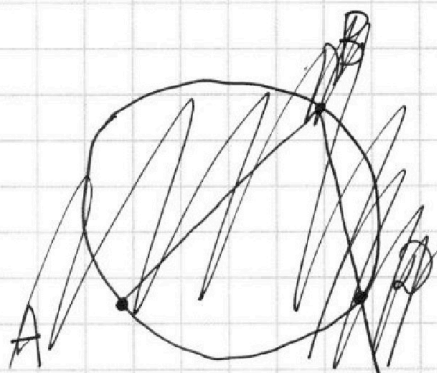
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

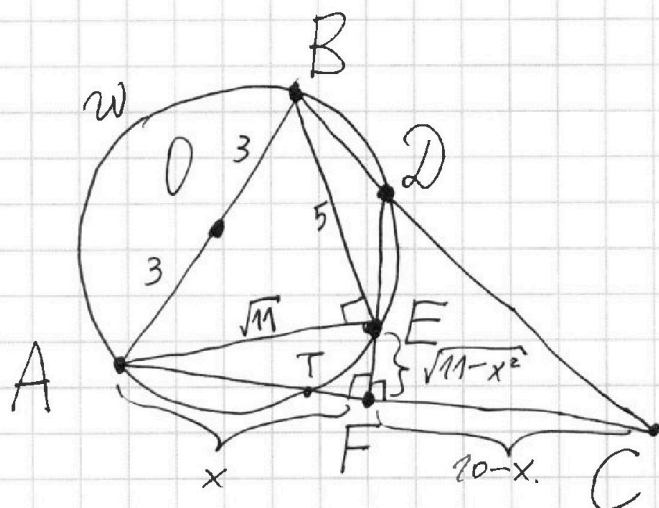
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.



Дано: AB — диаметр окр.
 ω , $\triangle ABC$ встроит.
 $\omega \cap BC = \{B, D\}$, $F \in AC$,
 $DF \perp AC$, $DF \cap \omega =$
 $= \{D, E\}$, $AC = 10$,
 $AB = 6$, $BE = 5$

Найти: $AF = ?$



Решение.

Пусть $AF = x$.

Пусть O — центр ω ; $\Rightarrow O$ — серед. AB . $\angle AEB = 90^\circ$ — опир. на диаметр AB . $AO = BO = 3$, $BE = 5$,

т. Пифагора для $\triangle ABE \Rightarrow AE = \sqrt{11}$.
 $3 = OA = OE = OB$ как радиусы ω . т. Пифагора для
 $\triangle AFE \Rightarrow EF = \sqrt{11 - x^2}$, $FC = 10 - x$.

Пусть $AC \cap \omega = T$, то T — середина;

$CT \cdot CA = CD \cdot CB$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

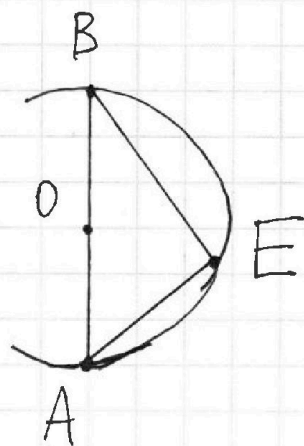
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Ответ: $AF = 3$.



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

← не дано! Задача 4.
 N коробок, в 3 из них шары, сначала: широк
 откр. 5 коробок, потом: 6 коробок.
 если в коробках 3 шарика — выиграем.
 Во ск. раз ↑ вер-ть выигрыша?

Решение.

Вер-ть того, что в случае, коробке будет m ,
 равна $p_0 = \frac{1}{N}$. Пусть X_5 — кол-во
 способов положить 3 шара в 5 коробок,
 а X_6 — $\uparrow$ в 6 коробок (без учёта
 порядка, в котором клали шары).

$$X_5 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{5 \cdot 12}{6} = 10.$$

$$X_6 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = \frac{6 \cdot 20}{6} = 20.$$

Пусть есть X вариантов способов положить
 3 шара в N коробок (без уч. порядка, в
 кот. клали шары). От того, что широко раз-
 решили открыть ещё 1 коробку, X не изменит.

Сначала у широка было $X_5 = 10$ способов выиг-
 рать, а потом стало $X_6 = 20$ способов.

p_5, p_6 — вер-ть выигрыша соотв. при 5 и 6 коробках;

$$\Rightarrow \frac{p_5}{X_5} = \frac{p_6}{X_6}; \Rightarrow \frac{p_6}{p_5} = \frac{X_6}{X_5} = \frac{20}{10} = 2,$$

При 6 откр. коробках вер. широка выиграть в
 2 раза $>$, чем при 5 откр. коробках.

Ответ: в 2 раза.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.
 корни ур-ня $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ —
 5 и 6 члены нечет. арифм. прогр.; (1)

корни ур-ня $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ —
 3 и 8 члены этой же прогр. (2)
 найти все знач. a .

Решение.
 пусть прогр. $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$; знаменатель q ;
 нечет. прогр. $\Rightarrow q \neq 0$.

~~4 и 3~~ b_3, b_5, b_6, b_8 ; $b_5 = b_3 + 2q$; $b_6 = b_3 + 3q$; $b_8 = b_3 + 5q$.

$\Rightarrow (b_3 + b_8 = b_5 + b_6) = 2b_3 + 5q$. $q = b_6 - b_5$.

обр. т. Внета $\Rightarrow b_5 + b_6 = a^2 - a$; $b_3 + b_8 = \frac{a^3 - a^2}{4}$

$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4}$. $4a(a-1) = a^2(a-1)$.

$a(a-1)(a-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0; \\ a=1; \\ a=4. \end{cases}$

1) $a=0$; (1): $x^2 - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{5} \\ x = \sqrt{5} \end{cases}$ — b_5 и b_6
 (2): $4x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$ — b_3 и b_8 .

$|q| = 2\sqrt{5}$; $b_8 = b_3 + 5q \Rightarrow a=0$ не подх.
 $\in \mathbb{Z} \in \mathbb{Z} \notin \mathbb{Q}$ — иррац.

2) $a=1$; (1): $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$ — b_5 и b_6

(2): $4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -0,5 \\ x = 0,5 \end{cases}$ — b_3 и b_8

$|q| = 4$. $b_8 = b_3 + 5q$. $5q = b_8 - b_3$.

$5q$ — или 20, или -20; $b_8 - b_3$ — или 1, или -1; $\Rightarrow$
 $a=1$ не подх.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) $a=4$.

$$(1): x^2 - 12x - 1 = 0. \Rightarrow \begin{cases} x = 6 + \sqrt{37} \\ x = 6 - \sqrt{37} \end{cases} \\ D = 144 + 4 = 4.37 \quad x = \frac{12 \pm 2\sqrt{37}}{2} \quad b_5 \text{ и } b_6.$$

$$(2): 4x^2 - (4^3 - 4^2)x + 2 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^2 - 4^6 - 4 = 0 \quad | :4 \\ x^2 - 12x + 2 \cdot 64 + 2 \cdot 4 - 4^5 - 1 = 0 \\ x^2 - 12x + 128 + 8 - 1024 - 1 = 0. \\ x^2 - 12x - (1025 - 125 - 11) = 0 \\ x^2 - 12x - (900 - 11) = 0 \\ D = 144 + 4 \cdot 1 \cdot (900 - 11) = 144 + 3600 - 44 = 3700 \\ x = \frac{12 \pm 10\sqrt{37}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 + 5\sqrt{37} \\ x = 6 - 5\sqrt{37} \end{cases} \quad b_3 \text{ и } b_8$$

Такое возможно, напр; при $z = 2\sqrt{37}$:

$$\begin{matrix} 6 - 5\sqrt{37}; & 6 - 3\sqrt{37}; & 6 - \sqrt{37}; & 6 + \sqrt{37}; & 6 + 3\sqrt{37}; & 6 + 5\sqrt{37} \\ \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ b_3 & & b_5 & b_6 & & b_8 \end{matrix}$$

Ответ: $a=4$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.

Φ : сост. из
всех точек с
коорд. $(x; y)$,
удовл. этому нер-ву.

$$\left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3.$$

Непр. повернутой на
угол π против час. стрелки.
(которую замела фигура Φ).
Решение.

Изобразим решение этого нер-ва на
коорд. плоск. $(x; y)$.

$$\frac{15}{2} = 7,5$$

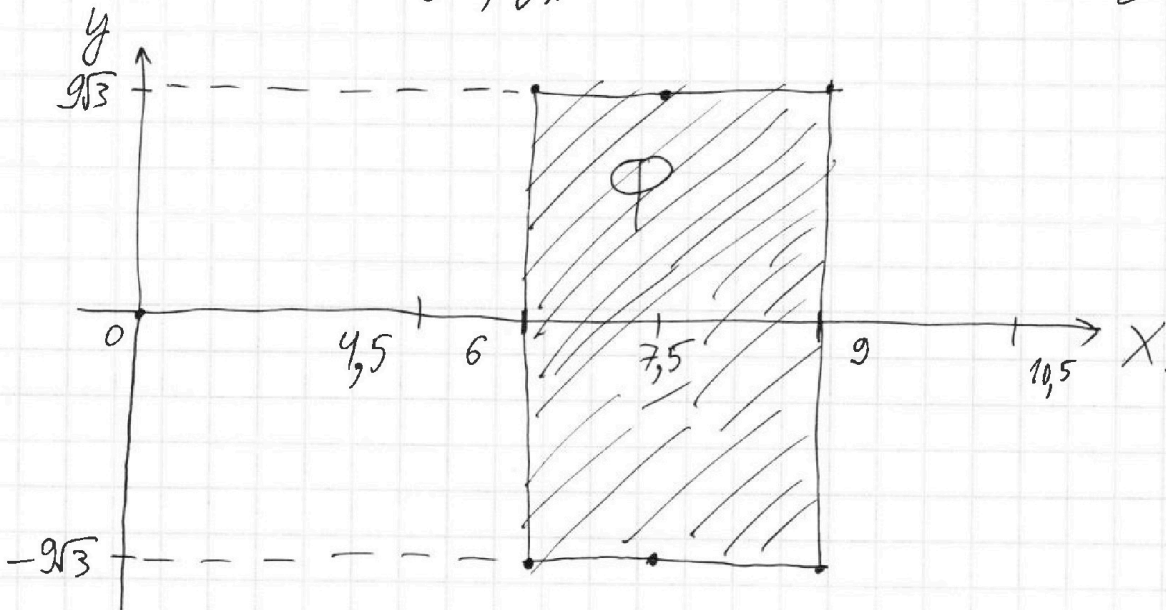


график синхр. отн. прямой $x = 7,5$ и
отн. прямой $y = 0$.

$$\left(x - \frac{15}{2} \right) \in [-1,5; 1,5]$$

$$\frac{y}{6\sqrt{3}} \in [-1,5; 1,5].$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Р- прямоугольник, отр. прямой
 $y = -9\sqrt{3}$, $y = 9\sqrt{3}$; $x = 6$; $x = 9$.

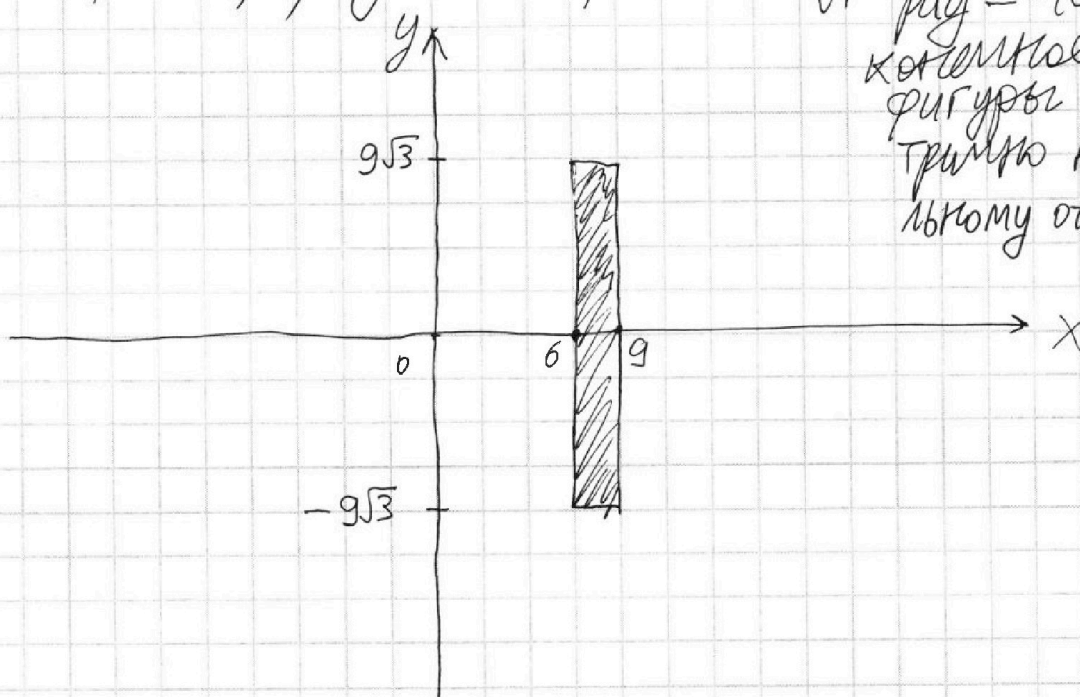
(можно показать, рассм. 4 случая:

1) $x \geq 7,5$; $y \geq 0$

2) $x \geq 7,5$; $y \leq 0$.

3) $x < 7,5$; $y \geq 0$

4) $x < 7,5$; $y < 0$.



π рад = 180° :
касательное пол.
фигуры симме-
трично нача-
льному отн. осн y .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 5

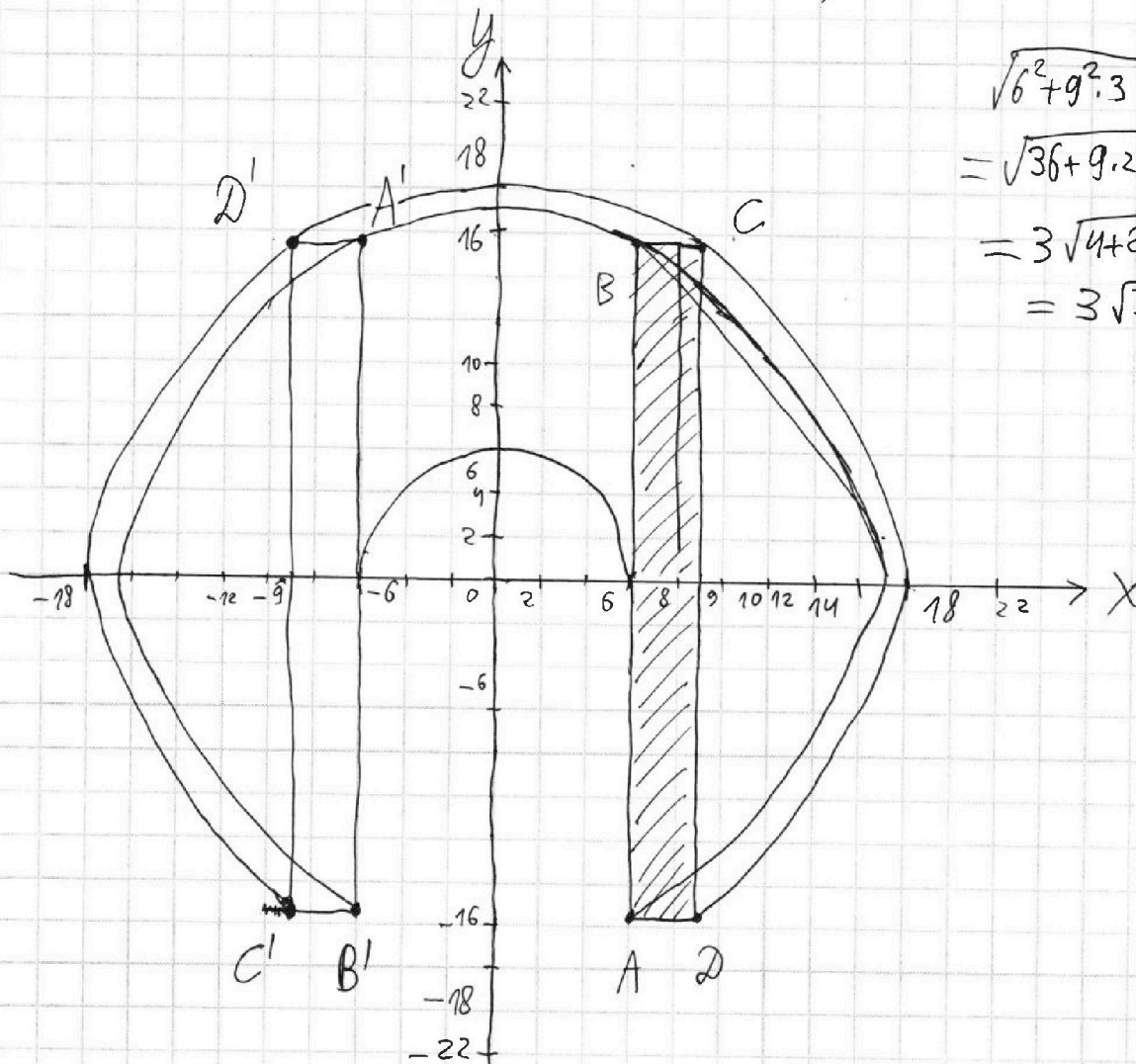
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Фигура φ будет замечать совокупность дуг окружностей.

$$r_{\min} = 6 \text{ (изначально: т. } (6; 0) \text{).}$$

$$r_{\max} = \sqrt{9^2 + (9\sqrt{3})^2} = 9\sqrt{1+3} = 18 \text{ (изначально:}$$

точки $(9; 9\sqrt{3})$ и $(9; -9\sqrt{3})$).



$$\begin{aligned} \sqrt{6^2 + 9^2 \cdot 3} &= \\ &= \sqrt{36 + 9 \cdot 27} = \\ &= 3\sqrt{4 + 27} = \\ &= 3\sqrt{31}. \end{aligned}$$

$$ABC\varnothing \rightarrow A'B'C'D' \quad (A \rightarrow A', B \rightarrow B', \text{ и т.д.})$$



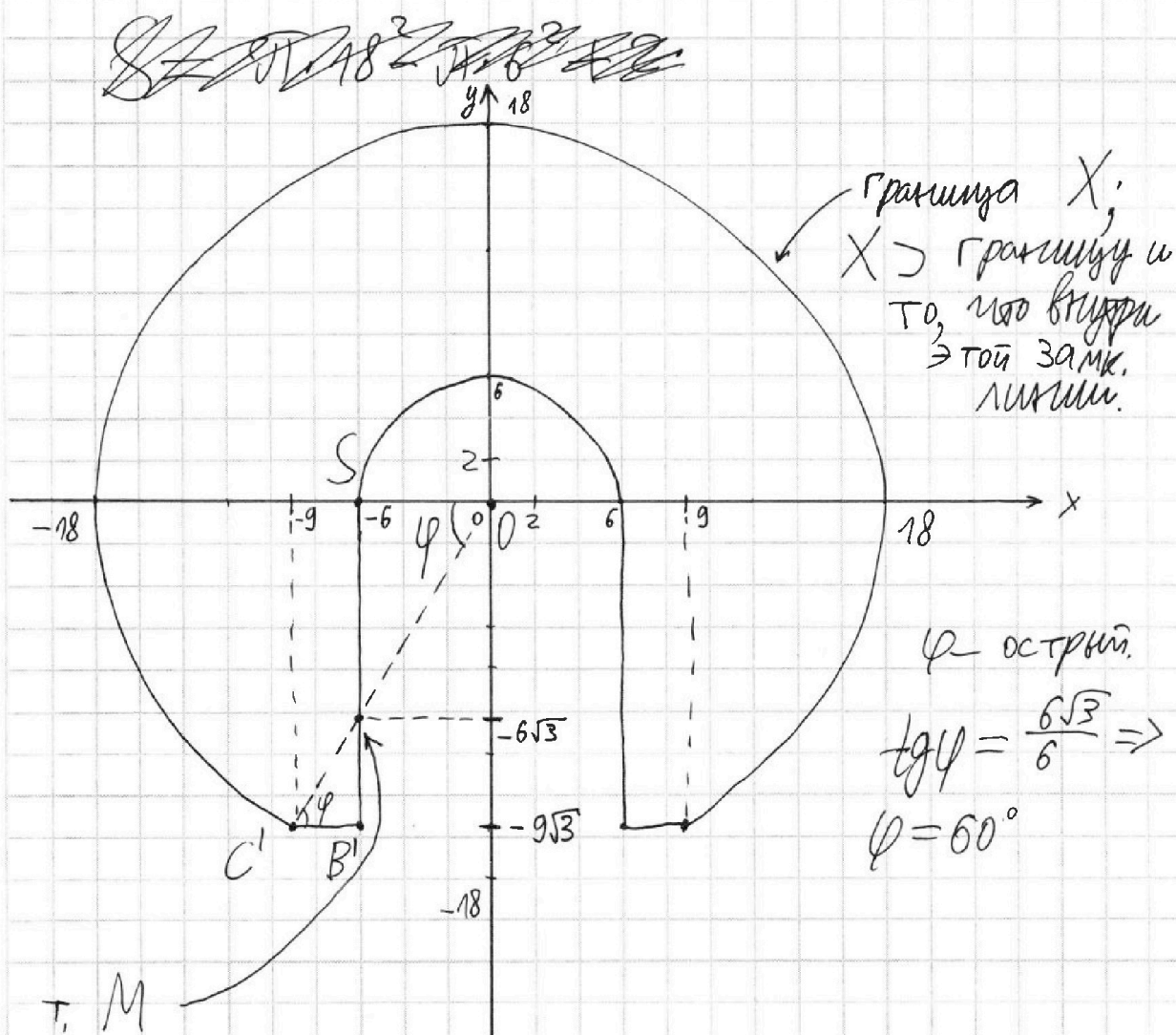
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть X — фигура, кот. замела при пов.
фигура Φ ; изобразим X на $(x; y)$:



$$M_x = -6; M_y = -9\sqrt{3} \cdot \frac{-6}{-9} = -6\sqrt{3}.$$

$$S_{\Delta OMS} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3} \quad S_{\Delta C'B'M} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА

5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{11} \cdot 18^2 \cdot \frac{1}{2} - \sqrt{11} \cdot 6^2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \left(\frac{\sqrt{11} \cdot 18^2 \cdot 4}{360^\circ} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{11}}{2} \cdot 6^2 (3^2 - 1) + 2 \cdot \frac{\sqrt{11} \cdot 18^2}{6} - 6^2 \sqrt{3} + 3^2 \sqrt{3} = \\ &= \frac{\sqrt{11}}{2} \cdot 2 \cdot 18 \cdot 8 + 2\sqrt{11} \cdot 18 \cdot 3 - 36\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = \\ &= 18\sqrt{11} (8 + 6) - 27\sqrt{3} = 14 \cdot 18\sqrt{11} - 27\sqrt{3} = \\ &= 252\sqrt{11} - 27\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$(14 \cdot 18 = (16 - 2)(18 + 2) = 256 - 4 = 252)$$

Ответ: $S = 252\sqrt{11} - 27\sqrt{3}.$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

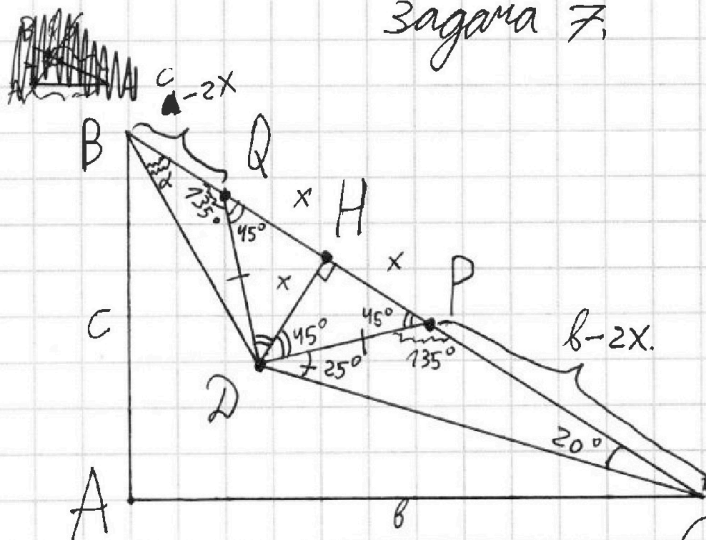
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Задача 7.



Дано: $\triangle ABC$ прямоуг.
BC — гипот., $\{Q, P\} \in$
 $\in BC$, $AB = BP$,
 $AC = CQ$, $\angle A$ внутр.
 $\triangle ABC$, $2P = 2Q$,
 $\angle PDQ = 90^\circ$, $\angle DCB =$
 $= 20^\circ$.

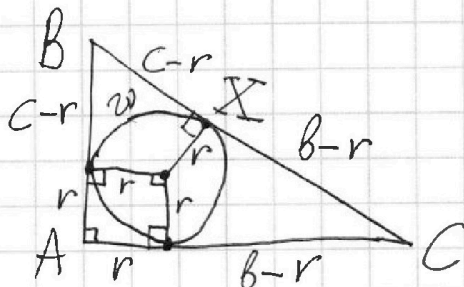
Найти: $\angle DBC = ?$

Решение.

$AB + AC > BC$ (нер-во $\triangle$), $\Rightarrow BP + CQ > BC$,
 $\Rightarrow Q$ между B и P . $DP = 2Q \Rightarrow D \in$ сгр.
перп. отрезка PQ . Пусть H — середина PQ ,
 $\Rightarrow DH \perp PQ$. $\triangle DPQ$: $PD = QD$, $\angle Q = 90^\circ \Rightarrow$
 $\angle P = \angle Q = 45^\circ$, $\Rightarrow \angle HDP = \angle HDQ = 45^\circ$. $\angle BQD = 135^\circ$
(смеж. с 45°), $\angle DPC = 135^\circ$. $\triangle DPC$: $\angle PDC = 180^\circ - 135^\circ - 20^\circ =$
 $= 25^\circ$. Пусть $\angle DBC = \alpha$, $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$,
 $QH = PH = x$. $\triangle PDQ$ р/б и прямоуг.; $\Rightarrow DH$ — высота, мед.,
бисс., сгр. перп. $\Rightarrow DH = x$. $BQ = BP - PQ = c - 2x$,
 $CP = CQ - QP = b - 2x$. Т. Пифагора для $\triangle ABC \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$.
 $BC = a = c - 2x + x + x + b - 2x = b + c - 2x$.

$$a = b + c - 2x. \quad 2x = b + c - a. \quad x = \frac{b + c - a}{2}.$$

Впишем окр. ω в $\triangle ABC$:



Пусть $\omega \cap BC = X$,
 $BX = c - r$, $CX = b - r$.

Испол. то, что ω — радиус,
в $\triangle$ т.к. кас., $\perp$ касат.;
и отр. касательные, проведен
к окр. из 1 точки, равны;

$$a = b + c - 2r.$$

$$r = \frac{b + c - a}{2};$$

Тогда же $BH = c - x$, $CH = b - x$,



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

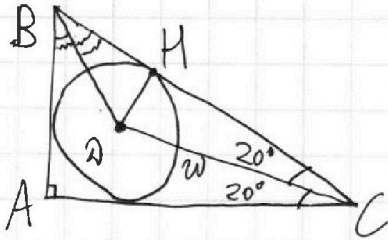
6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Следовательно, $X \equiv H$, $x=r$, т.е. H — точка кас. впис. окр. ω и стороны BC ; $HD \perp BC$, $HD = x = r$, т.е. D — центр впис. окр. от A, B, C ; $\Rightarrow$ лежат на $\perp$ бисс. $\Rightarrow$ CD — бисс. $\angle ACB \Rightarrow$



$\angle ACD = \angle BCD = 20^\circ \Rightarrow$
 $\angle ACB = 40^\circ \Rightarrow \angle ABC =$
 $= 180^\circ - 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$,
 BD — бисс. $\angle ABC$,
 $\Rightarrow \angle ABD = \angle CBD$,
 $\angle ABD + \angle CBD = \angle ABC = 50^\circ$,

$\Rightarrow \angle ABD = \angle CBD = 25^\circ$.

$\angle DBC = 25^\circ$

Ответ: $\angle DBC = 25^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

