МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5

1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений
$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$
Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3?

3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D. Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω, отличная от D. Найдите AF, если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.

4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.

6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leqslant 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.

7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D, для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

$x\neq 0,\ y\neq 0,\ z\neq 0.$ удовл. системе:

$$\begin{cases} xy = 3z+z^2 \\ yz = 3x+x^2 \\ xz = 3y+y^2 \end{cases}$$

она имеет ≥ 1 решение.

Найти все возм. значения

$(x+3)^2+(y+3)^2+(z+3)^2$ ← пусть $=A$.

Решение.

$A=(x+3)^2+(y+3)^2+(z+3)^2 = x^2+6x+9+y^2+6y+9+z^2+6z+9=$
$= x^2+y^2+z^2+6(x+y+z)+27.$

Сложим 3 ур-ния системы: $xy+yz+xz=x^2+y^2+z^2+3(x+y+z)$

~~$xy+yz+xz = \frac{1}{2}(xy+xy+yz+yz+xz+zx)$~~

$\Rightarrow A = xy+yz+xz+3(x+y+z)$

$x, y, z\neq 0$: можно $:$ на них; $\Rightarrow$

$\frac{xy}{z}=z+3;\quad \frac{xz}{y}=y+3;\quad \frac{yz}{x}=x+3.$

$A=(x+3)^2+(y+3)^2+(z+3)^2 = \frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{x^2z^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}=$

$= \frac{(yz)^4+(xz)^4+(xy)^4}{(xyz)^2}$

$\frac{\cancel{xy}}{\cancel{z}}\cdot\frac{x\cancel{z}}{\cancel{y}}\cdot\frac{yz}{\cancel{x}} = (x+3)(y+3)(z+3)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$xyz = (x+3)(y+3)(z+3).$$

$$A = \frac{(3x+x^2)^4 + (3y+y^2)^4 + (3z+z^2)^4}{\left((x+3)(y+3)(z+3)\right)^2} =$$

$$= \frac{x^4(x+3)^4 + y^4(y+3)^4 + z^4(z+3)^4}{(x+3)^2 \cdot (y+3)^2 \cdot (z+3)^2}.$$

Перемн. ур-ия системы.

$$x^2y^2z^2 = xyz(x+3)(y+3)(z+3)$$

$$xyz = (x+3)(y+3)(z+3).$$

$$\frac{\cancel{x}y}{\cancel{x}z} = \frac{z}{y} \cdot \frac{z+3}{y+3}$$

$$\frac{y^2}{z^2} = \frac{z+3}{y+3}.$$

$$y^2(y+3) = z^2(z+3)$$

аналог. другие.

Ответ:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

$$n = \underbrace{999\ldots99}_{40\,000} = -1 + 1\underbrace{00000\ldots00}_{40\,000} = -1 + 10^{40\,000} =$$

$$= 10^{40\,000} - 1.$$

$$n^3 = (10^{40\,000} - 1) = (10^{40000})^3 - 3\cdot(10^{40000})^2\cdot 1 +$$

$$+ 3\cdot 10^{40000}\cdot(+1)^2 - 1^3 = 10^{120\,000} - 3\cdot 10^{80\,000} +$$

$$+ 3\cdot 10^{40\,000} - 1.$$

$$n^3 = 10^{120000} - 3\cdot 10^{80000} + 3\cdot 10^{40\,000} - 1 =$$

$$= 1\underbrace{000\ldots0}_{120\,000} - 3\underbrace{000\ldots0}_{80\,000} + 3\underbrace{000\ldots0}_{40000} - 1$$

$$1\underbrace{00\ldots0}_{120\,000} - 3\underbrace{00\ldots0}_{80\,000} = \underbrace{99\ldots9}_{39\,999}\underbrace{7}_{1}\underbrace{00\ldots0}_{80\,000}$$

(напр., можно это показать при вычит. в столбик)

$$n^3 = \underbrace{99\ldots9}_{39999}7\underbrace{00\ldots0}_{80000} + 3\underbrace{00\ldots0}_{40000} - 1 = \underbrace{99\ldots9}_{39999}7\underbrace{0\ldots0}_{80000} + 2\underbrace{99\ldots9}_{40000} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ между 7 и 2 будет много „0", т.к. $80\,000 >> 40\,000$. Кол-во „9": $39999 + 40\,000 = 79\,999$

Ответ: 79999

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

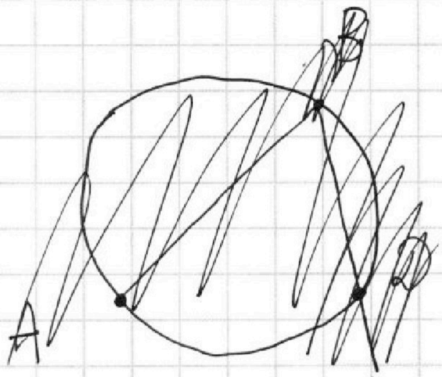
СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

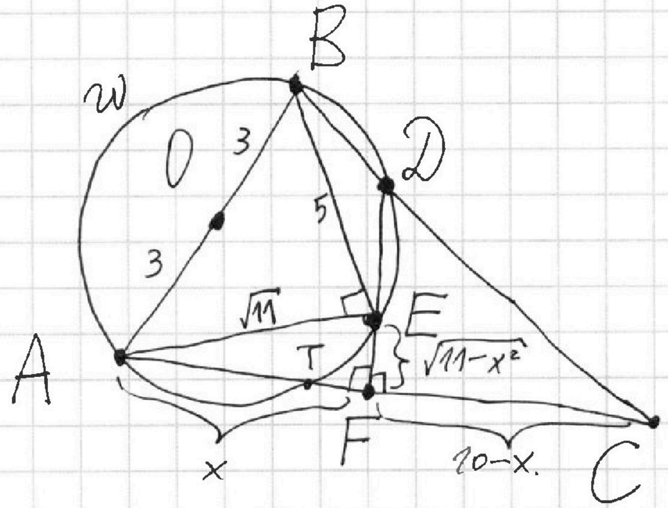
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

Дано: AB — диаметр окр. ω, $\triangle ABC$ остроуг., $\omega \cap BC = \{B, D\}$, $F \in AC$, $DF \perp AC$, $DF \cap \omega = \{D, E\}$. $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$

Найти: $AF = ?$





Решение. Пусть $AF = x$.

Пусть O — центр ω; $\Rightarrow O$ — серед. AB. $\angle AEB = 90°$ — опир. на диаметр AB. $AO = BO = 3$, $BE = 5$, т. Пифагора для $\triangle ABE \Rightarrow AE = \sqrt{11}$.

$3 = OA = OE = OD = OB$ как радиусы 1 окр. Т. Пифагора для $\triangle AFE \Rightarrow EF = \sqrt{11 - x^2}$, $FC = 10 - x$.

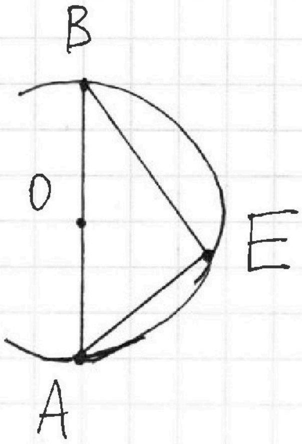
Пусть $AC \cap \omega = T$. по Т. о 2 секущих: $CT \cdot CA = CD \cdot CB$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Ответ: $AF = 3$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

не дано! Задача 4.

N коробок, в 3 из них шарики, сначала: игрок откр. 5 коробок, потом: 6 коробок.
Если в коробках 3 шарика — выигрыш.
Во ск. раз ↗ вер-ть выигрыша?

Решение.

Вер-ть того, что в случ. коробке будет ш., равна $p_0 = \frac{3}{N}$. Пусть X_5 — кол-во способов положить 3 шара в 5 коробок, а X_6 — " в 6 коробок (без учёта порядка, в котором клали шары).

$$X_5 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{5 \cdot 12}{6} = 10.$$

$$X_6 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = \frac{6 \cdot 20}{6} = 20.$$

Пусть есть X ~~вариантов~~ способов положить 3 шара в N коробок (без уч. поряд. в кот. клали шары). От того, что игроку разрешили открыть ещё 1 коробку, X не измен.

Сначала у игрока было $X_5 = 10$ способов выиграть, а потом стало $X_6 = 20$ способов.
p_5, p_6 — вер-ть выиграть соотв. при 5 и 6 коробках;

$$\Rightarrow \frac{p_5}{X_5} = \frac{p_6}{X_6}; \Rightarrow \frac{p_6}{p_5} = \frac{X_6}{X_5} = \frac{20}{10} = 2,$$

При 6 откр. коробках вер. игрока выиграть в 2 раза >, чем при 5 откр. коробках.

Ответ: в 2 раза.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

корни ур-ния $x^2-(a^2-a)x+a-5=0$ (1) — 5 и 6 члены непост. арифм. прогр.;

корни ур-ния $4x^2-(a^3-a^2)x+2a^4+2a^2-a^6-4=0$ (2) — 3 и 8 члены этой же прогр.

Найти все знач. a.

Решение.

Пусть прогр. $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$; знаменатель q; непост. прогр. $\Rightarrow$ $q \neq 0$.

$b_5=b_3+2q$; $b_6=b_3+3q$; $b_8=b_3+5q$.

$\Rightarrow b_3+b_8=b_5+b_6=2b_3+5q$. $q=b_6-b_5$.

обр. т. Виета $\Rightarrow$ $b_5+b_6=a^2-a$; $b_3+b_8=\frac{a^3-a^2}{4}$

$a^2-a=\frac{a^3-a^2}{4}$. $4a(a-1)=a^2(a-1)$.

$a(a-1)(a-4)=0$. $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0; \\ a=1; \\ a=4. \end{array}\right.$

1) $a=0$; (1): $x^2-5=0$; $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt5 \\ x=\sqrt5 \end{array}\right.$ — b_5 и b_6

(2): $4x^2-4=0$; $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$ — b_3 и b_8.

$|q|=2\sqrt5$; $\underbrace{b_8}_{\in \mathbb{Z}}=\underbrace{b_3}_{\in \mathbb{Z}}+\underbrace{5q}_{\notin \mathbb{Q}}$ иррац. $\Rightarrow a=0$ не подх.

2) $a=1$; (1): $x^2-4=0$ $\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \end{array}\right.$ b_5 и b_6

(2): $4x^2-1=0$ $\left[\begin{array}{l} x=-0{,}5 \\ x=0{,}5 \end{array}\right.$ b_3 и b_8

$|q|=4$.

$b_8=b_3+5q$. $5q=b_8-b_3$.

$5q$ — или 20, или -20; b_8-b_3 — или 1, или -1; $\Rightarrow$

$a=1$ не подх.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

3) $a=4$.

(1): $x^2-12x-1=0$. $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} x=6+\sqrt{37} \\ x=6-\sqrt{37} \end{array}\right.$

$D=144+4=4\cdot 37$ $\quad x=\frac{12\pm 2\sqrt{37}}{2}$

b_5 и b_6.

(2): $4x^2-(4^3-4^2)x+2\cdot 4^4+2\cdot 4^2-4^6-4=0 \quad |:4$

$x^2-12x+2\cdot 64+2\cdot 4-4^5-1=0$

$x^2-12x+128+8-1024-1=0$.

$x^2-12x-(1025-125-11)=0$

$x^2-12x-(900-11)=0$

$D=144+4\cdot 1\cdot(900-11)=144+3600-44=3700$

$x=\frac{12\pm 10\sqrt{37}}{2} \Rightarrow x=\left[\begin{array}{l} 6+5\sqrt{37} \\ 6-5\sqrt{37} \end{array}\right.$

b_3 и b_8

Такое возможно, напр., при $q=2\sqrt{37}$:

$6-5\sqrt{37}$; $6-3\sqrt{37}$; $6-\sqrt{37}$; $6+\sqrt{37}$; $6+3\sqrt{37}$; $6+5\sqrt{37}$

b_3 $\quad b_5$ $\quad b_6$ $\quad b_8$

Ответ: $a=4$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.

Ф: сост. из всех точек с коорд. $(x;y)$, $\left|x-\frac{15}{2}+\frac{y}{6\sqrt{3}}\right|+\left|x-\frac{15}{2}-\frac{y}{6\sqrt{3}}\right|\leqslant 3.$ удовл. этому нер-ву. Непр. повернули на угол π против час. стрелки. $S=?$ (которую замела фигура Ф).

Решение.

Изобразим решение этого нер-ва на коорд. плоск. $(x;y)$.

$\frac{15}{2}=7,5$

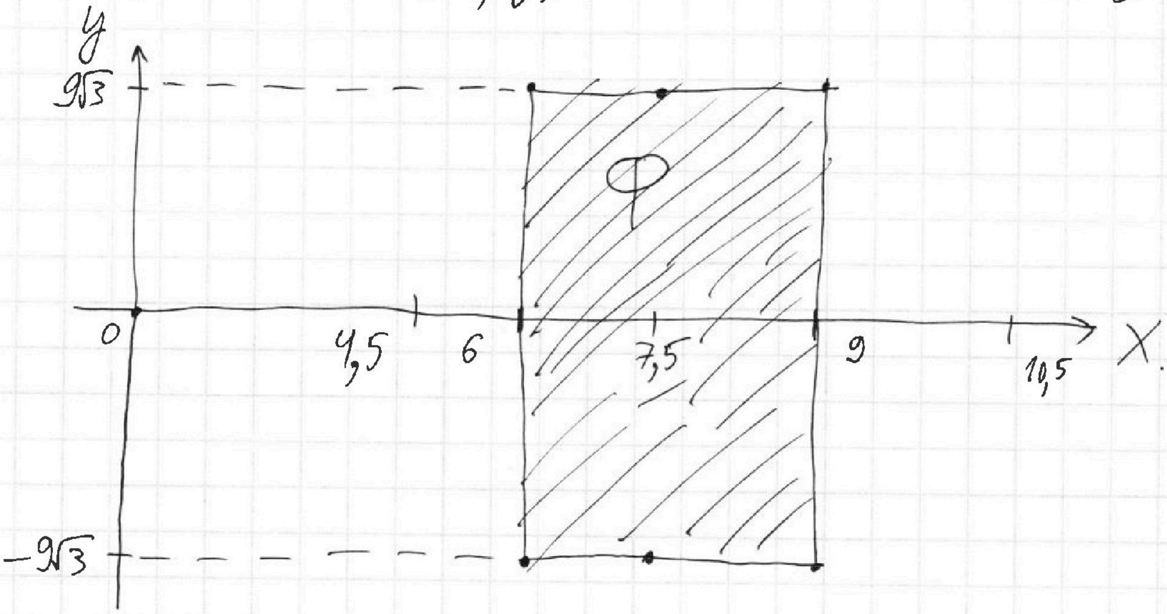


график симм. отн. прямой $x=7,5$ и отн. прямой $y=0$.

$\left(x-\frac{15}{2}\right)\in[-1,5;\ 1,5]$

$\frac{y}{6\sqrt{3}}\in[-1,5;\ 1,5].$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Ф – прямоугольник, огр. прямыми
$y=-9\sqrt{3}$; $y=9\sqrt{3}$; $x=6$; $x=9$.

(можно показать, рассм. 4 случая:

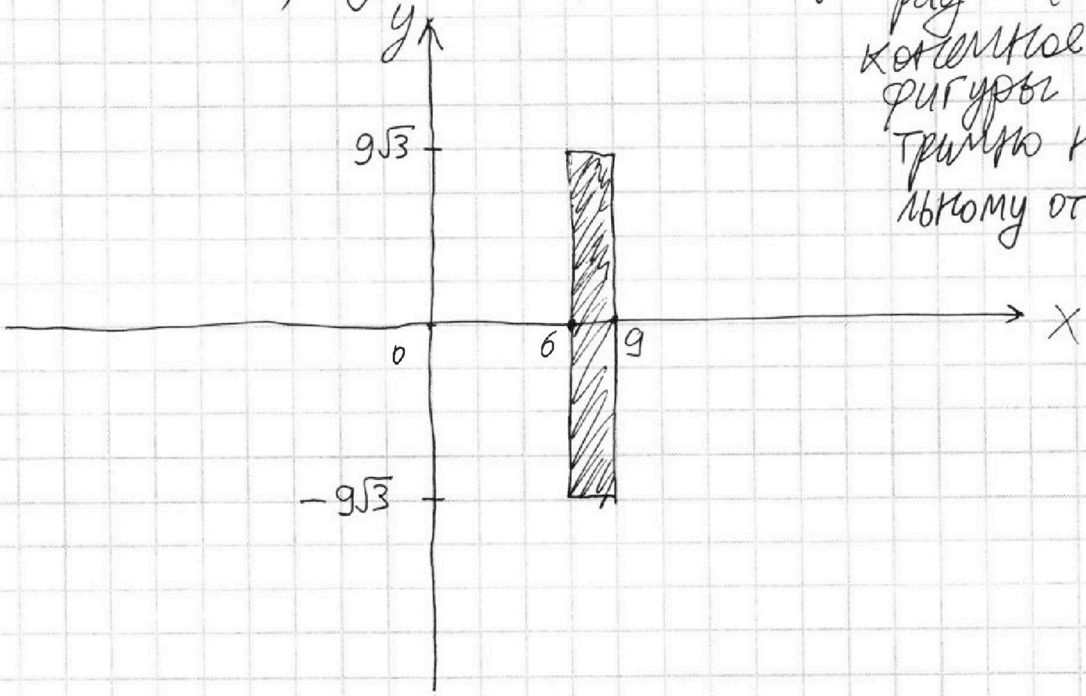
1) $x \geq 7{,}5$; $y \geq 0$

2) $x \geq 7{,}5$; $y < 0$.

3) $x < 7{,}5$; $y \geq 0$

4) $x < 7{,}5$; $y < 0$.).

π рад = 180°; конечное пол. фигуры симметрично начальному отн. оси y.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц **в решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

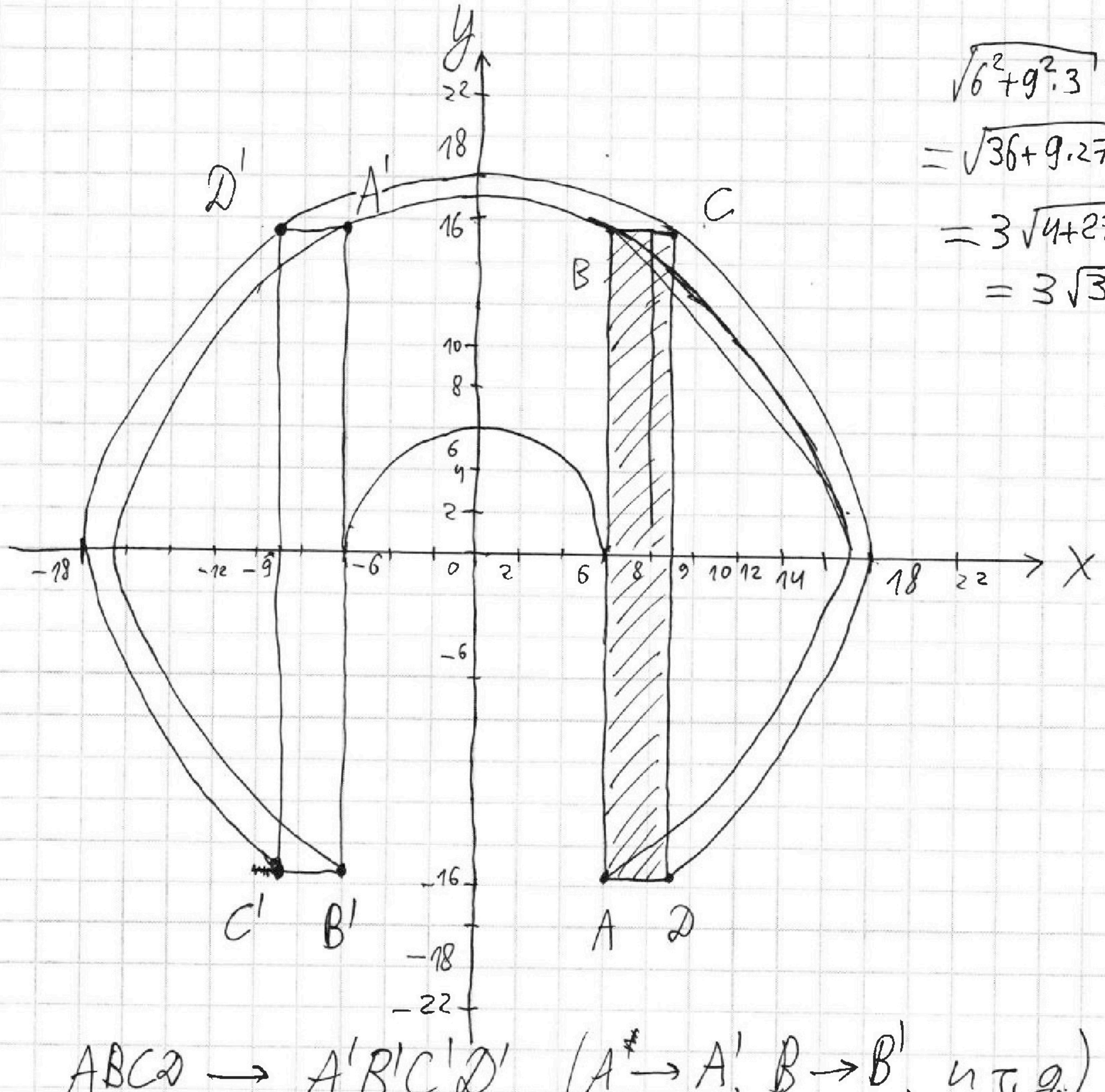
СТРАНИЦА 3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Фигура Ф будет заметать совокупность дуг окружностей.

$r_{min} = 6$ (изначально: т. $(6; 0)$).

$r_{max} = \sqrt{9^2 + (9\sqrt{3})^2} = 9\sqrt{1+3} = 18$ (изначально: точки $(9; 9\sqrt{3})$ и $(9; -9\sqrt{3})$.



$\sqrt{6^2 + 9^2 \cdot 3} =$

$= \sqrt{36 + 9 \cdot 27} =$

$= 3\sqrt{4+27} =$

$= 3\sqrt{31}$.

$ABCD \rightarrow A'B'C'D'$ ($A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$, и т.д.)

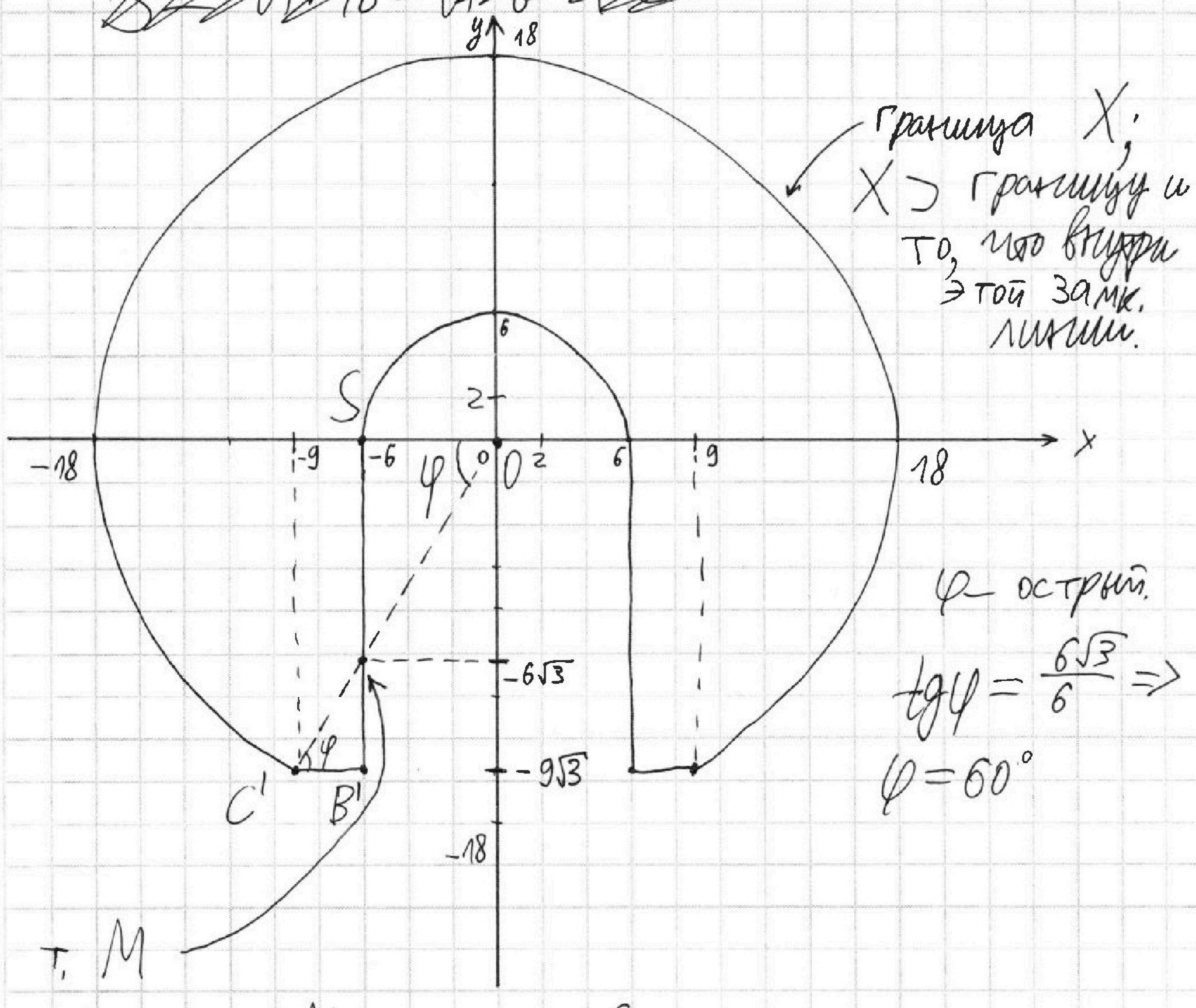
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть X — фигура, кот. замела при пов. фигура Ф; изобразим X на (x;y):

~~$8 = \pi \cdot 18^2 - \pi \cdot 6^2$~~



φ — острый.

$tg\varphi = \frac{6\sqrt{3}}{6} \Rightarrow$

$\varphi = 60^\circ$

$M_x = -6; \quad M_y = -9\sqrt{3} \cdot \frac{-6}{-9} = -6\sqrt{3}.$

$S_{\Delta OMS} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3} \qquad S_{\Delta C'B'M} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3}.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$S = \pi\cdot 18^2\cdot\frac{1}{2} - \pi\cdot 6^2\cdot\frac{1}{2} + 2\left(\frac{\pi\cdot 18^2\cdot\varphi}{360^\circ} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\sqrt{3} + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\sqrt{3}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot 6^2(3^2-1) + 2\cdot\frac{\pi\cdot 18^2}{6} - 6^2\sqrt{3} + 3^2\sqrt{3} =$$
$$= \frac{\pi}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot 18\cdot 8 + 2\pi\cdot 18\cdot 3 - 36\sqrt{3} + 9\sqrt{3} =$$
$$= 18\pi(8+6) - 27\sqrt{3} = 14\cdot 18\pi - 27\sqrt{3} =$$
$$= 252\pi - 27\sqrt{3}.$$

$(14\cdot 18 = (16-2)(18+2) = 256-4 = 252)$

Ответ: $S = 252\pi - 27\sqrt{3}$.

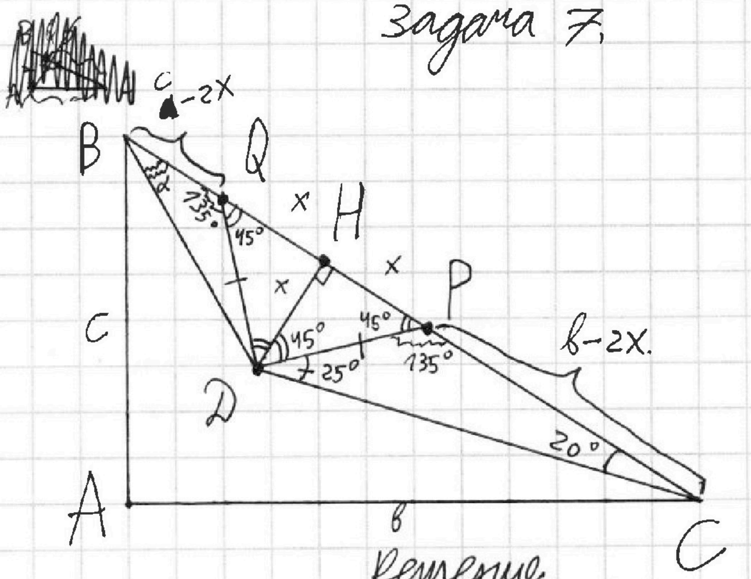
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 7.



Дано: $\triangle ABC$ прямоуг., BC — гип., $\{Q; P\} \in BC$, $AB = BP$, $AC = CQ$, Т. D внутр. $\triangle ABC$, $DP = DQ$, $\angle PDQ = 90°$, $\angle DCB = 20°$.

Найти: $\angle DBC = ?$

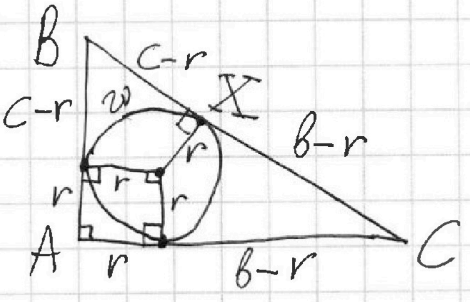
Решение.

$AB + AC > BC$ (нер-во $\triangle$), $\Rightarrow BP + CQ > BC$, $\Rightarrow Q$ между B и P. $DP = DQ \Rightarrow D \in$ сер. перп. отрезка PQ. Пусть H — середина PQ, $\Rightarrow DH \perp PQ$. $\triangle DPQ$: $PD = QD$, $\angle D = 90° \Rightarrow \angle P = \angle Q = 45°$. $\Rightarrow \angle HDP = \angle HDQ = 45°$. $\angle BQD = 135°$ (смеж. с $45°$), $\angle DPC = 135°$. $\triangle DPC$: $\angle PDC = 180° - 135° - 20° = 25°$. Пусть $\angle DBC = \alpha$, $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$, $QH = PH = x$. $\triangle PDQ$ р/б и прямоуг., $\Rightarrow DH$ — высота, мед., бисс., сер. перп. $\Rightarrow DH = x$. $BQ = BP - QP = \cancel{a}\,c - 2x$. $CP = CQ - QP = b - 2x$. Т. Пифагора для $\triangle ABC \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$.

$BC = a = c - 2x + x + x + b - 2x = b + c - 2x$.

$a = b + c - 2x$. $2x = b + c - a$. $x = \dfrac{b+c-a}{2}$.

Впишем окр. ω в $\triangle ABC$:



Испол. то, что радиус, провед. в т. кас., $\perp$ касат.; и отр. касательных, провед. к окр. из 1 точки, равны;

$a = b + c - 2r$.

$r = \dfrac{b+c-a}{2}$;

Пусть $\omega \cap BC = X$, $BX = c - r$, $CX = b - r$.

Так же $BH = c - x$, $CH = b - x$,

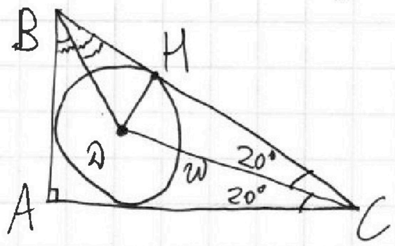
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

следовательно, $X \equiv H$, $x = r$, т.е. H – точка кас. впис. окр. ω и стороны BC; $HD \perp BC$, $HD = x = r$, т. е. D – центр. впис. окр., он равноуд. от a, b, c, $\Rightarrow$ лежит на $\cap$ бисс. углов A, B, C; $\Rightarrow$ CD – бисс. $\angle ACB \Rightarrow$ $\angle ACD = \angle BCD = 20°$, $\Rightarrow$ $\angle ACB = 40°$, $\Rightarrow$ $\angle ABC = 180° - 90° - 40° = 50°$, BD – бисс. $\angle ABC$, $\Rightarrow$ $\angle ABD = \angle HBD$, $\angle ABD + \angle HBD = \angle ABC = 50°$;



$\Rightarrow$ $\angle ABD = \angle CBD = 25°$.

$$\boxed{\angle DBC = 25°}$$

Ответ: $\angle DBC = 25°$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!