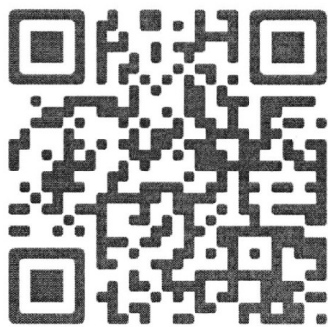




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.
4. [4 балла] В телеигре ведунций берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть ведущий изначально взял n коробок.

Тогда вероятность ~~до~~ ~~раз~~ открытия 7 коробок равна $P = \frac{C_n^2}{C_n^5}$.

Пусть шран открыл 7 коробок, в которых было $i \in [0; 3]$ шариков. Вероятность этого равна $P_i = \frac{C_{n-3}^{7-i}}{C_n^7} \cdot C_i^3$, а вероятность выигрыша после этого равна $P'_i = \frac{C_{n-7}^2}{C_{n-7}^{5-i}}$.

Тогда общая вероятность выигрыша "после" равна:

$$P' = \sum P_i \cdot P'_i = \sum \frac{C_{n-3}^{7-i}}{C_n^7} \cdot \frac{C_{n-7}^2}{C_{n-7}^{5-i}} = \frac{C_{n-7}^2}{C_n^7} \sum \frac{C_{n-3}^{7-i}}{C_{n-7}^{5-i}} = \frac{C_{n-7}^2}{C_n^7} \left(\frac{C_{n-3}^7}{C_{n-7}^5} + \frac{C_{n-3}^6}{C_{n-7}^4} + \frac{C_{n-3}^5}{C_{n-7}^3} + \frac{C_{n-3}^4}{C_{n-7}^2} \right) = \frac{(n-7)!}{2(n-9)!} \left(\frac{(n-3)!}{7!(n-10)!} + \dots \right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

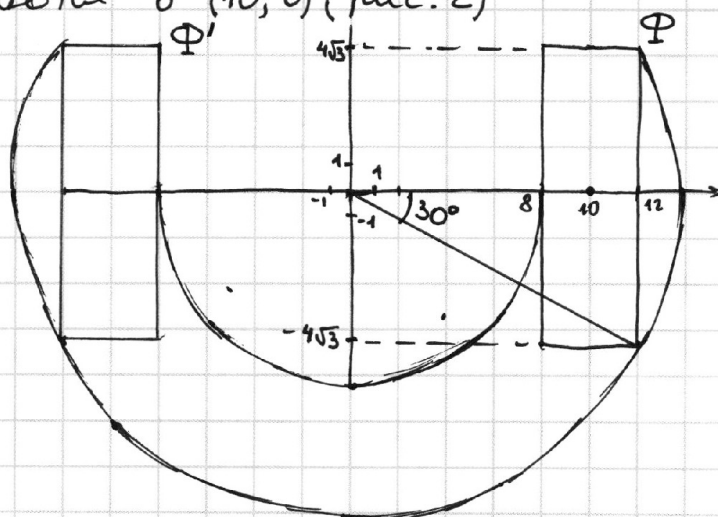
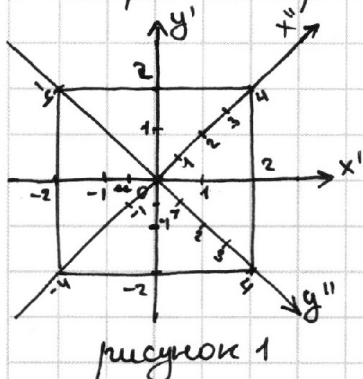
1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ура Неравенство $|x''| + |y''| \leq 4$ в плоскости $Ox''y''$

задаёт ~~квадрат~~ квадрат с диагональными сторонами (рис. 1)

$x'' = x' + y'$, а $y'' = x' - y'$, то в м-ти $Ox'y'$ эта фигура является квадратом со сторонами, параллельными осям (рис. 1). Если $x' = x - 10$, а $y' = \frac{y}{2\sqrt{3}}$, то, с одной стороны, данная фигура-пр-к со сторонами $4 \times 8\sqrt{3}$, диагонали которого пересекаются в $(10; 0)$ (рис. 2)



Тогда понятно, что при указанном повороте Φ займёт фигуру с рис. 2. Дуги окр-ти имеют радиусы 8 и $8\sqrt{3}$. Тогда же этой фигуре равна $\frac{1}{2}S_{Б.кр.} - \frac{1}{2}S_{М.кр.} + S_{\Phi} + S_{сегм.} = \frac{1}{2}\pi(8\sqrt{3})^2 - \frac{1}{2}\pi 8^2 + 4 \cdot 8\sqrt{3} + \pi(8\sqrt{3})^2 \cdot \frac{1}{6} - 4\sqrt{3} \cdot 12 = 96\pi - 16\sqrt{3}$.

Ответ: $96\pi - 16\sqrt{3}$.

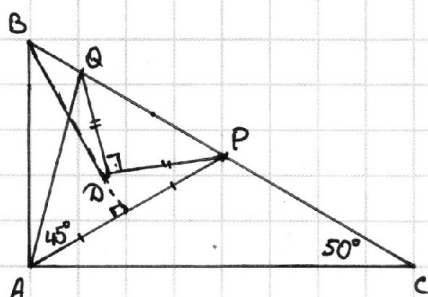


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}\angle QAP &= 90^\circ - \angle BAQ - \angle PAC = 90^\circ - (90^\circ - \angle QAC) - \\ &- (90^\circ - \angle BAP) = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle ABP - \frac{1}{2} \angle ACQ = \\ &= 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ = \frac{1}{2} \angle QDP.\end{aligned}$$

Зн-т, т.к. D к тому же равноудалена от Q и P , то она является центром его описанной окр-ти, поэтому D лежит на ср. перпендикуляре к AP . Но в равнобедренном $\triangle ABP$ ср. перп. совпадает с бис-сой, так что прямая BD — бис-са $\angle ABP$, то есть $\angle DBC = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$.

Ответ: 20° .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^3 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$$

$$D = a^4 - 4a^3 + \cancel{4a^2} + \cancel{4a^2} + 4a + 28 = a^4 - 4a^2 + 4a + 28$$

$$3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$$

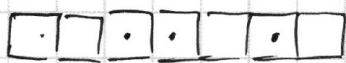
$$D = a^6 - 4a^5 + 4a^4 - \cancel{18} 72 + 12a^5$$

$$k_n = (k_1 + (n-1)d)$$

$$k_1 + 5d + k_1 + 6d = a^2 - 2a$$

$$(k_1 + 5d)(k_1 + 6d) = a^2 - a - 7$$

n



$$\Delta O: P = \frac{C_n^2}{C_n^5}$$

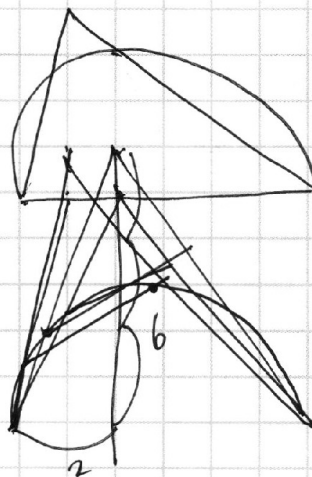
ПОСЛЕ: $\rightarrow$ ~~Реш~~ 0: $P_0 = \frac{C_{n-3}^7}{C_n^7}$, $P_0^n = \frac{C_{n-7}^2}{C_{n-7}^5}$

$$1: P_1 = 3 \cdot \frac{C_{n-3}^6}{C_n^6}, P_1^n = \frac{C_{n-7}^2}{C_{n-7}^4}$$

$$2: P_2 = 3 \cdot \frac{C_{n-3}^5}{C_n^5}, P_2^n = \frac{C_{n-7}^2}{C_{n-7}^3}$$

$$3: P_3 = \frac{C_{n-3}^4}{C_n^4}, P_3^n = \frac{C_{n-7}^2}{C_{n-7}^2}$$

$$\frac{(n-3)!}{(7-i)!} \cdot \frac{(n-7)!}{1}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

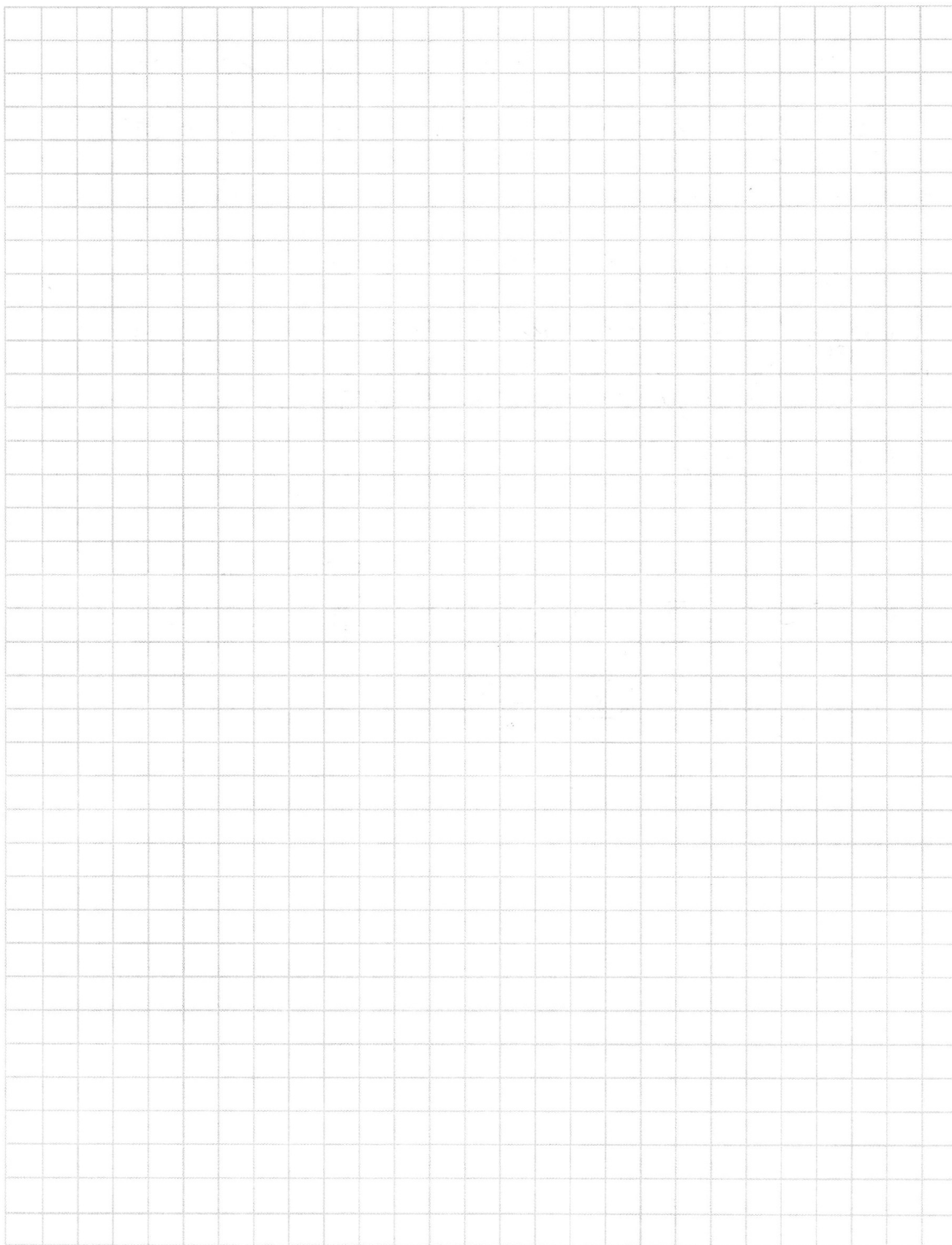
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



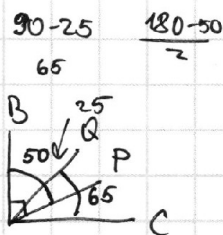
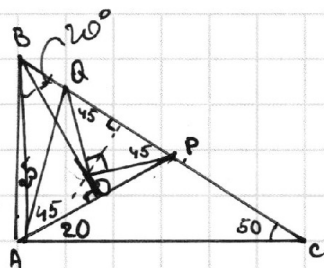
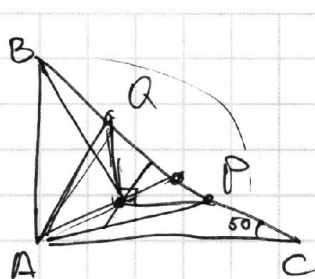


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$QP = BC - BQ - PC =$$

$$BQ \cdot BP = BD^2 - QD^2$$

$$= BC - (BC - AB) - (BC - AB) = AC + AB - BC$$

$$(BC - BQ)(BC - PC) = BD^2 - QD^2$$

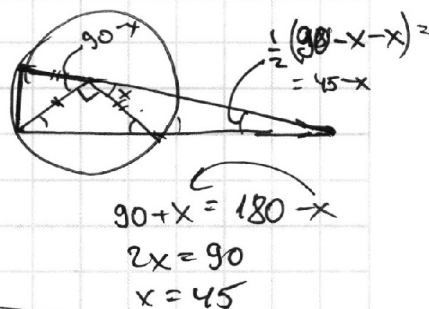
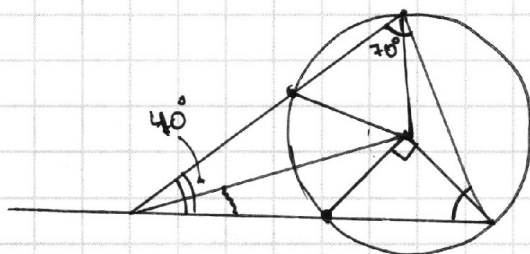
$$(BC - AC)(BC - AB) = BC^2 - BC(AC + AB) + AC \cdot AB$$

$$BD^2 = BC^2 - BC(AC + AB) + AC \cdot AB + BC^2 + (AC + AB)^2 - 2BC(AC + AB) =$$

$$BC \cdot AB - AC \cdot AB$$

$$BD^2 = BC \cdot AB - AC \cdot AB + BC^2 + AC^2 + AB^2 + 2AC \cdot AB - 2AC \cdot BC - 2AB \cdot BC$$

$$=$$



$$\begin{array}{r} \times 9 \\ \times 9 \\ \times 9 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 81 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$$

$$(10 - 1)^3 = 10^3 - 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 - 1$$

$$\begin{array}{r} 1000 \\ - 300 \\ \hline 700 \\ - 30 \\ \hline 670 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 9999 \dots 99 \\ \times 9999 \dots 99 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 99 \dots 9999 \\ \times 99 \dots 9999 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \dots 9999 \dots 0000 \\ - \underbrace{1000 \dots 0}_{n} \underbrace{00 \dots 0}_{2n} \\ \hline \underbrace{99 \dots 9}_{n} \underbrace{70 \dots 0}_{2n} \end{array}$$

$$(10^n - 1)^3 = 10^{3n} - 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n - 1$$

$$10^6 - 3 \cdot 10^4$$

$$\begin{array}{r} \underbrace{1000000}_{n-1} \\ \underbrace{10000} \end{array}$$

$$18901$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

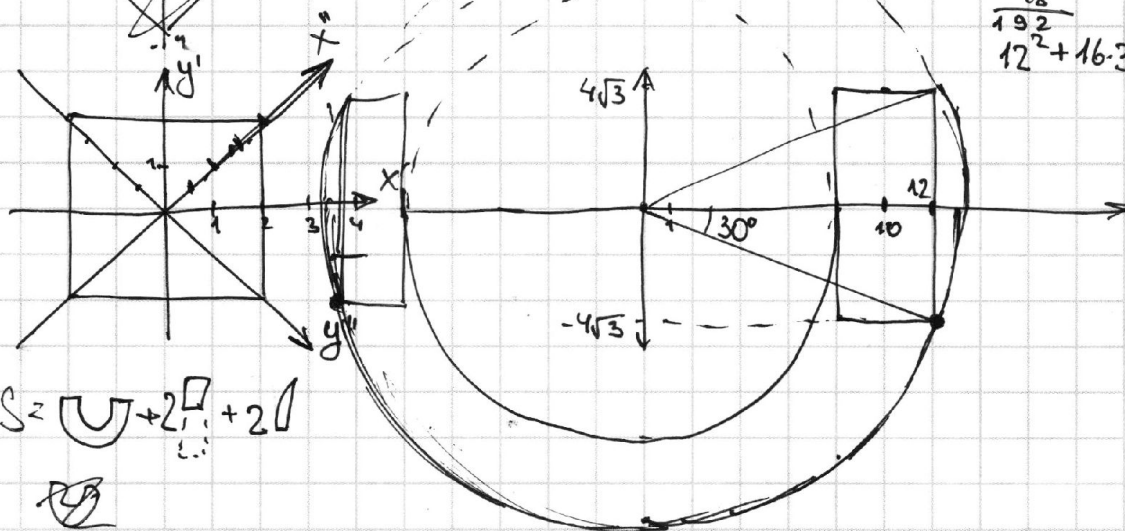
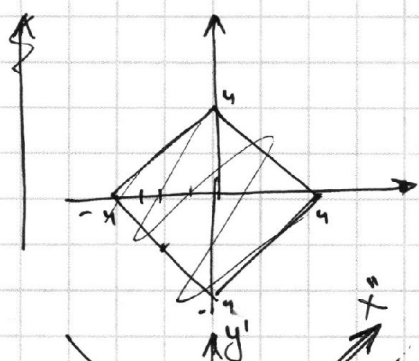
$$\left| x - 10 + \frac{y}{\sqrt{3}} \right| + \left| x - 10 - \frac{y}{\sqrt{3}} \right| \leq 4 \quad y' = \frac{y}{\sqrt{3}} \rightarrow y = \sqrt{3} y'$$

$$x' = x - 10 \rightarrow x = x' + 10$$

$$|x' + y'| + |x' - y'| \leq 4$$

$$\begin{cases} x' + y' = x'' \\ x' - y' = y'' \end{cases}$$

$$|x''| + |y''| \leq 4$$



$$\begin{aligned} 144 + 48 &= \\ 192 & \\ 12^2 + 16 \cdot 3 &= 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$S = \cup + 2\pi + 2\pi$$

РР

$$\frac{1}{2} \odot - \frac{1}{2} \odot + \square + \square = \frac{1}{2}$$

$$S_{\Delta} = \pi R^2 \cdot \frac{1}{6} - 4\sqrt{3} \cdot 12$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} 64 \cdot 3\pi &= 32 \cdot 3\pi \\ - 32\pi & \\ + 32\pi & \end{aligned}$$

$$192 = 180 + 12$$

$$\begin{aligned} 90 + 6 & \\ - 32 & \\ 16 & \end{aligned}$$

$$4 \cdot 8\sqrt{3} - 4 \cdot 13 \cdot 12$$

$$\begin{aligned} 32\sqrt{3} - 48\sqrt{3} & \\ - 16\sqrt{3} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum &\leq 2 + 5 + 5 + 6 = \\ &= 18 \end{aligned}$$