



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1 $x, y, z \neq 0$

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2 \\ yz = -2x + x^2 \\ zx = -2y + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^2 - 2z - xy = 0 \\ x^2 - 2x - yz = 0 \\ y^2 - 2y - zx = 0 \end{cases}$$

Найти: $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$

По условию ~~перевести~~ система имеет хотя бы одно решение, значит можем воспользоваться т. Виета для полученных кв. уравнений.

$z^2 - 2z - xy = 0$, z_1, z_2 - корни
По т. Виета $\begin{cases} z_1 + z_2 = 2 \\ z_1 z_2 = -xy \end{cases}$

Аналогично для остальных:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2 \\ z_1 z_2 = -xy \\ x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = -yz \\ y_1 + y_2 = 2 \\ y_1 y_2 = -xz \end{cases}$$

$$y_1 y_2 = -x_1 z_1 = \frac{-y_1 z_1 \cdot -z_1}{x_2} = \frac{y_1 z_1^2}{x_2}$$

$$y_2 = \frac{z_1^2}{x_2}$$

$$\begin{cases} xy = z(z-2) \\ yz = x(x-2) \\ zx = y(y-2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 &= \\ &= \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 = \\ &= \frac{(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2}{(xyz)^2} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2}$

$$h = \underbrace{99 \dots 9}_{30001}$$

$$h = 9 \cdot \underbrace{11 \dots 1}_{30001}$$

$$h^3 = 9^3 \cdot (1111 \dots 1)^3$$

Ответ: 10000

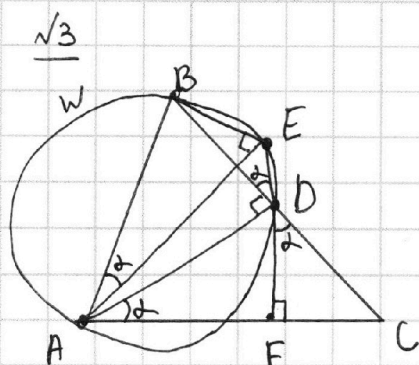


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: AB-диаметр окр. ω

$DF \perp AC$

$E = DF \cap (\text{окр. } \omega)$

$AC = 10$

$AB = 8$

$BE = 6$

Найти: AF

Решение:

AB-диаметр, значит $\angle BEA = \angle BDA = 90^\circ$, т.к. они опираются на диаметр.

Пусть $\angle BAE = \alpha$, тогда $\angle BDE = \alpha$ (т.к. они с $\angle BAE$ вписанные в окр. ω и опираются на одну дугу)

$\angle FDC = \angle BDE = \alpha$ (т.к. они вертикальные, т.к. по условию $D \in EF$)

$\angle ADC = 180^\circ - \angle BDA = 90^\circ$ (смежные)

$\angle DCF = 90 - \alpha$ (по сумме углов $\triangle FDC$)

Тогда $\angle DAC = \alpha$ (по сумме углов $\triangle ADC$)

Получаем, что $\triangle ABE \sim \triangle DCF \sim \triangle ACD$ (по двум углам)

Тогда из подобия этих треугольников следует:

$$\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{DC} = \frac{DC}{FC} \Rightarrow \frac{8}{6} = \frac{10}{DC} = \frac{DC}{FC}$$

$$\text{Тогда } DC = \frac{60}{8}, \frac{10}{DC} = \frac{DC}{FC} \Rightarrow FC = \frac{60 \cdot 60}{10 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{45}{8}$$

$$AF = AC - FC, AF = 10 - \frac{45}{8} = \frac{80 - 45}{8} = \frac{35}{8}$$

$$\text{Ответ: } AF = \frac{35}{8}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14

1) Посчитаем какова вероятность угадать в 1 случае (когда он открывает 5 коробок)

Это отношение выигрышных вариантов ко всем возможным.

Итого всего коробок n штук.

Тогда все варианты выбора 5 коробок C_n^5

А выбрать 5 коробок, где в трех из них есть шарик это C_{n-3}^2 (т.е. мы фиксируем 3 правильные коробки и из оставшихся $n-3$ коробок выберем недостающие 2), тогда вер. победы $\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$

2) Теперь посчитаем для 2 случая, где он открывает 7 коробок.

Всех случаев C_n^7 , а с правильными коробками C_{n-3}^4 (аналогично с 1 случаем, только недостаёт теперь 4 коробки)

Тогда в 1) случае вероятность выигрыша равна

$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}, \text{ а во 2) случае } \frac{C_{n-3}^4}{C_n^7}$$

Удобно понять во сколько раз вероятность увеличилась, разделив эту вторую вер. на первую.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☒☐☐☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$C_{n-3}^4 \cdot C_n^5$~~
 ~~$C_n^7 \cdot C_{n-3}^2$~~

~~Получаем C_n^7~~

Суммаем по формуле:
$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Получаем

$$\frac{C_{n-3}^4 \cdot C_n^5}{C_n^7 \cdot C_{n-3}^2} = \frac{(n-3)! \cdot n! \cdot (n-7)! \cdot 7! \cdot (n-5)! \cdot 2!}{(n-7)! \cdot 4! \cdot (n-5)! \cdot 5! \cdot n! \cdot (n-3)!} =$$
$$= \frac{7! \cdot 2!}{4! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{14}{4} = 3 \frac{2}{4} = 3 \frac{1}{2} = 3,5$$

т.е. вероятность ^{выиграть} увеличилась в 3,5 раза.

Ответ: в 3,5 раза.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5

$$x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0, \quad \leftarrow X_6, X_7 - \text{корни}$$

Тогда по т. Виета:

$$\begin{cases} X_6 + X_7 = a^2 - 2a \\ X_6 X_7 = a^2 - a - 7 \end{cases}$$

$$3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0, \quad \leftarrow X_4, X_9 - \text{корни}$$

По т. Виета:

$$\begin{cases} X_4 + X_9 = \frac{a^3 - 2a^2}{3} \\ X_4 X_9 = \frac{6 - a^5}{3} \end{cases}$$

По условию X_4, X_6, X_7, X_9 - члены арифметической прогрессии
любая её разность - d . по номерам соответственно 4, 6, 7, 9.

$$\text{Тогда } X_6 = X_4 + 2d, \quad X_7 = X_4 + 3d, \quad X_9 = X_4 + 5d.$$

Теперь исходя из этого перепишем ~~то~~ ранее полученные
системы (пусть они должны выполняться одновременно, значит
это всё одна система)

$$\begin{cases} 2X_4 + 5d = a^2 - 2a \\ (X_4 + 2d)(X_4 + 3d) = a^2 - a - 7 \\ 2X_4 + 5d = \frac{a^3 - 2a^2}{3} \\ X_4(X_4 + 5d) = \frac{6 - a^5}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2X_4 + 5d = a^2 - 2a \\ 2X_4 + 5d = \frac{a^3 - 2a^2}{3} \\ X_4^2 + 5X_4d + 6d^2 = a^2 - a - 7 \\ X_4^2 + 5X_4d = \frac{6 - a^5}{3} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Получаем, что $2x_1 + 5d = a^2 - 2a = \frac{a^3 - 2a^2}{3}$

решим уравнение:
 $a(a-2) = \frac{a^2(a-2)}{3}$

$$\begin{cases} a=0 \\ a=2 \\ a \neq 1 = \frac{a}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} a=0 \\ a=2 \\ a=3 \end{cases}$$

Осталось проверить подходят ли эти корни под наши изначальные условия.

Также из системы, мы получаем, что
 $x_1^2 + 5x_1d + 6d^2 = \frac{6-a^5}{3} + 6d^2 = a^2 - a - 7$

1) Если $a=0$, то $\frac{6}{3} + 6d^2 = -7$

$$6d^2 = -9$$

$$d^2 = -\frac{3}{2}$$

Таких d не существует, т.к. квадрат всегда больше 0, значит $a=0$ не подходит.

Осталось проверить $a=2$ и $a=3$.

2) Если $a=2$, то $\frac{6-32}{3} + 6d^2 = -5$

$$6d^2 = -5 + \frac{26}{3} = \frac{11}{3}$$

Итак, $d = \pm \sqrt{\frac{11}{18}}$ и $d = \pm \sqrt{\frac{11}{18}}$ существуют.

~~3) Если $a=3$, то $\frac{6-243}{3} + 6d^2 = -79$~~

$$6d^2 = -79 + \frac{26}{3} = -\frac{221}{3}, \quad 6d^2 = \frac{26-15}{3}, \quad d^2 = \frac{11}{6 \cdot 3}$$

$$d = \pm \frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{22}}{6}$$

т.е. $a=2$ нам подходит, т.к. есть разность при которой есть прогрессия.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) Если $a=3$: $\frac{6-243}{3} + 6d^2 = -1$

$$6d^2 = 79-1$$

$$d^2 = \frac{78}{6} = 13$$

$$d = \pm\sqrt{13}$$

Значит при $a=3$ такая последовательность существует со ~~с~~ разностью $d = \pm\sqrt{13}$.

Получим, что арифм. последовательность существует только при $a=2$ или $a=3$.

Ответ: ~~1~~ 2; 3.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

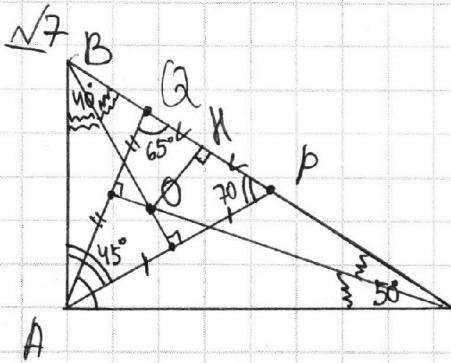
6
☐

7
☒

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $BQ = AB$, $\triangle ABC$ - прямоугольный
 $QC = AC$ $\angle A = 90^\circ$

$BP = BQ$
 $\angle POQ = 90^\circ$
 $\angle BCA = 50^\circ$

Найти: $\angle BOC$.

Решение:

$\angle BCA = 50^\circ \Rightarrow \angle ABC = 40^\circ$ (по сумме углов в $\triangle ABC$)

$QC = AC \Rightarrow \angle AQC = \angle QAC$ ($\triangle AQC$ - равноб.)

$BQ = AB \Rightarrow \angle BAP = \angle BPA$ ($\triangle ABP$ - равноб.)

Тогда по сумме углов в $\triangle BPA$: $\angle BPA = \frac{180 - 40}{2} = 70^\circ$,

а по сумме углов в $\triangle QCA$: $\angle AQC = \frac{180 - 50}{2} = 65^\circ$

Тогда по сумме углов в $\triangle AQP$: $\angle QAP = 180 - 65 - 70 = 45^\circ$.

Проведем биссектрисы углов $\angle B$ и $\angle C$, пусть они пересекутся в точке O , тогда O - центр вписанной окружности $\triangle ABC$.

Также это будут биссектрисы равнобедренных $\triangle ABP$ и $\triangle QCA$, т.е. будут и их высоты и медианы, т.к. они равнобедренные.

Тогда получаем, что O - это центр описанной окружности $\triangle AQP$, т.к. лежит на пересечении его сторон AP и AQ .

Тогда опустим перпендикуляр $OH \perp BC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

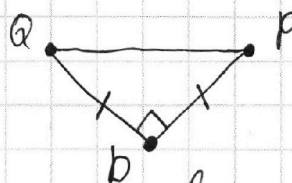
Тогда $OH = HP$ (т.к. ~~OH~~ ^{OH} будет сер. пером, т.к. O - центр опис. окр. (AQP))

Тогда в $\triangle QOP$ совпадают медиана и высота, значит он равнобедренный ($QO = OP$)

Примем $\angle QOP = 90^\circ$, т.к. это центральный угол в окр. (AQP) и он опирается на ту же дугу что и вписанный $\angle QAP$, значит $\angle QOP = 2\angle QAP = 90^\circ$

Теперь посмотрим на точку D из условия.

$$QD = DP, \angle PDQ = 90^\circ$$



до того же самое мы можем сказать и про точку O .
 QP - фиксированный отрезок и по условию точка D находится внутри $\triangle ABC$, так и точка O , значит они находятся по одну сторону от QP , значит они совпадают, т.к. такой треугольник мы можем построить единственным способом.

Значит $\angle DBC = \angle OBC = 20^\circ$ (т.к. BO - биссектриса, а $\angle ABC = 40^\circ$).

Ответ: 20° .



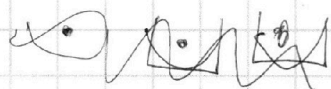
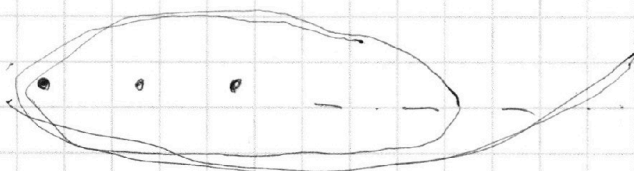
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2 \\ yz = -2x + x^2 \\ zx = -y + y^2 \end{cases}$$



$$1 - \frac{C_{n-3}^5}{C_n^5}$$

$$\frac{C_n^7 - C_{n-3}^7}{C_n^7} =$$

$$1 - \frac{C_{n-3}^7}{C_n^7}$$

$$\frac{C_n^5 - C_{n-3}^5}{C_n^5}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\begin{aligned} & \frac{C_n^5 \cdot (C_n^7 - C_{n-3}^7)}{C_n^7 \cdot (C_n^5 - C_{n-3}^5)} = \\ & \frac{C_n^5 \cdot (C_n^7 - C_{n-3}^7)}{C_n^7 \cdot (C_n^5 - C_{n-3}^5)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{n! \cdot (n-5)! \cdot 5!}{n! \cdot (n-7)! \cdot 7!}$$

$$\begin{aligned} & \frac{25}{n} \cdot \frac{112}{2} \cdot \frac{125}{25} \cdot \frac{35}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{2! \cdot (n-5)!}{100} \\ & \frac{25}{n} \cdot \frac{112}{2} \cdot \frac{125}{25} \cdot \frac{35}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{2! \cdot (n-5)!}{100} \end{aligned}$$

$$\frac{C_{n-3}^2 \cdot C_n^7}{C_n^5 \cdot C_{n-3}^4} = \frac{n! \cdot (n-5)! \cdot 5! \cdot (n-3)!}{(n-7)! \cdot 7! \cdot n! \cdot (n-3)!}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, including calculations, geometric diagrams, and algebraic expressions.

Calculations:

- Top left:
$$\begin{array}{r} 8 \\ 99 \\ 1 \times 99 \\ \hline 891 \\ + 891 \\ \hline 1782 \\ \times 9801 \\ \hline 174180 \\ 142209 \\ \hline 1741809 \\ + 1741809 \\ \hline 3483618 \end{array}$$
- Top right:
$$\left(9 \cdot 10^{30001} + \dots + 9 \right)^3 =$$

$$= 9 \left(10^{30001} + 10^{30000} + \dots + 1 \right)^3 =$$

$$= 729 \left(1111111111 \dots \right)^3$$
- Middle right:
$$\begin{array}{r} \times 111 \\ 111 \\ \hline 111 \\ + 111 \\ \hline 12321 \\ \times 111 \\ \hline 111 \\ 12321 \\ \hline 1367631 \end{array}$$
- Bottom right:
$$\begin{array}{r} \times 1111 \\ 1111 \\ \hline 1111 \\ + 1111 \\ \hline 123321 \\ \times 1111 \\ \hline 1111 \\ 123321 \\ \hline 1367631 \end{array}$$

Geometric Diagrams:

- Left: A circle with points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, AA, AB, AC, AD, AE, AF, AG, AH, AI, AJ, AK, AL, AM, AN, AO, AP, AQ, AR, AS, AT, AU, AV, AW, AX, AY, AZ, BA, BB, BC, BD, BE, BF, BG, BH, BI, BJ, BK, BL, BM, BN, BO, BP, BQ, BR, BS, BT, BU, BV, BW, BX, BY, BZ, CA, CB, CC, CD, CE, CF, CG, CH, CI, CJ, CK, CL, CM, CN, CO, CP, CQ, CR, CS, CT, CU, CV, CW, CX, CY, CZ, DA, DB, DC, DD, DE, DF, DG, DH, DI, DJ, DK, DL, DM, DN, DO, DP, DQ, DR, DS, DT, DU, DV, DW, DX, DY, DZ, EA, EB, EC, ED, EE, EF, EG, EH, EI, EJ, EK, EL, EM, EN, EO, EP, EQ, ER, ES, ET, EU, EV, EW, EX, EY, EZ, FA, FB, FC, FD, FE, FF, FG, FH, FI, FJ, FK, FL, FM, FN, FO, FP, FQ, FR, FS, FT, FU, FV, FW, FX, FY, FZ, GA, GB, GC, GD, GE, GF, GG, GH, GI, GJ, GK, GL, GM, GN, GO, GP, GQ, GR, GS, GT, GU, GV, GW, GX, GY, GZ, HA, HB, HC, HD, HE, HF, HG, HH, HI, HJ, HK, HL, HM, HN, HO, HP, HQ, HR, HS, HT, HU, HV, HW, HX, HY, HZ, IA, IB, IC, ID, IE, IF, IG, IH, II, IJ, IK, IL, IM, IN, IO, IP, IQ, IR, IS, IT, IU, IV, IW, IX, IY, IZ, JA, JB, JC, JD, JE, JF, JG, JH, JI, JJ, JK, JL, JM, JN, JO, JP, JQ, JR, JS, JT, JU, JV, JW, JX, JY, JZ, KA, KB, KC, KD, KE, KF, KG, KH, KI, KJ, KK, KL, KM, KN, KO, KP, KQ, KR, KS, KT, KU, KV, KW, KX, KY, KZ, LA, LB, LC, LD, LE, LF, LG, LH, LI, LJ, LK, LL, LM, LN, LO, LP, LQ, LR, LS, LT, LU, LV, LW, LX, LY, LZ, MA, MB, MC, MD, ME, MF, MG, MH, MI, MJ, MK, ML, MM, MN, MO, MP, MQ, MR, MS, MT, MU, MV, MW, MX, MY, MZ, NA, NB, NC, ND, NE, NF, NG, NH, NI, NJ, NK, NL, NM, NN, NO, NP, NQ, NR, NS, NT, NU, NV, NW, NX, NY, NZ, OA, OB, OC, OD, OE, OF, OG, OH, OI, OJ, OK, OL, OM, ON, OO, OP, OQ, OR, OS, OT, OU, OV, OW, OX, OY, OZ, PA, PB, PC, PD, PE, PF, PG, PH, PI, PJ, PK, PL, PM, PN, PO, PP, PQ, PR, PS, PT, PU, PV, PW, PX, PY, PZ, QA, QB, QC, QD, QE, QF, QG, QH, QI, QJ, QK, QL, QM, QN, QO, QP, QQ, QR, QS, QT, QU, QV, QW, QX, QY, QZ, RA, RB, RC, RD, RE, RF, RG, RH, RI, RJ, RK, RL, RM, RN, RO, RP, RQ, RR, RS, RT, RU, RV, RW, RX, RY, RZ, SA, SB, SC, SD, SE, SF, SG, SH, SI, SJ, SK, SL, SM, SN, SO, SP, SQ, SR, SS, ST, SU, SV, SW, SX, SY, SZ, TA, TB, TC, TD, TE, TF, TG, TH, TI, TJ, TK, TL, TM, TN, TO, TP, TQ, TR, TS, TT, TU, TV, TW, TX, TY, TZ, UA, UB, UC, UD, UE, UF, UG, UH, UI, UJ, UK, UL, UM, UN, UO, UP, UQ, UR, US, UT, UU, UV, UW, UX, UY, UZ, VA, VB, VC, VD, VE, VF, VG, VH, VI, VJ, VK, VL, VM, VN, VO, VP, VQ, VR, VS, VT, VU, VV, VW, VX, VY, VZ, WA, WB, WC, WD, WE, WF, WG, WH, WI, WJ, WK, WL, WM, WN, WO, WP, WQ, WR, WS, WT, WU, WV, WW, WX, WY, WZ, XA, XB, XC, XD, XE, XF, XG, XH, XI, XJ, XK, XL, XM, XN, XO, XP, XQ, XR, XS, XT, XU, XV, XW, XX, XY, XZ, YA, YB, YC, YD, YE, YF, YG, YH, YI, YJ, YK, YL, YM, YN, YO, YP, YQ, YR, YS, YT, YU, YV, YW, YX, YY, YZ, ZA, ZB, ZC, ZD, ZE, ZF, ZG, ZH, ZI, ZJ, ZK, ZL, ZM, ZN, ZO, ZP, ZQ, ZR, ZS, ZT, ZU, ZV, ZW, ZX, ZY, ZZ.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$$

$$D = (a^2 - 2a)^2 - 4(a^2 - a - 7) = a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 4a^2 + 4a + 28$$

$$x_6 x_7 = a^2 - a - 7$$

$$x_6 + x_7 = a^2 - 2a$$

$$\begin{cases} x_4 = x_1 + 3d \\ x_1 + 5d \end{cases}$$

$$x_6 x_7 = x_6(x_6 + d)$$

$$x_6 = x_4 + 2d$$

$$x_7 = x_4 + 3d$$

$$x_6 \neq x_7$$

$$x_4(x_4 + 5d) = \frac{6 - a^5}{3}$$

$$(x_4 + 2d)(x_4 + 3d) = a^2 - a - 7$$

$$2x_4 + 5d = a^2 - 2a$$

$$2x_4 + 5d =$$

$$x_4^2 + 5dx_4 = \frac{6 - a^5}{3}$$

$$x_4^2 + 5dx_4 + 6d^2 = a^2 - a - 7$$

$$18 = 9 \cdot 2 \quad \sqrt{11} \quad \sqrt{52}$$

$$a = 0, 2, 3$$

$$x_6 x_7 = -7$$

$$x_6 + x_7 = 0$$

$$x_6 = -x_7$$

$$\sqrt{2} + 2d = \sqrt{2}$$

$$6d^2 = a^2 - a - 7$$

$$2d = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{7}}{2}$$

$$\sqrt{7} + \sqrt{2} - \sqrt{7}$$

$$3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$$

$$x_4 x_9 = 6 - a^5$$

$$x_4 + x_9 = \frac{a^3 - 2a^2}{3}$$

$$2 - 81 = -79$$

$$x_6 + x_7 = 2x_4 + 5d$$

$$x_4 + x_9 = 2x_4 + 5d$$

$$x_4 + 5d$$

$$a^3 - 2a^2 = a^3 - 2a^2$$

$$6 - a^5 + 6d^2 = a^2 - a - 7$$

$$2d^2 + 6d^2 = -7$$

$$a(a-2) = \frac{a^2(a-2)}{3}$$

$$6d^2 = -\frac{7}{2a}$$

$$1 = \frac{3+15}{24}$$

$$a = 3$$

$$x_4 x_9 = 2$$

$$x_4 + x_9 = 0$$

$$x_4 = -\sqrt{2}$$

$$x_9 = \sqrt{2}$$

$$x_6 = -\sqrt{7}$$

$$x_7 = \sqrt{7}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$30001 \cdot 9$$

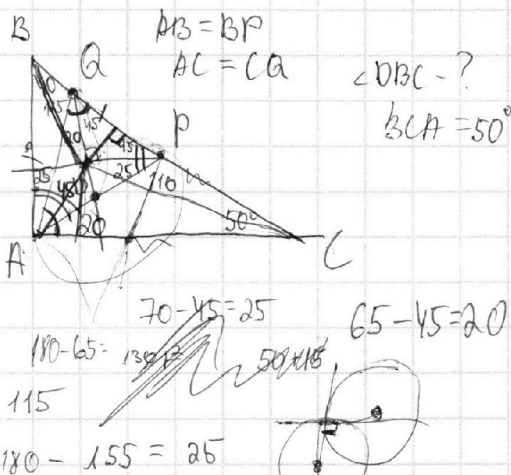
$$n = \overbrace{99 \dots 9}^{30001}$$

$$n^3 = (9 \cdot 10^{30001} + 9 \cdot 10^{30000} + \dots + 9)^3$$

$$n^3 =$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ 9 \\ 9 \\ \times 81 \\ 729 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 99 \\ \times 99 \\ 891 \\ 1 \end{array}$$



$$\begin{cases} xy = -2z + z^2 \\ yz = -2x + x^2 \\ zx = -2y + y^2 \end{cases}$$

$$xy = z(z-2)$$

$$\text{или } yz = x(x-2) \text{ или } zx = y(y-2)$$

$$\text{или } yz = x, 0 < z < 2$$

$$\left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{xz}{y}\right)^2 + \left(\frac{zy}{x}\right)^2 = \frac{(xy)^4 + (xz)^4 + (zy)^4}{x^4 y^4 z^4}$$

$$xy + yz + zx = -2(x+y+z) + x^2 + y^2 + z^2$$

$$y \times z$$

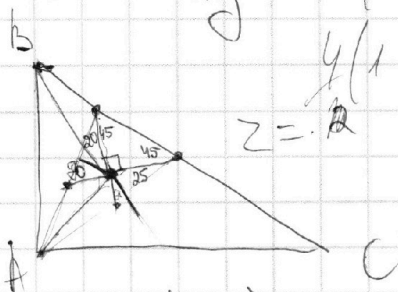
$$z^2 - 2z - xy = 0$$

$$D = 4 + 4xy = 4(1+xy) \geq 0$$

$$1+xy \geq 0$$

$$1+yz \geq 0$$

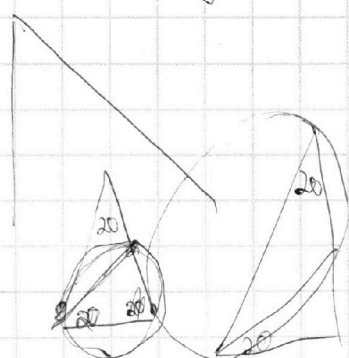
$$1+zx \geq 0$$



$$b = 4(1+xy)$$

$$z = \frac{2 \pm 2\sqrt{1+xy}}{2}$$

$$z = \pm 1 \pm \sqrt{1+xy}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

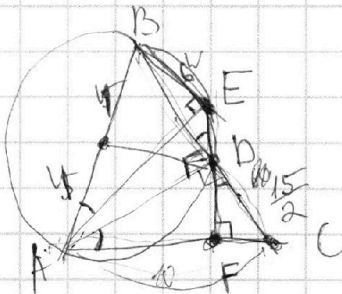
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2 \\ yz = -2x + x^2 \\ zx = -2y + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} xy + yz + zx &= \\ z(z-2) &= xy \\ z-2 &= \frac{xy}{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x, y, z &\neq 0 \quad (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = ? \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z + 4 &= \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4(x+y+z) + 12 &= \end{aligned}$$

$$\frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} = \frac{(xy)^4 + (xz)^4 + (yz)^4}{x^2 y^2 z^2}$$



$$\begin{aligned} AF &= ? \\ AC &= 10 \Rightarrow R = 5 \\ AB &= 8 \Rightarrow R = 4 \\ BE &= 6 \end{aligned}$$

$$\frac{15 \cdot 3}{10 \cdot 8 \cdot 4} = \frac{45}{8}$$

$$AE = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{BE} \quad \frac{10}{8} = \frac{DC}{6}$$

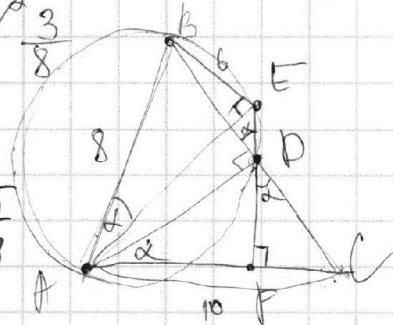
$$\frac{15}{3} = \frac{8}{-6}$$

$$60 = 80DC \quad DC = \frac{60}{80} = \frac{3}{4}$$

$$8FC = \frac{15 \cdot 8^3}{8}$$

$$AF = 10 - \frac{9 \cdot 3}{8} = \frac{80 - 3}{8} = \frac{77}{8}$$

$$FC = \frac{3}{8}$$



$$\begin{aligned} \frac{8}{6} &= \frac{60}{8 \cdot FC} \\ FC &= \frac{15 \cdot 8^3}{8 \cdot 8 \cdot 4} = \frac{45}{8} \end{aligned}$$

$$\frac{DC}{10} = \frac{6}{8}$$

$$DC = \frac{6 \cdot 10}{8}$$

$$\frac{DC}{FC} = \frac{8}{6}$$

$$FC \cdot 8 = \frac{6 \cdot 10 \cdot 6}{8}$$

$$FC = \frac{3 \cdot 10 \cdot 4}{8 \cdot 8 \cdot 4} = \frac{45}{8}$$

$$\frac{15 \cdot 3}{10 \cdot 8 \cdot 4} = \frac{45}{8}$$