



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 + (z + 3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\begin{cases} xy = 3z + z^2 & 1. \\ yz = 3x + x^2 & 2. \\ xz = 3y + y^2 & 3. \end{cases}$ Решение: ① $x, y, z \neq 0$, аналогично легко заметить, что не равны -3 , иначе д.о.о $z = -3$, тогда $xy = 0 \Rightarrow x$ или $y = 0$.

② Тогда поделю 1. на 2.

$$\frac{x}{z} = \frac{z(3+z)}{x(3+x)}$$

$$x^2(3+x) = z^2(3+z) = y^2(3+y)$$

Аналогично с $y^2(3+y)$

Кроме этого $z = \frac{xy}{3+z}$ из 1.

$$yz = 3x + x^2$$

$$\frac{y^2 x}{3+z} = x(3+x) \quad | : x \neq 0$$

$$y^2 = (3+x)(3+z) = 9 + xz + 3(x+z)$$

Аналогично $x^2 = (3+y)(3+z)$

$$z^2 = (3+x)(3+y)$$

$$\textcircled{3} (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = S$$

$$(x^2 + y^2 + z^2) + 6(x+y+z) + 9 \cdot 3 = S$$

$$9 \cdot 3 + xy + yz + xz + 6(x+y+z) + 9 \cdot 3 = S$$

$$12(x+y+z) + xy + yz + xz + 2 \cdot 9 \cdot 3 = S$$

$$\textcircled{4} x^2 + y^2 + z^2 = xy - 3z + yz - 3x + xz - 3y, \quad (\text{просто выразил из 1, 2, 3.})$$

тогда $\begin{cases} 3 = xy + yz + xz + 3(x+y+z) + 9 \cdot 3 \\ S = xy + yz + xz + 12(x+y+z) + 2 \cdot 9 \cdot 3 \end{cases}$

$$9(x+y+z) = 8 \cdot 3$$

$$\textcircled{5} \text{ Тогда } (x+y+z)^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz = 9$$

$$3(xy + yz + xz) - 3(x+y+z) = 9$$

$$3(xy + yz + xz) = 9 + 3 \cdot 3 = 18$$

$$xy + yz + xz = 6.$$

$$\textcircled{6} \text{ Тогда вычислю } S = 12(x+y+z) + (xy + yz + xz) + 2 \cdot 9 \cdot 3 =$$

$$= 12 \cdot 3 + 6 + 54 = 36 + 60 = 96, \text{ понятно, что другим } S \text{ быть не может.}$$

Ответ: 96.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение: Зная, что это число $n = 10^{(4 \cdot 10^4)} - 1$, обозначу $4 \cdot 10^4 = t$,

тогда нужно найти кол-во девяток в записи числа $(10^t - 1)^3 =$

$$= 10^{3t} - 3 \cdot 10^{2t} + 3 \cdot 10^t - 1. \text{ Посчитаем сначала все, кроме } (-1)$$

$\begin{array}{r} 10^{3t} \\ - 10^{3t} \\ + 3 \cdot 10^{2t} \\ - 3 \cdot 10^{2t} \\ + 3 \cdot 10^t \\ - 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 9 \dots 97 \\ - 9 \dots 97 \\ + 9 \dots 97 \\ - 9 \dots 97 \\ + 9 \dots 97 \\ - 1 \end{array}$
--	--

Теперь вычиту 1

Итого, я получил запись числа n^3 и могу явно посчитать количество 9ок в записи этого числа.

$$\text{Видно, что это } t - 1 + t = 2t - 1 = \cancel{2 \cdot 10^{4+10^4}} - 3 \quad 4 \cdot 10^4 \cdot 2 - 1 =$$

$$= 80000 - 1 = 79999$$

Ответ: 79999

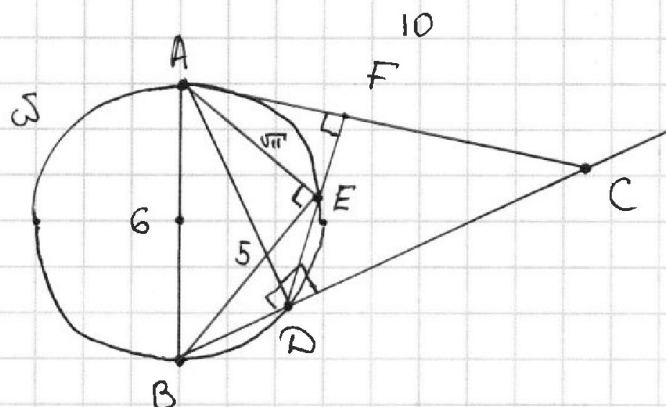


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Решение: ① Проведем AD и AE , заметим, что т.к. AB диаметр окр. ω , то по св-ву диаметра $\angle AEB = \angle ADB = 90^\circ$, значит $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$ как смежные

② Рассмотрим $\triangle DAC$, $\angle ADC = 90^\circ$, DF - высота из прямого угла. Используем св-во такого треугольника, а именно $AC \cdot AF = AD^2$

В частности оно следует из подобия $\triangle ADC$ и $\triangle ADF$, т.к. оба прямоугольные и имеют общий угол $\angle DAF \Rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AD}$, а это то, что и требуется.

③ Рассм. $\triangle AEB$. $\angle AEB = 90^\circ$, запишем т. Пифагора: $AB^2 = BE^2 + AE^2$, т.к. $AE > 0$, то $AE = \sqrt{36 - 27} = \sqrt{9}$;

④ четырехугол. $ABDE$ впис. в ω , з.к. $\angle AEF = \angle ABD \Rightarrow$ т.к. $\angle ADB = \angle AFE = 90^\circ$, то $\triangle ADB \sim \triangle AFE \Rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{AB}{AE} = \frac{6}{\sqrt{11}} \Rightarrow AD = \frac{6AF}{\sqrt{11}}$

⑤ Подставлю в формулу из п.2, получу $AC \cdot AF = \frac{36AF^2}{11}$, $AF \neq 0 \Rightarrow$ поделим на него

$$AC = \frac{36}{11}AF, AC = 10$$

$$10 \cdot 11 = 36AF \Rightarrow AF = \frac{10 \cdot 11}{36} = \frac{55}{18}$$

Ответ: $\frac{55}{18}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение: ① Пусть всего было x коробок.

② Посчитаем вероятность выигрыша игрока, когда ему разрешается открыть 5 коробок. Назову эту вероятность P_1 , тогда

$$P_1 = \frac{S_x}{S_6}, \text{ где } S_x - \text{выигрыш кол-во выигрышных эл-ментов событий, а} \\ S_6 - \text{количество всех событий.}$$

Тогда $S_x = C_{(x-3)}^2$, так как в "хорошем" исходе (ком. выигрыш.)

выбор содержит три коробки с шариками и содержит любые две другие различные коробки, а $S_6 = C_x^5$, т.е. выбрать 5 различ. любых коробок из общ. кол-ва и есть количество всех событий выбора игрока.

$$\text{Тогда } P_1 = \frac{C_{(x-3)}^2}{C_x^5} = \frac{(x-3)(x-4) \cdot 5!}{2 \cdot x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{x(x-1)(x-2)}$$

③ Аналогично посчитаем P_2 - вер-ть выигрыша, когда игрок открывает 6 коробок.

В данном случае $P_2 = \frac{S'_x}{S'_6}$ (обозначения такие, только со штрихом),

тогда $S'_x = C_{(x-3)}^3$, т.к. кроме этих 3 шар. выбран еще 3 любых др. различ.

$S'_6 = C_x^6$, т.е. в это раз выбраны 6 различ. любых.

$$\text{Тогда } P_2 = \frac{C_{(x-3)}^3}{C_x^6} = \frac{(x-3)(x-4)(x-5) \cdot 6!}{3! \cdot x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{x(x-1)(x-2)}$$

$$\text{④ По усл. можно найти отношение } \frac{P_2}{P_1} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot x(x-1)(x-2)}{x(x-1)(x-2) \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{6}{3} = 2,$$

это и будет ответом, т.к. требуется найти во сколько раз увели. вероятность выигрыша.

Ответ: 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

III $a=4$

$$\begin{cases} x^2 - (16-4)x - 4 = 0 \\ 4x^2 - (64-16)x + 2 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^2 - 4^6 - 4 = 0 \end{cases} \quad \textcircled{2}$$

$$\begin{cases} x^2 - 12x - 4 = 0 \quad \textcircled{*} \\ x_3 = 6 + 5\sqrt{37} \\ x_4 = 6 - 5\sqrt{37} \end{cases}$$

Итого $x_1 = 6 + \sqrt{37}$
 $x_2 = 6 - \sqrt{37}$
 $x_3 = 6 + 5\sqrt{37}$
 $x_4 = 6 - 5\sqrt{37}$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad 4x^2 - 48x + 4^4 + 2 + 2 \cdot 4^2 - 4^6 - 4 = 0 \quad | :4 \\ x^2 - 12x + 64 \cdot 2 + 8 - 4^5 - 1 = 0 \\ x^2 - 12x - 64(16-2) + 7 = 0 \\ x^2 - 12x - 64 \cdot 14 + 7 = 0 \\ D_1 = 36 + 64 \cdot 14 - 4 = 925 = 5^2 \cdot 37 \\ x_3 = 6 + 5\sqrt{37} \\ x_4 = 6 - 5\sqrt{37} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{*} \quad x^2 - 12x - 4 \\ D_1 = 36 + 4 = 40 \\ x = \frac{12 \pm \sqrt{40}}{2} = 6 \pm \sqrt{10} \\ x = 6 - \sqrt{37} \end{aligned}$$

Аналогично расположу:

3й 5й 6й 8й
 $6 - 5\sqrt{37}$; $6 - \sqrt{37}$; $6 + \sqrt{37}$; $6 + 5\sqrt{37}$

Пусть b_i начинается с $b = 6 - 9\sqrt{37}$, а $d = 2\sqrt{37}$,

тогда 3й член. $6 - 9\sqrt{37} + 4\sqrt{37} = 6 - 5\sqrt{37} = x_4$

8й член. $6 - 9\sqrt{37} + 14\sqrt{37} = 6 + 5\sqrt{37} = x_3$

5й член. $6 - 9\sqrt{37} + 8\sqrt{37} = 6 - \sqrt{37} = x_2$

6й член. $6 - 9\sqrt{37} + 10\sqrt{37} = 6 + \sqrt{37} = x_1$, да, это такая a

подойдет. (явно привел пример арифм. прогр.) и поставил корки при a . Ясно, что при других a не будет выполняться равенство, рассм. в $\textcircled{1.3}$, а знаем кроме проверенных, другие a подходят и не могли.

Ответ: $a=4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

Решение: (1) Пусть это непостоян. арифм. прогрессия $b, b+d, \dots$,

где $d \neq 0$. (2) Тогда назову b_i - i -ый член прогр., тогда $b_i = b_j \Leftrightarrow i = j$, т.к. $d \neq 0$, тогда назову корни 1-го ур-я x_1, x_2 , 2-го x_3, x_4 ,

тогда т.к. они различны и если D этих ур-я $\Delta > 0$ от x , тогда можно записать т. Вьетта, однако согласно условию задачи $\Delta = 0$ (можно менять $x_1 \leftrightarrow x_2, x_3 \leftrightarrow x_4$)

$$x_1 = b + 4d; x_2 = b + 5d; x_3 = b + 2d; x_4 = b + 4d;$$

Замечу, что $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, значит при существ. этих корнях по т. Вьетта коэф. при x у этих ур-я равны, где $\neq$ коэф. при x^2 .

$$(3) \text{ Тогда } a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 4a = a^3 - a^2$$

Отдельно проверю $a=0$, иначе могу не а. получить.

$$\begin{aligned} \text{Получу } 4a - 4 &= a^2 - a \\ a^2 - 5a + 4 &= 0 \\ D = 9 \Rightarrow a &= \frac{5 \pm 3}{2} = 4 \\ a &= \frac{5 - 3}{2} = 1 \end{aligned}$$

(4) Остаток проверить, подходит ли $a=0, a=1, a=4$.

$$\text{I } a=0 \begin{cases} x^2 = 5 & x_1 = \sqrt{5}; x_2 = -\sqrt{5} \\ 4x^2 = 4 & x_3 = 1; x_4 = -1 \end{cases}$$

Так как арифм. прогр. либо монотонно убыв (строго), либо возр., то x_1, x_2, x_3, x_4 в прогр. располагаются так в моменты до переворота: $-\sqrt{5}; -1, 1, \sqrt{5}$; тогда т.к. $-\sqrt{5}$ и $\sqrt{5}$ соседние (5 и 6 члены прогр.), то между ними не может быть членов прогр., а они есть, противоречие, значит $a=0$ не подойдет.

$$\text{II } a=1 \begin{cases} x^2 = 4 & x_1 = 2, x_2 = -2 \\ 4x^2 + 2x - 1 = 0 & x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{тогда аналогично } a=0$$

располагаю $-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$; однако -2 и 2 соседние члены, значит такое невозможно (т.к. между ними появились другие члены прогр.)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3.$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \begin{cases} x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0 & y \geq 6\sqrt{3} \left(x - \frac{15}{2} \right) \\ x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0 & y \leq 6\sqrt{3} \left(\frac{15}{2} - x \right) \end{cases} \\ & 6\sqrt{3} \left(x - \frac{15}{2} \right) \leq y \leq 6\sqrt{3} \left(\frac{15}{2} - x \right) \\ & \Downarrow \\ & x - \frac{15}{2} \leq \frac{15}{2} - x \\ & x \leq 7,5 \\ & \text{Тогда } 2x - 15 \leq 3 \\ & x \leq 9. \\ & \Downarrow \\ & x \leq 7,5 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0 & y \geq 6\sqrt{3} \left(x - \frac{15}{2} \right) \\ x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 0 & y \geq 6\sqrt{3} \left(x - \frac{15}{2} \right) \end{cases}$$

$$\frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 3 \Rightarrow y \leq 9\sqrt{3}. \quad 6\sqrt{3} \left(x - \frac{15}{2} \right) \leq y \leq 9\sqrt{3}$$

$$6 \left(x - \frac{15}{2} \right) \leq 9$$

$$y \geq 6x - 45$$

$$6\sqrt{3} \left(\frac{15}{2} - x \right) \leq 9\sqrt{3}$$

$$\text{Тогда } y \geq 6\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} = 9\sqrt{3}, y = 9\sqrt{3},$$

$$6x - 45 \leq 9$$

$$6x \leq 9 + 45$$

$$x \leq 9$$

Зн. тут только точка $(9, 9\sqrt{3})$

$$6 \left(\frac{15}{2} - x \right) \leq 9$$

$$\textcircled{3} \quad \begin{cases} x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 0 \\ x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0 \end{cases}$$

$$45 - 6x \leq 9$$

$$6x \geq 45 - 9$$

$$x \geq 8 \Rightarrow x = 9.$$

$$y \geq 9\sqrt{3}$$

$$9\sqrt{3} \leq y \leq 6\sqrt{3} \left(x - \frac{15}{2} \right)$$

$$3 \leq x - \frac{15}{2}$$

$$x \geq \frac{21}{2}$$

Зн. тут только

$$\left(\frac{21}{2}, 9\sqrt{3} \right).$$

$$9\sqrt{3} \leq y \leq 6\sqrt{3} \left(\frac{15}{2} - x \right) \Rightarrow 3 \leq \frac{15}{2} - x$$

$$x \leq \frac{21}{2} \Rightarrow x = \frac{21}{2},$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{4} \left\{ \begin{array}{l} x - \frac{15}{2} + \frac{4}{6\sqrt{3}} \leq 0 \\ x - \frac{15}{2} - \frac{4}{6\sqrt{3}} \leq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y \leq 6\sqrt{3} \left(x - \frac{15}{2} \right) \\ y \geq 6\sqrt{3} \left(x - \frac{15}{2} \right) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 6\sqrt{3} \left(x - \frac{15}{2} \right), \text{ но}$$

$$-2x + 15 \leq 3$$

$$2x \geq 12$$

$$x \geq 6.$$

⑤ Замечу, что при повороте на π отн. центра координат будет просто симметрия фигуры отн. центра.



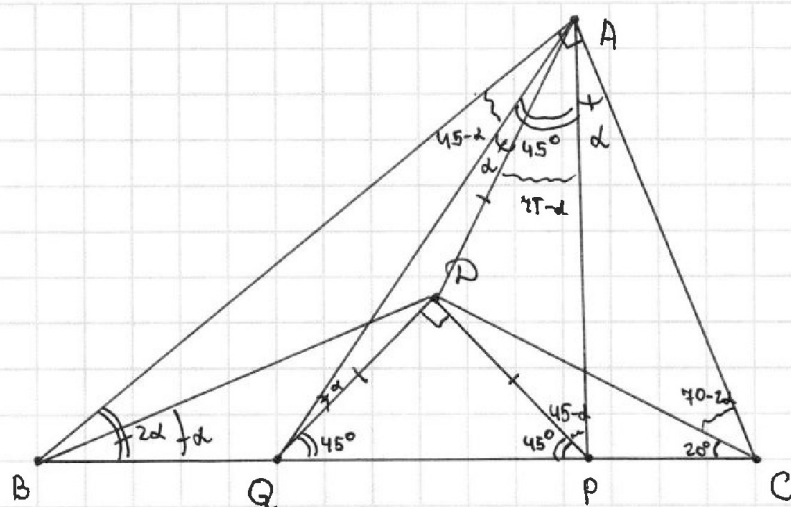
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Решение: ① Построю AD, BQ, AQ, AP . $DP=DQ$, з.и. т.к. $\angle PDQ=90^\circ$,
то $\angle DPQ=\angle DQP=45^\circ$. Пусть $\angle AQD=\alpha$, з.и. т.к. по усл. $CQ=AC$,
то $\triangle QCA$ равнобедр., а з.и. $\angle AQC=\angle QAC=\alpha+45^\circ$, тогда по сумме углов
в $\triangle QCA$ получим $\angle ACQ=180-\angle CQ-2\angle AQC=180-20-2(\alpha+45)=70-2\alpha$,
тогда получим $\angle ABC$ в $\triangle ABC$ ($\angle A=90^\circ$, $\angle ACB=70-2\alpha$), з.и.
 $\angle ABC=2\alpha$, тогда т.к. $AB=BP$, то $\triangle ABP$ равноб., з.и. $\angle BAP=\angle APB=$
 $=\frac{180-\angle ABP}{2}=90-\alpha$, тогда $\angle DPA=\angle BPA-\angle DPQ=45-\alpha$,

Замечу, что т.к. $\angle BAC=90^\circ$, а $\angle QAC=\alpha+45^\circ$, то $\angle BAQ=45^\circ-\alpha$,
аналогично т.к. $\angle BAP=90-\alpha$, а $\angle BAC=90^\circ$, то $\angle PAC=\alpha$, тогда
т.к. $\angle BAQ+\angle PAC=45^\circ$, то $\angle QAP=45^\circ$.

② т.к. $DQ=DP$, то D лежит на серединке QP , рассмотрим $\angle QDP$ и
 $\angle QAP$, замечу, что т.к. $\angle QDP=2\angle QAP$, а такие лежат на серединке
 QP , то D — центр. опис. окр. $\triangle AQP$ (ну или же центр AQP лежит
на окр., постро. на QP как на диаметре т.к. $\angle QAP=45^\circ$, причем центр такой,
что равноуд. от Q и P , значит это D).

Тогда $DQ=DP=DA$ как радиусы, значит $\angle AQD=\angle QAD=\alpha$,
т.к. $\triangle QDA$ р/с ($DQ=DA$), тогда замечу, что $\angle BQD=45^\circ$, причем
 $\angle DQP=45^\circ$, значит по призм. впис. четырехугол. $ABQD$ вписанный,
значит $\angle QAD=\angle QBQ=\alpha$

③ $\angle DAP=\angle QAP-\angle QAD=45-\alpha$, $\angle DAC=\angle DAP+\angle PAC=45+\alpha-\alpha=45^\circ$,
т.к. $\angle DAC=\angle DPQ=45^\circ$, то аналогично вышесказанному $ACPD$ вписанный четырехугол.,
Тогда $\angle DAP=\angle DCP \Rightarrow 45-\alpha=20 \Rightarrow \alpha=25^\circ$, тогда т.к. $\angle DBC=\alpha=25^\circ$, то
это и есть то, что требуется найти. Ответ: 25°



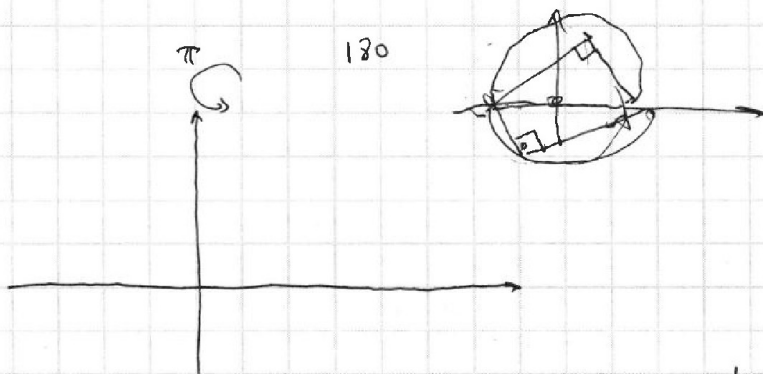
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3$$



$$\left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3$$

$$2x - 15 \leq 3$$

$$2x \leq 18$$

$$x \leq 9$$

$$\frac{2y}{6\sqrt{3}} \leq 3$$

$$y \leq 9\sqrt{3}$$

$$3 \left(x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right) \leq 3$$

$$y \geq 9\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \cancel{6\sqrt{3}} \left(x - \frac{15}{2} \right) &\leq \cancel{6\sqrt{3}} \left(\frac{15}{2} - y \right) \\ x - \frac{15}{2} &\leq \frac{15}{2} - y \\ 2x &\leq 15 \\ x &\leq 7.5 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0$$

$$\frac{y}{6\sqrt{3}} \geq \frac{15}{2} - x$$

$$y \geq \frac{3 \cdot 6\sqrt{3} \cdot 15}{2} - 6\sqrt{3}x = 6\sqrt{3} \left(\frac{15}{2} - x \right)$$

$$x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0$$

$$\frac{y}{6\sqrt{3}} \leq x - \frac{15}{2}$$

$$y \leq 6\sqrt{3} \left(x - \frac{15}{2} \right)$$

$$\begin{array}{r} 1000000 \\ - 30000 \\ + \quad 300 \\ \hline 970300 \\ 970299 \end{array}$$

$$y \geq 6\sqrt{3} \left(\frac{15}{2} - x \right)$$

$$y \leq 6\sqrt{3} \left(x - \frac{15}{2} \right)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a-b)(a-b)(a-b)$$

$$(10^2-1)^3 = 10^6 - 1 - 3 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^2 =$$

$$= 10^6 - 1 - 3 \cdot 10^2 (10^2 - 1)$$

$$\begin{array}{r} 999999 \\ 29700 \\ \hline 970299 \\ 881 \\ \hline 792 \end{array}$$

$$981 \overline{) 99}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 94 \\ 9 \\ \hline 891 \end{array}$$

$$98$$

$$\begin{array}{r} 9 \dots 9 \\ 29700 \\ 482 \overline{) 99} \\ 693 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 99 \\ 3 \\ \hline 27 \\ 27 \\ \hline 294 \\ 7 \\ \hline 89 \\ 8 \\ \hline 792 \end{array}$$

$$181$$

$$(100-)$$

$$\begin{array}{r} 999999 \\ 30000 \\ \hline 969999 \\ 300 \\ \hline 970299 \\ 970298 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 991 \\ 10801 \\ \hline 99 \\ 97208 \\ 97208 \\ \hline 1069298 \\ 98 \\ \hline 782 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(10^4 \cdot 10^4 - 1)^3 = 10^4 \cdot 10^4 \cdot 3 - 3 \cdot 10^4 \cdot 10^4 \cdot 2 + 3 \cdot 10^4 \cdot 10^4 - 1$$

$$\begin{array}{r} 1000 \overline{) \dots 00} \\ \underline{2+} \\ 2+ \\ + \end{array} \quad \begin{array}{r} 1000 \overline{) \dots 00} \\ \underline{+} \\ 1000 \overline{) \dots 00} \\ \underline{+} \\ 1000 \overline{) \dots 00} \\ \underline{+} \\ 1000 \overline{) \dots 00} \end{array}$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \geq 2 \sqrt{\frac{(xy)^2}{4}} = xy$$

$$3(x+y+z) = 0$$

$$x+y+z = 0$$

$$x^2 + y^2 = 2(xy) = 2(x+y+z)$$

$$-1 = 3i^2 - 1$$

$$i \cdot i = -1 \quad i^2$$

$$i^2 + i^2 = -2 \geq -1$$

$$\begin{array}{r} 80000 \\ \underline{1} \\ 79999 \end{array}$$

$$xy + yz + zx = x^2 + y^2 + z^2 + 3(x+y+z)$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \geq 2 \sqrt{\frac{(xy)^2}{4}} = xy$$

$$\geq 2\sqrt{\dots}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^k + k + \left(\frac{y}{x}\right)^k =$$

$$\text{Значит, } x+y+z=0, \text{ иными } x=y=z$$

$$x^2 = 3x + x^2$$

$$\frac{4}{2} + \frac{8}{2} \geq 6 \quad (2+3) = \frac{xy}{z} = K \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + 1 \right)$$

$$\left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{xz}{y}\right)^2 = \left(\frac{x^2+y^2}{yz}\right)^2$$

$$x^2(3+x)^2 = y^2(3+y)^2 = z^2(3+z)^2$$

$$x^2(3+x) = y^2(3+y) = z^2(3+z)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$xy = 3z + z^2$$

$$yz = 3x + x^2$$

$$\frac{x}{z} = \frac{3z + z^2}{3x + x^2}$$

$$\frac{x}{z} = \frac{z}{x} \left(\frac{3+z}{3+x} \right)$$

$$x^2 = z^2 \frac{(3+z)}{(3+x)}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2}$$

$$y \neq 0$$

$$xy = z(3+z)$$

$$yz = x(3+x)$$

$$zx = y(3+y)$$

$$\begin{aligned} (3+x)x^2 &= z^2(3+z) \\ (3+x)x^2 &= y^2(3+y) \end{aligned}$$

$$\frac{3+x}{3+z} = \left(\frac{z}{x} \right)^2$$

$$\left(\frac{xy}{z} \right)^2 + \left(\frac{yz}{x} \right)^2 + \left(\frac{zx}{y} \right)^2 =$$

$$= \frac{(xy)^2}{z^2} + \frac{(yz)^2}{x^2} + \frac{(zx)^2}{y^2} =$$

$$= \frac{(xy)^4 + (yz)^4 + (zx)^4}{(xyz)^2} =$$

$$= \frac{8}{x^2} = 1.$$

N 2

$$\underbrace{9 \dots 9}_{4 \cdot 10^4}$$

n^3

$$9^3 = 729$$

$$\frac{81}{729}$$

$$\frac{3+x}{3+y} = \left(\frac{y}{x} \right)^2$$

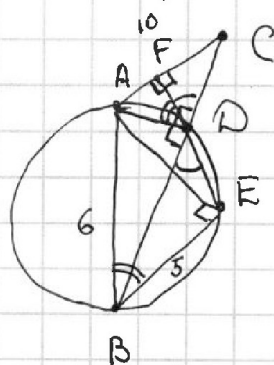
$$\frac{3+x}{3+z} = \left(\frac{z}{x} \right)^2$$

$$999 \quad 1000$$

$$\frac{kx^2}{z^2}$$

$$\left((10)^{40000} - 1 \right)^3 = 10^{3+} - 3 \cdot 10^{2+} + 3 \cdot 10^{1+} - 1 = (10^{3+} - 1) + 3 \cdot 10^{1+} (1 - 10^{+})$$

N 3



$$\frac{36}{25} \cdot \frac{11}{11}$$

$$\sqrt{11}$$

$$AC \cdot AF = AD^2$$

$$\sqrt{10AF} = AD$$

$$\frac{AD}{5} = \frac{AF}{\sqrt{11}}$$

$$\frac{\sqrt{10AF}}{5} = \frac{AF}{\sqrt{11}}$$

$$\sqrt{110} \cdot \sqrt{AF} = 5AF$$

$$110 \cdot AF = 25AF^2$$

$$22AF = 5AF^2$$

$$AF = \frac{22}{5}$$

$$\left(\frac{kx^2}{z^2} + k^2 + \right)$$

$$(3+x)x^2 = y^2(3+y) = z^2(3+z)$$

$$xyz = x^2(3+x)$$

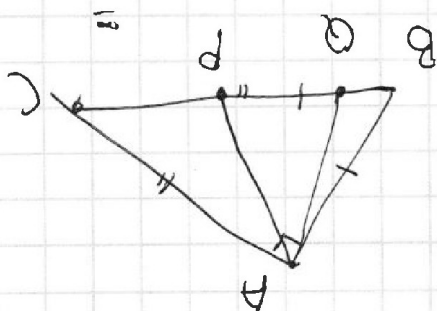
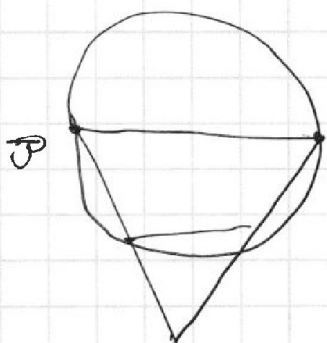
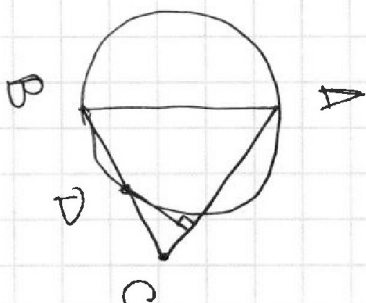
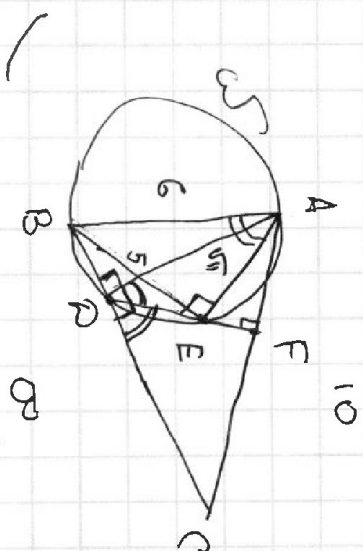
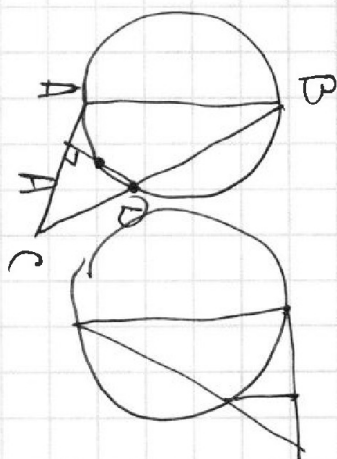
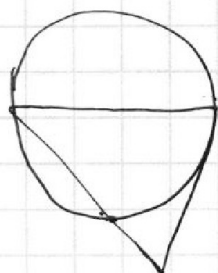


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$(x-3)(x-4) \cdot 5!$$

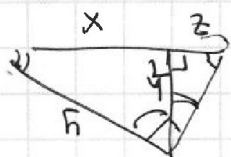
$$2! (x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \cdot 5!$$

$$= (x-3)(x-4) \cdot 5!$$

$$\frac{5! \cdot 4 \cdot 3}{x(x-1)(x-2)}$$

$$y^2 = x(x+2)$$

$$\frac{y}{x+2} = \frac{x}{y}$$



$$\frac{(x-3)(x-4)(x-5) \cdot 6!}{3! (x)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{x(x-1)(x-2)}$$

$$10 = \frac{36}{11} AF$$

$$\frac{10 \cdot 11}{36} = AF$$

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 4 \cdot 3} = 2$$

$$\frac{36}{11} \cdot \frac{5}{13} =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$xy = z(3+z)$$

$$yz = x(3+x)$$

$$zx = y(3+y)$$

$$z = \frac{xy}{3+z}$$

~~z~~

$$\frac{x}{z} = \frac{z}{x} \frac{(3+z)}{(3+x)}$$

$$x^2 = z^2 \left(\frac{3+z}{3+x} \right)$$

$$(3+x)x^2 = z^2(3+z) =$$

$$= (y+3)y^2$$

$$\frac{y^2}{(3+z)} = x(3+x)$$

$$y^2 = (3+x)(3+z)$$

$$z = \frac{xy}{3+z}$$

$$\frac{y}{z} = \frac{3+z}{x}$$

$$\frac{y}{z} = \frac{z}{y} \frac{(3+z)}{(3+y)}$$

$$yz = \frac{y^2 x}{3+z} = x(3+x)$$

$$y^2 = (3+x)(3+z)$$

$$(3+x)x^2 = y^2(3+y)$$

$$x^2(3+x) = (3+x)(3+z)(3+y)$$

$$z^2 = (3+x)(3+y)$$

$$(3+x)(x+3)^2 =$$

$$= x^2 + 6x + 9 = (3+z)(3+y) + 6\sqrt{(3+z)(3+y)} + 9$$

$$xy + yz + xz - 6(x+y+z) = 5$$

$$3+z = \frac{xy}{z}$$

$$\frac{xy}{z} \cdot \frac{xz}{x} = x^2$$

$$6(x+y+z) + (x^2 + y^2 + z^2) + 9 \cdot 3 = 5$$

$$3(x+y+z) + xy + yz + zx + 9 \cdot 3 = 5$$

$$2(xy + yz + zx) = 6(x+y+z) + 2(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2) + 9 \cdot 3 = 5$$

$$3 \cdot 9 + xz + 6(x+y+z) + yz + xz$$

