



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



- ✓. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах. 8

- ✓. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ? 60 001
- ✓. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$. $\frac{35}{8}$
- ✓. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока? 3,5
- ✓. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии. $a=3$
- ✓. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте. $96\pi - 16\sqrt{3}$
- ✓. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$. 20°



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N1 \begin{cases} xy = z^2 - 2z \\ yz = x^2 - 2x \\ xz = y^2 - 2y \end{cases}$$

$$x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$$

1) Если все числа равны одному ~~и тому же~~ числу $m \neq 0 \Rightarrow$ из I ур-ие системы: $m^2 = m^2 - 2m$

$$\stackrel{||}{m} = 0 \quad \checkmark$$

2) Тогда есть 2 неравных друг другу числа

БОО

$$x \neq y:$$

вычит из II ур-ие III ур-ие.

$$yz - xz = x^2 - y^2 - 2x + 2y$$

$$z(y-x) = -(y-x)(y+x) + 2(y-x) \quad | : (y-x) \neq 0$$

$$z = -y - x + 2 \Rightarrow x + y + z = 2.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) = 4$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2 - 4) = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$\stackrel{||}{x^2 + y^2 + z^2} = 4 \Rightarrow$$

ненулевое

$\Rightarrow$ Т.к. у системы есть решение по условию и оно не может удовлетворять 1) то это решение удовлетворяет

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$x + y + z = 2$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 4(x+y+z) + 4 \cdot 3 =$$

$$= 4 - 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 8$$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2 Заметим, что если десятичная запись натурального n состоит из 30001 девятки $\Rightarrow n = 10^k - 1, k = 30001$

$$n^3 = (10^k - 1)^3 = 10^{3k} - 3 \cdot 10^{2k} + 3 \cdot 10^k - 1 =$$

$$= 10^{2k} (10^k - 3) + 3 \cdot 10^k - 1 =$$

$$= 10^{2k} \cdot \underbrace{999 \dots 97}_k + \underbrace{299 \dots 99}_k =$$

$$= \underbrace{999 \dots 97}_k \underbrace{000 \dots 0}_{2k} + \underbrace{299 \dots 99}_k \xrightarrow{T.K. 2k > k+1}$$

$$= \underbrace{999 \dots 97}_k \underbrace{000 \dots 0}_{k-1} \underbrace{299 \dots 9}_k \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ "9" в n^3 ~~к-1~~ встречается $k-1+k=2k-1$ раз

$$2k-1 = 2 \cdot 30001 - 1 = 60002 - 1 = 60001$$

Ответ: 60001 девяток.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

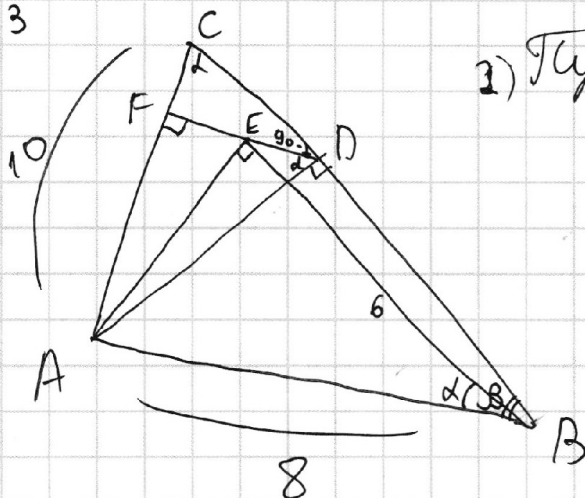


СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3



1) Пусть $\angle C = \alpha$
 $\angle B = \beta \Rightarrow$ (т.к. ω — диаметр на AB как на диаметре) $\Rightarrow \angle ADB = 90^\circ$
 Аналогично $\angle AEB = 90^\circ$

$\Rightarrow$ по Δ sin ΔABC :

$$10 = 2R \sin \beta \Rightarrow R \sin \beta = 5$$

$$8 = 2R \sin \alpha \Rightarrow R \sin \alpha = 4$$

3) Т.к. $\angle C = \alpha \Rightarrow \angle FDC = 90^\circ - \alpha$

$$\angle FDA = \alpha$$

$\Rightarrow$ т.к. $EDBA$ — впис.

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{EB}{AB} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \angle EBA = \alpha$$

4) Т.к. ΔADB — н/г $\Rightarrow AD = AB \sin \beta = 8 \sin \beta \Rightarrow$

$$\Rightarrow AF = AD \sin \alpha = 8 \sin \alpha \sin \beta \Rightarrow$$

т.к. ΔFED — н/г

$\Rightarrow$ осталось найти $8 \sin \alpha \sin \beta$ если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$$a \quad R \sin \beta = 5 \Rightarrow \sin \beta = \frac{5}{4} \sin \alpha$$

$$R \sin \alpha = 4$$

$$8 \sin \alpha \sin \beta = \Leftrightarrow \sin \beta = \frac{5}{16} \sqrt{7}$$

$$= 8 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{5\sqrt{7}}{16} = \frac{5 \cdot 7}{8} = \frac{35}{8}$$

$$\text{Ответ: } AF = \frac{35}{8}$$

Дано:

ΔABC — остр.

ω — окружность с диаметром AB

$\omega \cap BC = D$

$F \in [AC]$

$FD \perp AC$

$E = [DF] \cap \omega \setminus \{D\}$

$AC = 10$

$AB = 8$

$BE = 6$

Найти:

$AF = ?$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть x - всего коробок в ряду.
Пусть p_k - вероятность выигрыша ^{игрока,} если мы разрешим открыть k коробок ($x \geq k$).

Заметим, что $p_k = \frac{\text{\# кол-во вариантов, где игрок выигрывает}}{\text{\# кол-во вариантов всего}} =$

$$= \frac{\text{\# кол-во вариантов выигрыша}}{C_x^k} = \frac{C_{x-3}^{k-3}}{C_x^k}$$

$C_x^k \leftarrow$ выбираем k коробок из x .
 $C_{x-3}^{k-3} \leftarrow$ выбираем $k-3$ коробки среди $x-3$ (и k коробок должны быть угаданы чтобы выиграть)

$$\frac{p_7}{p_5} = \frac{C_{x-3}^4}{C_x^7} : \frac{C_{x-3}^2}{C_x^5} = \frac{\frac{(x-3)!}{4!(x-7)!} \cdot \frac{x!}{5!(x-5)!}}{\frac{x!}{7!(x-7)!} \cdot \frac{(x-3)!}{2!(x-5)!}} =$$

$$= \frac{7! \cdot 2!}{5! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 2!}{4!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{7}{2} = 3,5$$

Ответ: в 3,5 раза.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н5 подходит
 $a = 3$: I ур-ие: $x^2 - (3^2 - 2 \cdot 3)x + 3^2 - 3 - 7 = 0$
 $x^2 - 3x - 1 = 0$

II ур-ие: $3x^2 - (3^3 - 2 \cdot 3^2)x + 6 - 3^5 = 0$
 $x^2 - (3^2 - 3 \cdot 2)x + 2 - 3^4 = 0$
 $x^2 - 3x - 79 = 0$

Корни I ур-ие: $\frac{3 \pm \sqrt{3^2 + 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

Корни II ур-ие: $\frac{3 \pm \sqrt{3^2 + 4 \cdot 79}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{325}}{2} = \frac{3 \pm 5\sqrt{13}}{2}$

Или ариф. прогрессию $a_n = \frac{3 - 11\sqrt{13} + 2\sqrt{13}(n-1)}{2} =$
 $= \frac{3 - 13\sqrt{13} + 2\sqrt{13}n}{2}$

$$a_4 = \frac{3 - 13\sqrt{13} + 8\sqrt{13}}{2} = \frac{3 - 5\sqrt{13}}{2}$$

$$a_9 = \frac{3 - 13\sqrt{13} + 18\sqrt{13}}{2} = \frac{3 + 5\sqrt{13}}{2} \quad \left. \begin{array}{l} a_4 \\ a_9 \end{array} \right\} \text{ корни II ур-ие}$$

$$a_6 = \frac{3 - 13\sqrt{13} + 12\sqrt{13}}{2} = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

$$a_7 = \frac{3 - 13\sqrt{13} + 14\sqrt{13}}{2} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_6 \\ a_7 \end{array} \right\} \text{ корни I ур-ие}$$

$\downarrow$
 $a = 3$ подходит

Ответ: $a = 3$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

NS Пусть $\{a_n\}$ — ариф. прогрессия.

По В. Вьета

$$\begin{cases} a_6 + a_7 = a^2 - 2a & (\text{т.к. } a^2 - 2a - \text{коэфф. при } x) \\ a_4 + a_9 = \frac{a^3 - 2a^2}{3} & (\text{аналогично}) \end{cases}$$

$$a^2 - 2a = a_6 + a_7 = a_1 + 5d + a_1 + 6d = a_1 + 3d + a_1 + 8d = a_4 + a_9 = \frac{a^3 - 2a^2}{3} \Rightarrow a^2 - 2a = \frac{a^3 - 2a^2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3a^2 - 6a = a^3 - 2a^2 \Rightarrow a^3 - 5a^2 + 6a = 0$$

$$a(a-3)(a-2) = 0 \Leftrightarrow a(a^2 - 5a + 6) = 0$$

$$a \in \{0, 2, 3\}.$$

Проверка:

$$a = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 7 = 0 & \text{I ур-ие} \\ 3x^2 + 6 = 0 & \text{II ур-ие} \end{cases} \quad \text{у него нет вещ. корней}$$

$$a = 2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2^2 - 2 - 7 = 0 & \text{I ур-ие} \Rightarrow x^2 - 5 = 0 \\ 3x^2 + 6 - 2^5 = 0 & \text{II ур-ие} \Rightarrow 3x^2 + 6 - 32 = 0 \end{cases}$$

$$3x^2 - 26 = 0 \quad x^2 - \frac{26}{3} = 0$$

Корни I ур-ие: $\pm\sqrt{5}$

Корни II ур-ие: $\pm\sqrt{\frac{26}{3}}$

Пусть такая ариф. прогрессия $\exists$.
Тогда её разность d .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{5} - (-\sqrt{5}) &= md, \quad m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m, n \neq 0 \\ \sqrt{\frac{26}{3}} - (-\sqrt{\frac{26}{3}}) &= nd, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{26}{3}}} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$$

$$\sqrt{5 \cdot \frac{3}{26}} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{15}{26}} \in \mathbb{Q}$$

$a = 2$ не подходит



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

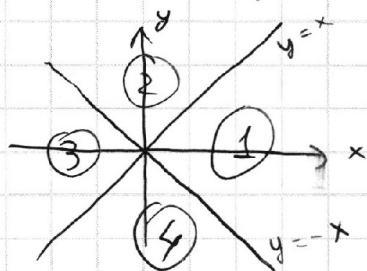
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

^{N6}
Найдем начала ГМТ точек $(x; y)$ для которых
верно $|x-y| + |x+y| \leq 4$.

Можно рассмотреть на 2-ух случаях: $y=x$
 $y=-x$.



(рис. 1)

В первом множестве:

$$x-y+x+y \leq 4 \Rightarrow x \leq 2$$

Во втором:

$$y-x+y+x \leq 4 \Rightarrow y \leq 2$$

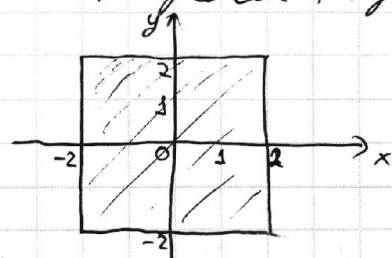
В третьем:

$$x-y-x-y \leq 4 \Rightarrow x \geq -2$$

В четвертом:

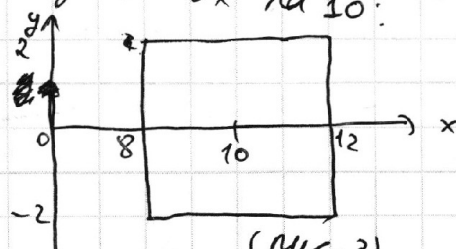
$$x-y-x-y \leq 4 \Rightarrow y \geq -2$$

Получаем такую фигуру:



(рис. 2)

ГМТ точек $(x; y)$ для которых
верно $|x-10+y| + |x-10+y| \leq 4$
есть исходная фигура сдвинутая
вдоль Ox на 10:

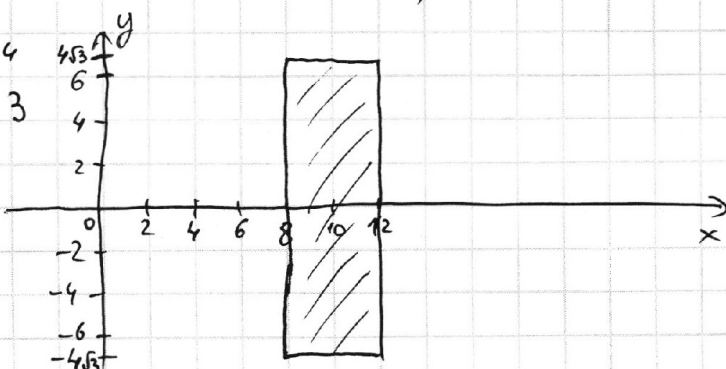


(рис. 3)

ГМТ точек $(x; y)$ таких, что

$$\left| x-10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \right| + \left| x-10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \right| \leq 4$$

есть фигура с рисунка 3
разжатая от Ox в
 $2\sqrt{3}$ раза.



(рис. 4)



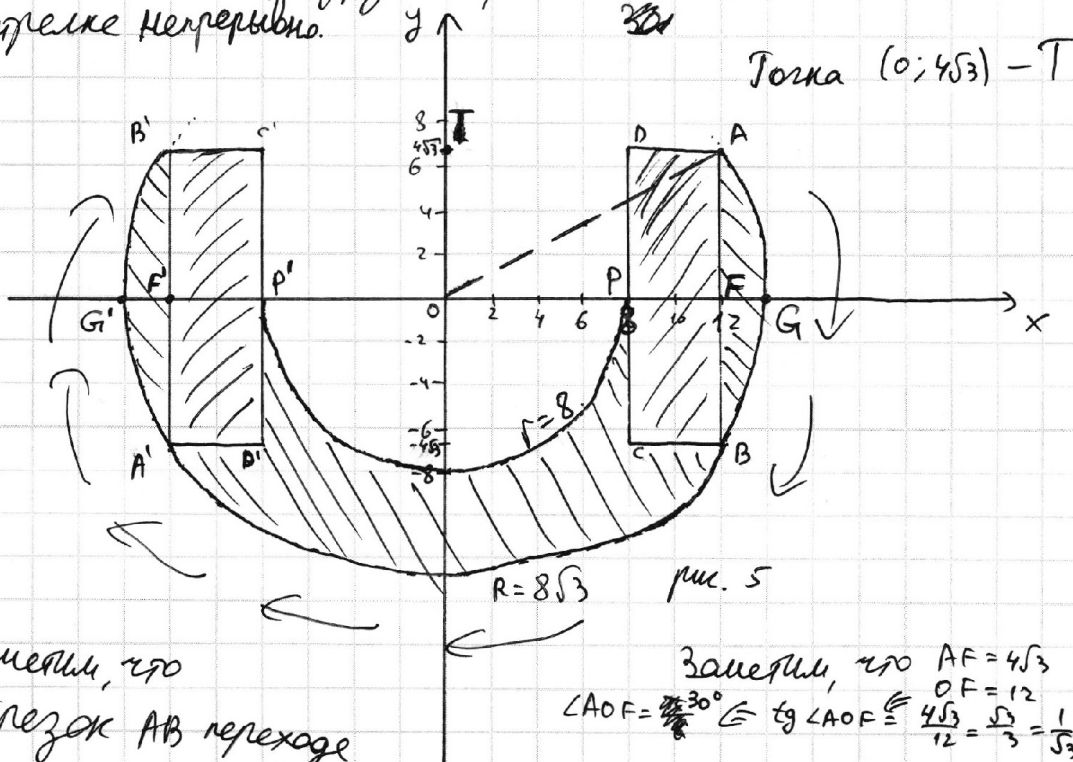
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Теперь поймем, ^{и в граждении} ~~какая~~ ^{какая} фигура, если повернуть фигуру с рис. 4 на π по часовой стрелке непрерывно.



Заметим, что

отрезок AB переходит

в отрезок A'B' ~~фигуры~~ ^{скажем} по окружности радиуса

$$R = OA = \sqrt{12^2 + (4\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{9 + 3} = 4 \cdot \sqrt{12} = 8\sqrt{3} \text{ с центром в } O$$

Р переходит в Р' ^{замечаем} ~~замечаем~~ ^{замечаем} окружность с центром в О и радиуса $r = OP = 8 \Rightarrow$ при вращении вокруг начала координат фигура как на рис. 5.

Сначала посчитаем площадь ^{части} фигуры, ^{которой} $y \geq 0$.

$$S_1 = \frac{1}{2} (\pi \cdot R^2 - \pi r^2) = \frac{\pi}{2} \cdot (64 \cdot 3 - 64) = \frac{\pi}{2} \cdot 64 \cdot 2 = 64\pi.$$

Теперь достаточно посчитать площадь $\triangle PDA GP = S_2$ и $S = S_1 + 2S_2$ (в силу симметрии)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$S_2 = S_{\text{AOG}} - S_{\triangle AOF} + S_{\text{POAF}} = \text{нб прогажение}$$

$$= \pi R^2 \cdot \frac{30^\circ}{360^\circ} - \frac{4\sqrt{3} \cdot 12}{2} + 4 \cdot 4\sqrt{3} =$$

$$= \frac{\pi R^2}{12} - 24\sqrt{3} + 16\sqrt{3} = \frac{\pi R^2}{12} - 8\sqrt{3} = \frac{\pi \cdot 64 \cdot 3}{12} - 8\sqrt{3} =$$

$$= \frac{\pi \cdot 64}{4} - 8\sqrt{3} = 16\pi - 8\sqrt{3}$$

$$\Downarrow$$
$$S = S_1 + 2S_2 = 64\pi + 2(16\pi - 8\sqrt{3}) =$$

$$= 64\pi + 32\pi - 16\sqrt{3} = 96\pi - 16\sqrt{3}$$

$$\text{Ответ: } S = 96\pi - 16\sqrt{3}$$

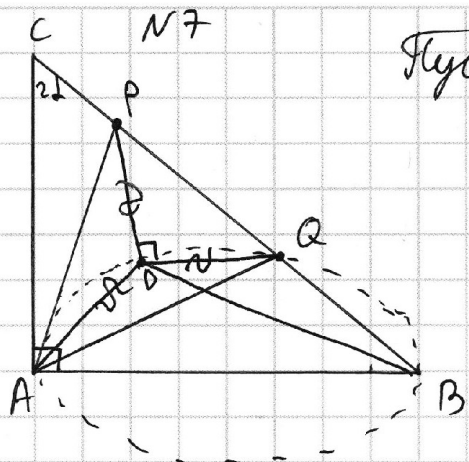


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $\angle ACB = 2\alpha$ (В конце подставим)
 $\alpha = 25^\circ$

Т.к. $\triangle ACQ$ - п/с $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle CAQ = 90^\circ - \alpha$$

Т.к. $\triangle ABC$ - п/с $\Rightarrow \angle ABC = 90^\circ - 2\alpha$

Т.к. $\triangle ABP$ - п/с

$$\angle PAB = \frac{180^\circ - (90^\circ - 2\alpha)}{2} =$$

$$= 45^\circ + \alpha$$

$$\angle CAB + \angle PAQ = \angle CAQ + \angle PAB = 90^\circ - \alpha + 45^\circ + \alpha = 135^\circ$$

$$\angle PAQ = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$$

D - лежит внутри $\triangle ABC \Rightarrow$ по одну сторону от прямой PQ с точкой A.

$$DP = DQ$$

$$90^\circ = \angle PDQ = 2\angle PAQ = 90^\circ$$

$$\triangle ADQ - \text{п/с} \Rightarrow AD = DQ \Rightarrow \text{Т.к. } \triangle DPQ - \text{п/с} \Rightarrow \Rightarrow \angle DQP = 45^\circ$$

Докажем, что $\angle DAB = 45^\circ$

$$\angle DAB = \angle DAQ + \angle QAB = \frac{180^\circ - \angle ADQ}{2} + 90^\circ - \angle CAQ =$$

$$= 180^\circ - \angle CAQ - \frac{\angle ADQ}{2} = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - \frac{2\angle APB}{2} =$$

$$= 90^\circ + \alpha - \angle APB = 90^\circ + \alpha - \frac{180^\circ - \angle ABP}{2} = \alpha + \frac{\angle ABP}{2} =$$

$$= \alpha + \frac{90^\circ - \angle ACB}{2} = \alpha + 45^\circ - \frac{\angle ACB}{2} = \alpha + 45^\circ - \frac{2\alpha}{2} = 45^\circ \Rightarrow \angle DAB = \angle DQP = 45^\circ$$

$$\angle DBQ = \frac{90^\circ - 2\alpha}{2} = \angle DBQ = \frac{\angle ABC}{2} \Leftarrow \angle ABD = \angle DBQ$$

$$= 45^\circ - \alpha \Rightarrow \angle DBQ = 45^\circ - 25^\circ = 20^\circ$$

Ответ: $\angle DBQ = 20^\circ$

Дано:
 $\triangle ABC$ - п/с
 $P \in AC$
 $Q \in AB$
 $BP = PA$
 $CQ = CA$
 $DQ = DP$
 $\angle PDQ = 90^\circ$
 $\angle ACB = 50^\circ$

Найти:
 $\angle DBQ = ?$

D - центр
отмеченной окр.
 $\triangle PAQ$

Вн. $\angle$ при
 $\angle DQP$

$\triangle ADQ$ - вн. $\angle$

Т.к. $AD = DQ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle DAB = \angle DBQ$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

6 7

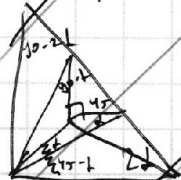
$$\begin{aligned} p+5q \\ p+6q \end{aligned}$$

$$x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$$

$$\begin{aligned} p+3q \\ p+9q \end{aligned}$$

$$\frac{2}{3}x^2 - \frac{a^3 - 2a^2}{3}x + 6 - a^5 = 0$$

$$p+5q + p+6q = a^2 - 2a$$



$$2p + 11q = a^2 - 2a$$

$$(p+5q)(p+6q) = a^2 - a - 7$$

$$6p + 36q = a^3 - 2a^2$$

$$(p+3q)(p+9q) = 6 - a^5$$

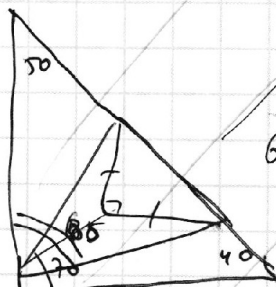
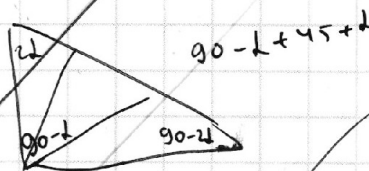
$$6p + 33q = 3a^2 - 6a$$

$$6p + 36q = a^3 - 2a^2$$

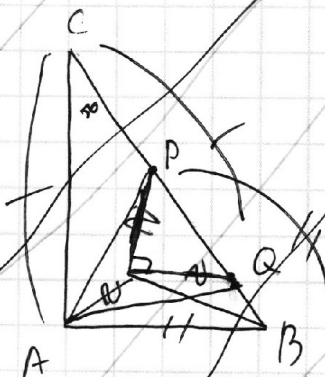
$$q = \frac{a^3 - 5a^2 + 6a}{3}$$

$$p = a^2 - 2a - \frac{11a^3 - 55a^2 + 66a}{3} = \frac{3a^2 - 6a - 11a^3 + 55a^2 - 66a}{3}$$

$$= \frac{-11a^3 + 58a^2 - 72a}{3}$$



$$\begin{aligned} 65 + 70 - 90 &= \\ &= 45 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 6 \dots 666 \varepsilon + 66 \dots 666 \cdot v_2 01 &= 7 - v_1 01 \cdot \varepsilon + (\varepsilon - v_1 01) v_2 01 = \\ &= 7 - v_1 01 \cdot \varepsilon + v_2 01 \cdot \varepsilon - v_2 101 = \varepsilon (7 - v_1 01) \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2 \\ yz = -2x + x^2 \\ zx = -2y + y^2 \end{cases} \quad x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$A = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = ?$$

Если какие-то числа из x, y, z равны между собой:

$$\text{ВОО } x=y \Rightarrow \begin{cases} x^2 = z^2 - 2z \\ x^2 = x^2 - 2x \quad | : x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = z^2 - 2z \\ z = x - 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= (x-2)^2 - 2(x-2) \\ x^2 &= x^2 - 4x + 4 - 2x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = \Leftrightarrow z = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow y = x = \frac{4}{3} \\ &= \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{64}{9} = \frac{72}{9} = 8 \quad (\text{достигается при } x=y=\frac{4}{3}, z=-\frac{2}{3}) \end{aligned}$$

Если все числа попарно разные:

$$xy - yz = -2z + z^2 + 2x - x^2$$

$$y(x-z) = -(x-z)(x+z) + 2(x-z) \quad | : (x-z) \neq 0$$

$$y = -x - z + 2 \Rightarrow x + y + z = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 4$$

$$4 - 2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx + 2(x + y + z) \quad (\text{сложим все уравнения})$$

$$4(xy + yz + zx) = 0 \Rightarrow xy + yz + zx = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$\begin{aligned} A &= x^2 + y^2 + z^2 - 4(x + y + z) + 4 \cdot 3 = \\ &= 4 - 4 \cdot 2 + 12 = 8 \end{aligned}$$

А может равняться только 8. Равенство может достигаться, когда $x=y=\frac{4}{3}, z=-\frac{2}{3}$

Ответ: 8.

$$x > 2$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 12} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 3} = \sqrt{4 \cdot 12} = \sqrt{4 \cdot 3 \cdot 4} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 3} = 4 \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \\ &= 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$xy = z^2 - 2z$$

$$\frac{xy}{z} = z - 2$$

$$xyz = A$$

$$\frac{xyz}{z} = z^2 - 2z$$

$$x^2 - 2x - \frac{A}{x} = 0$$

$$x^3 - 2x^2 - A = 0$$

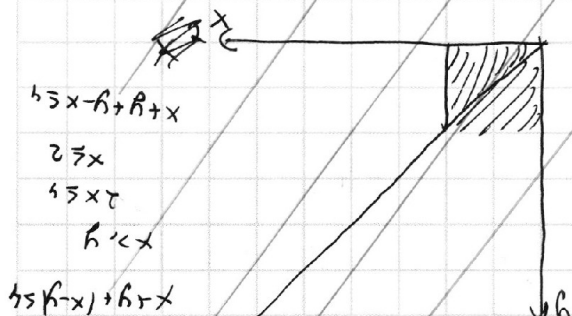
$$x + y + z = 2$$

$$xy + yz + xz = 0$$

$$y(x-z) = (z-x)(z+x) - 2(2-x)$$

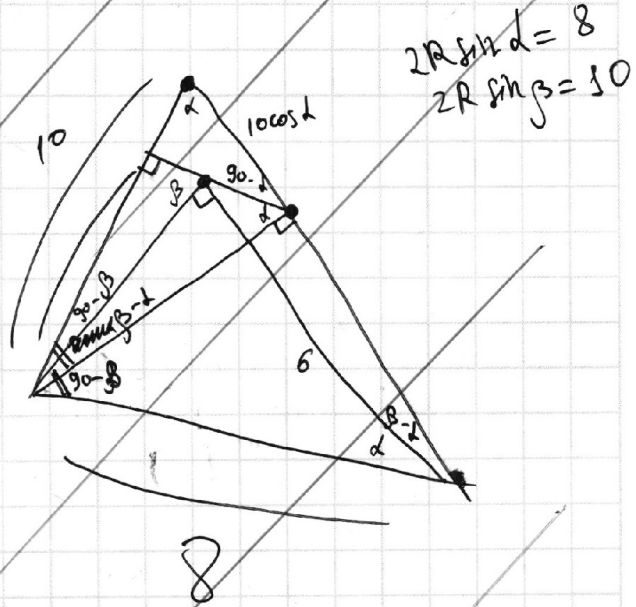
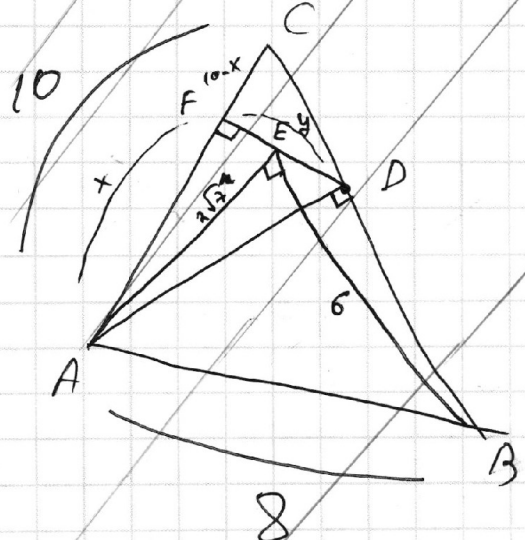
$$y = -z - x + 2$$

$$xy - yz = z^2 - x^2 - 2z + 2x$$



$$(10^n - 1)^3 = 10^{3n} - 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n - 1$$

$$8^2 - 6^2 = 2 \cdot 14 = (2\sqrt{7})^2$$



$$h = |h-x| + |h+x|$$

$$h = |h-x| + h+x$$

$$-z(z-x) = 2x$$

$$z^2 - zx = 2x$$

$$z^2 - 2z = 2x$$

$$2x + x^2 = z^2$$

$$2z + z^2 = 2x$$

$$2(x-z)^2 + (z-2)^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

черно

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2 \\ yz = -2x + x^2 \\ zx = -2y + y^2 \end{cases} \quad x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$(y-1)^2 - 1 = (-x-1)^2 - 1$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = ?$$

Если какие-то 2 числа из x, y, z равны нулю:

~~ббб $x=y \Rightarrow \begin{cases} x^2 = -2z + z^2 \\ xz = -2x + x^2 \end{cases} \quad x \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = -2z + z^2 \\ z = x-2 \end{cases}$~~

~~$x+y+z=2 \quad A = 8+8+2 \quad xy+yz+zx = -4+z^2+x+yz \quad x^2 = (x-2)^2 - 2(x-2)$~~

~~$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=4 \quad A=4$~~

~~$A + 2A + 2(-4+A) = 4 \quad A+2A = 12$~~

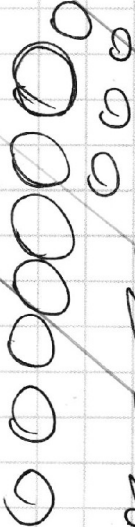
~~$x^2 = x^2 - 4x + 4 - 2x + 4$
 $0 = -6x + 8$~~

~~$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = \left(\frac{4}{3}-2\right)^2 + \left(\frac{4}{3}-2\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}-2\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{64}{9} = \frac{72}{9} = 8$~~

Если ~~какие~~ все числа x, y, z попарно разные:

~~$xy = -2z + z^2 \Rightarrow z^2 - 2z = \frac{xy}{z} \quad (z \neq 0) \quad \text{Пусть } A = xyz$~~

Выгнем из I ур-ия штырь в



~~Вероятность = $\frac{\# \text{ хороших}}{\# \text{ всего}}$~~

~~$x = \frac{4}{3}, y = \frac{4}{3}, z = -\frac{2}{3}$
 $\frac{1}{C^2} \cdot \frac{1}{C^2} \cdot \frac{1}{C^2} = \frac{1}{C^6}$~~

~~$\frac{7 \cdot 6 \cdot 2}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 2}{24} = \frac{84}{24} = 3.5$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$|x - 10 - \frac{4}{2\sqrt{3}}| \leq \frac{36}{252} \cdot 9 \cdot 25 = 180 + 45$~~

~~$\frac{(a^3 - 2a^2)^2}{3} - \frac{4(6 - a^5)}{3} = 25(a^2 - 2a)^2 - 4(a^2 - a - 7)$~~

~~$(a^3 - 2a^2)^2 - 12(6 - a^5) = 225(a^2 - 2a)^2 - 36(a^2 - a - 7)$~~

~~$a^6 - 4a^5 + 4a^4 - 72 + 12a^5 = 225a^4 - 900a^3 + 900a^2 - 36a^2 + 36a + 252$~~

~~$a^6 + 8a^5 - 221a^4 - 900a^3 - 864a^2 - 36a - 324 = 0$~~

~~$1 - 8 - 221 + 900 - 864 + 36 - 324 = 672 - 864 + 36 - 324 = -708 - 864 - 324 = -1996$~~

~~$(480, 324) = 120 + 12$~~

~~$2(240, 162) = 4(120, 81) = 12(40, 27)$~~

~~$64 - 8 \cdot 2^5 - 221 \cdot 16 + 900 \cdot 8 - 864 \cdot 4 + 72 - 324 = 64 - 256 - 3536 + 7200 - 3456 + 72 - 324 = 64 - 256 - 36 + 3700 - 3456 + 72 - 324 = 64 - 256 - 36 + 244 + 72 - 324 = 3 - 11\sqrt{13} + 2\sqrt{13}(1-1) = -156 + 240 - 320 = -236$~~

~~$76 : (1+2) = 38$~~

~~$(a^2 - 2a)^2 - 4(a^2 - a - 7) = a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 4a^2 + 4a + 28 = a^4 - 4a^3 + 4a + 28$~~

~~$a_1 + 6\sqrt{13} = -5\sqrt{13} \quad a = 2\sqrt{13} \quad 5d = 10\sqrt{13} \quad \in$~~

