



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарика. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.

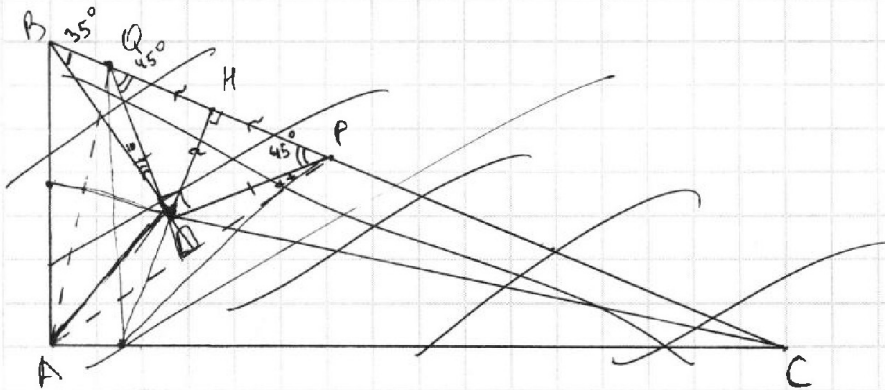


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{cases}$$

СЛОЖИМ СИСТЕМУ И ПОЛУЧИМ:

$$xy + yz + zx = x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4y + 4z \quad | \cdot 2$$

$$2xy + 2yz + 2zx = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8x + 8y + 8z$$

$$(x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2xz + z^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + 8(x + y + z) = 0$$

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2 + 8(x + y + z) = 0$$

ТЕПЕРЬ РАСКРОЕМ СКОБКИ В ДАННОМ УСЛОВИИ ВЫРАЖЕНИЯ

$$(x + 4)^2 + (y + 4)^2 + (z + 4)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 8(x + y + z) + 48$$

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + z = \frac{xy}{z} \\ 4 + x = \frac{yz}{x} \\ 4 + y = \frac{xz}{y} \end{cases} \quad x, y, z \neq 0$$

$$\Rightarrow (4 + z)^2 + (4 + x)^2 + (4 + y)^2 = \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{xz}{y}\right)^2 =$$
$$= \frac{(xy)^4 + (yz)^4 + (xz)^4}{(xyz)^2} \quad \cancel{\frac{z^4 x^4 y^4 \cdot (x+4)^4 \cdot (z+4)^4 \cdot (y+4)^4}{(xyz)^2}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $n = \underbrace{999\dots 9}_{25000} \Rightarrow n = 10^{25000} - 1$

$$n^3 = (10^{25000} - 1)^3 = (10^{25000} - 1)(10^{25000} - 1)^2 = (10^{25000} - 1)(10^{50000} - 2 \cdot 10^{25000} + 1) =$$

$$= 10^{75000} - 2 \cdot 10^{50000} + 10^{25000} - 10^{50000} + 2 \cdot 10^{25000} - 1 =$$

$$= 10^{75000} - 3 \cdot 10^{50000} + 3 \cdot 10^{25000} - 1 = (10^{75000} - 1) - 3 \cdot 10^{50000} + 3 \cdot 10^{25000} \quad (=)$$

$$(10^{75000} - 1) = \underbrace{9999\dots 99}_{75000}; \quad 3 \cdot 10^{50000} = \underbrace{30000\dots 0}_{50000}; \quad 3 \cdot 10^{25000} = \underbrace{3000\dots 0}_{25000}$$

$$= \underbrace{99999\dots 999}_{75000} - \underbrace{30000\dots 0}_{50000} + \underbrace{300000\dots 0}_{25000}$$

$$\underbrace{9999\dots 99}_{75000} - \underbrace{30000\dots 00}_{50000} = \underbrace{999\dots 96}_{24999} \underbrace{999\dots 9}_{50000}$$

(После 50000 "9" останутся 1 к. на конце $3 \cdot 10^{50000}$ 50000 "0")

$$+ \underbrace{9999\dots 96}_{24999} \underbrace{999\dots 99}_{50000}$$

$$\quad \quad \quad \underbrace{300\dots 000}_{25000}$$

$$\underbrace{99\dots 999}_{24999} \underbrace{70002}_{24999} \underbrace{99999}_{25000}$$

Итого $24999 + 25000 = 49999$ ~~д~~ДЕВЯТОК

ОТВЕТ: 49999

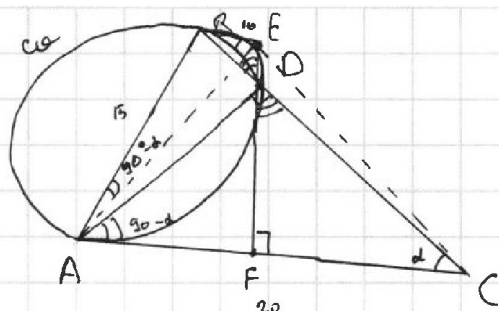


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Т.к. AB - диаметр ω , то $\angle AEB = 90^\circ$ (как вписанный, опираясь на диаметр)

Тогда $\triangle ABE$ - прямоугольный, причём AB - гипотенуза. Тогда по т. Пифагора:

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{15^2 - 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

2) Пусть $\angle ACB = \alpha$; $\angle ADB = 90^\circ$ (как вписанный, опираясь на диаметр.)

$\Rightarrow \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ \Rightarrow$ из $\triangle ADC$: $\angle DAC = 180^\circ - \angle ADC - \angle DCA = 90^\circ - \alpha$

из $\triangle CDF$: ($DF \perp AC$ по усл. $\Rightarrow \angle DFC = 90^\circ$) $\angle CDF = 90^\circ - \alpha$

Т.к. F, D, E - одна прямая и C, D, B - одна прямая, то $\angle FDC = \angle EDB = 90^\circ - \alpha$ (как вертикальные)

$ABED$ - впис. $\Rightarrow \angle EDB = \angle EAB = 90^\circ - \alpha$

$\Rightarrow \angle EAB = \angle DAC = 90^\circ - \alpha$

3) из прямоугольного $\triangle ABE$: $\sin \angle BAE = \frac{BE}{AB} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

$\angle BAE$
 $\downarrow$

$$\cos \angle BAE = \frac{AE}{AB} = \frac{5\sqrt{5}}{15} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Т.к. из п. 2) $\angle EAB = \angle DAC$, то $\sin \angle BAE = \sin \angle DAC = \frac{2}{3}$
 $\cos \angle BAE = \cos \angle DAC = \frac{\sqrt{5}}{3}$

4) рассмотрим прямоугольный $\triangle ADC$ ($\angle ADC = 90^\circ$); AC - гипотенуза
 $= CD = \sin \angle DAC \cdot AC = \frac{2}{3} \cdot 20 = \frac{40}{3}$

$$AD = \cos \angle DAC \cdot AC = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot 20 = \frac{20\sqrt{5}}{3}$$

5) из прямоугольного $\triangle FDC$ ($\angle DFC = 90^\circ$) найдем DF

$$DF = CD \cdot \cos \angle CDF$$

$$\angle CDF = 90^\circ - \alpha = \angle DAC \Rightarrow \cos \angle CDF = \cos \angle DAC = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\Rightarrow DF = CD \cdot \cos \angle CDF = \frac{40}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{40\sqrt{5}}{9}$$

6) из прямоугольного $\triangle AFD$ ($\angle AFD = 90^\circ$)

$$AF = \sqrt{AD^2 - DF^2} \text{ (по т. Пифагора)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow AF &= \sqrt{\left(\frac{20\sqrt{5}}{3}\right)^2 - \left(\frac{40\sqrt{5}}{9}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{20\sqrt{5}}{3} - \frac{40\sqrt{5}}{9}\right)\left(\frac{20\sqrt{5}}{3} + \frac{40\sqrt{5}}{9}\right)} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{60\sqrt{5} - 40\sqrt{5}}{9}\right)\left(\frac{60\sqrt{5} + 40\sqrt{5}}{9}\right)} = \sqrt{\frac{20\sqrt{5}}{9} \cdot \frac{100\sqrt{5}}{9}} = \sqrt{\frac{100^2}{9^2}} = \frac{100}{9} = \\ &= 11 \frac{1}{9} \end{aligned}$$

ОТВЕТ: $11 \frac{1}{9}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3. Зафиксируем 3 коробки в кот-е положили шарики. Пусть всего коробок n штук. Рассмотрим сначала сколько существует наборов состоящих из 5-и коробок кот-е содержат 3 коробки с шариками. Это количество равно количеству способов выбрать 2 коробки из $n-3$ т.к.

3 заданных коробки однозначно состоят в наборе, тогда останется $n-3$ коробки из кот-х мы должны выбрать 2 чтобы получить набор из 5-и коробок. Сделать это есть ровно C_{n-3}^2 способа. Причём всего таких наборов (наборов из любых 5 коробок) ровно C_n^5 . Тогда вероятность выигрыша a_1 в первом случае:

$$a_1 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$$

Аналогично рассчитаем сколько наборов подходит нам во втором случае для победы. У нас также есть 3 коробки с шариками, кот-е точно попадают в набор, но теперь нам надо выбрать ещё 3 коробки из $n-3$, чтобы дополнить набор до 6 коробок, поэтому подходящих наборов ровно C_{n-3}^3 , а всего наборов из 6 коробок C_n^6 тогда вторая вероятность a_2 равна: $a_2 = \frac{C_{n-3}^3}{C_n^6}$

Тогда посчитаем во сколько раз a_2 больше a_1 :

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{a_1} &= \frac{C_{n-3}^3}{C_n^6} : \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{C_{n-3}^3 \cdot C_n^5}{C_n^6 \cdot C_{n-3}^2} = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{(n)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{(n)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{4 \cdot 7}{5} = \frac{28}{5} = 5,6 \end{aligned}$$

ОТВЕТ: в $\frac{28}{5}$ раз



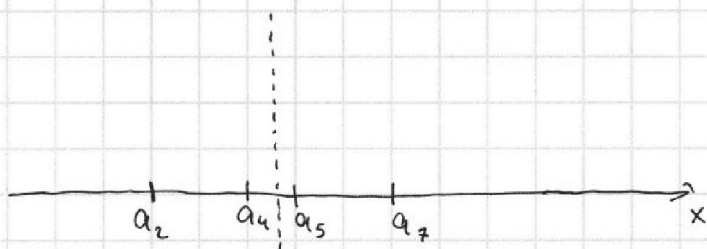
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим ось Ox и нанесём на неё 2, 4, 5, 6, 7 члены арифметической прогрессии. Пусть первый член равен a_1 , i -й член равен a_i ; d - разность прогрессии.



Заметим, что a_4 и a_5 и a_2 и a_7 симметричны одной и той же прямой $x = a_1 + 3,5d$. И правда от a_2 до $x = a_1 + 3,5d$ расстояние по оси Ox равно $2,5d$, аналогично для a_7 , а для a_4 и a_5 это расстояние равно $0,5d$. Т.к. a_4 и a_5 - корни квадратного уравнения, то они симметричны оси симметрии графика этого уравнения, тогда т.к. a_4 и a_5 симметричны относительно $x = a_1 + 3,5d$, то это и есть ось симметрии параболы являющейся графиком уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2 - a^3}{2} = 0$ (1)

Аналогично получаем, что $x = a_1 + 3,5d$ - ось симметрии параболы $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ (2)

Тогда координаты вершин по оси Ox обеих парабол равны.

По формуле $x_0 = \frac{-b}{2a}$ найдем абсциссы вершин парабол (1) и (2)

Для (1): $x_0 = \frac{a^2 - a}{2}$ Для (2): $x_0 = \frac{a^3 - a^2}{4}$, тогда т.к. мы доказали, что абсциссы вершин обеих парабол равны, то

$$\frac{a^2 - a}{2} = \frac{a^3 - a^2}{4} \quad | \cdot 4$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 2a = a^3 - a^2$$

$$a^3 - 3a^2 + 2a = 0$$

$$a(a^2 - 3a + 2) = 0$$

$$a(a-1)(a-2) = 0 \Rightarrow a_1 = 0; a_2 = 1; a_3 = 2$$

$\Rightarrow a$ может принимать только значения 0, 1, 2

Подставим и проверим каждое значение:

↓



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) $a=0$

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = x^2 + \frac{2}{3} \Rightarrow x^2 = -\frac{2}{3} \quad !? (x^2 \geq 0)$$

2) $a=1$

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = x^2 + \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{3} \quad !? (x^2 \geq 0)$$

3) $a=2$

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = x^2 - 2x - \frac{6}{3} = x^2 - 2x - 2 = 0$$

КОРНИ ДАННОГО УРАВНЕНИЯ:

$$D = 2^2 + 4 \cdot 2 = 12$$

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{12}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{2 - \sqrt{12}}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}$$

$$2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 2x^2 - 4x - 148 = 0$$

$$2x^2 - 4x - 148 = 0 \quad |:2$$

$$x^2 - 2x - 74 = 0$$

$$D = 2^2 + 4 \cdot 74 = 4 + 296 = 300$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2 + \sqrt{300}}{2} = 1 + 5\sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{2 - \sqrt{300}}{2} = 1 - 5\sqrt{3}$$

ОСТАЁТСЯ ПРОВЕРИТЬ ЧТО ПОЛУЧЕННЫЕ КОРНИ ЯВЛ-СЯ ЧЛЕНАМИ
ОДНОЙ И ТОЙ ЖЕ АРИФМЕТ ПРОГРЕССИИ. ПУСТЬ $a_4 = 1 - \sqrt{3}$; $a_5 = 1 + \sqrt{3}$
ТОГДА $d = a_5 - a_4 = 2\sqrt{3} \Rightarrow a_2 = a_4 - 2d$; $a_7 = a_5 + 2d$:
 $\Rightarrow a_2 = a_4 - 2 \cdot 2\sqrt{3} = 1 - \sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 1 - 5\sqrt{3}$ (ЯВЛ-СЯ КОРНЕМ ВТОРОГО
УРАВНЕНИЯ)

$a_7 = a_5 + 2 \cdot 2\sqrt{3} = 1 + \sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 1 + 5\sqrt{3}$ (ЯВЛ-СЯ КОРНЕМ ВТОРОГО
УРАВНЕНИЯ)

$\Rightarrow a=2$ ПОВХ.

ОТВЕТ: 2

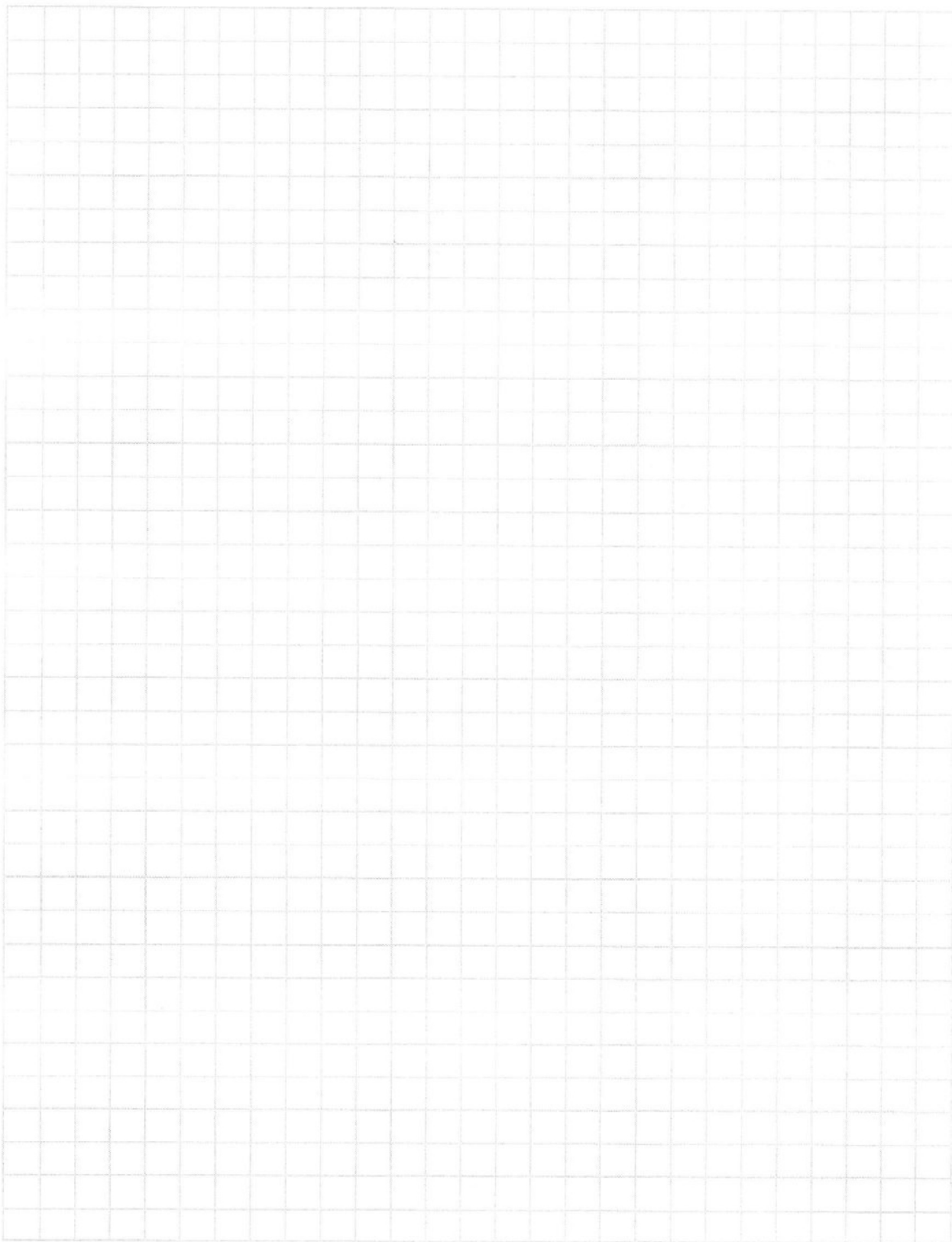


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть всего коробок n штук

кол-во способов выбрать 3 коробки куда положат шарик C_n^3

кол-во способов выбрать игроку 5 коробок ровно C_n^5

из этих $\leftarrow$
нам подходят наборы из 3-х выбранных заранее
коробок и еще каких-то двух
Поэтому таких наборов столько, сколько
способов выбрать 2 коробки из $n-3$

т.е. C_{n-3}^2

$\Rightarrow$ Вероятность выигрыша $\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$

Если он выбирает 6 коробок то благоприят. исходов

$C_{n-3}^5 \Rightarrow$ Искомая разность: $\frac{C_{n-3}^5}{C_n^6} : \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{C_{n-3}^5}{C_{n-3}^2}$

$$\frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{(n-3)(n-4)}{2} = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot \frac{(n-3)(n-4)}{2} =$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{60} = \frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{60}$$

Проверим для $n=8$

$$C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2}$$

$$C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

$$C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

$$C_5^5 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1$$

$$\Rightarrow \text{Вероятность } 1 = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$$

~~28~~

Вероятность 2 = 1

$$\frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{n(n-1)(n-2)} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(n-3)(n-4)}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} xy = z(4+z) \\ yz = x(4+x) \\ zx = y(4+y) \end{cases}$$

$$\left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2$$

$$n = \left(10^{25000} - 1\right)^3$$

$$\left(10^{25000} - 1\right)^3 =$$

$$(x-1)^3 = (x-1)(x^2 - 2x + 1)$$

$$\left(10^{25000} - 1\right)^2 = \left(10^{50000} - 2 \cdot 10^{25000} + 1\right) \left(10^{25000} - 1\right) =$$

$$= 10^{75000} - 2 \cdot 10^{50000} + 10^{25000} - 10^{50000} + 2 \cdot 10^{25000} - 1$$

$$10^{75000} - 1 = 999 \dots 9$$

$$\left(10^{75000} - 1\right) - 3 \cdot 10^{50000} + 3 \cdot 10^{25000}$$

$$999 \dots 6 \dots 9999$$

$$\left(10^3 - 1\right) - 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 = \left(10^3 - 1\right) - 3 \cdot 10(10 + 1)$$

$$999 - 300 + 30$$

$$699 = 729$$

$$999999 - 30000 + 300$$

$$+ 999999 + 300 = 999999$$

$$\begin{array}{r} 9999 \dots 699 \dots \\ 24999 \quad 50000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 999999 \\ 300 \\ \hline 999999 \end{array}$$

$$(x+y)(z-x-y) + y$$

$$xy + yz + zx = 4x + 4y + 4z + x^2 + y^2 + z^2 \quad | \cdot 2$$

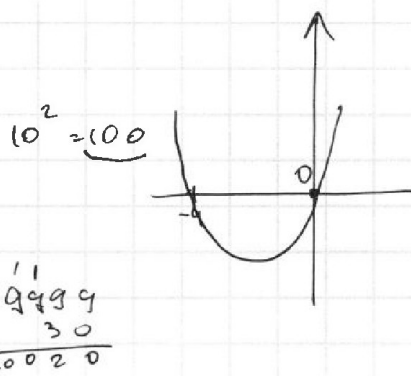
$$2xy + 2yz + 2zx = 8x + 8y + 8z + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$$

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = -8(x+y+z)$$

$$x(4+y) + y(4+z) + z(4+x) + 48$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 + 8y + 16 + z^2 + 8z + 16$$

$$xy + yz + zx + 4x + 4y + 4z + 48$$





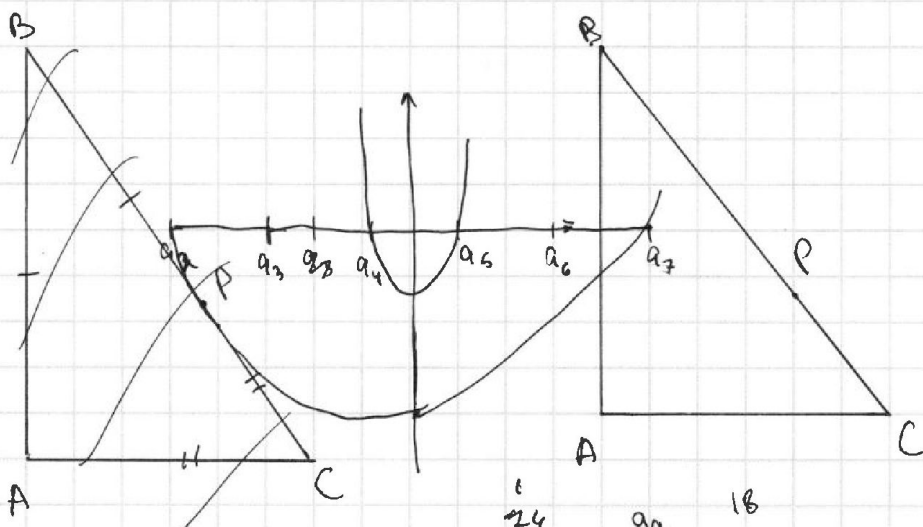
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

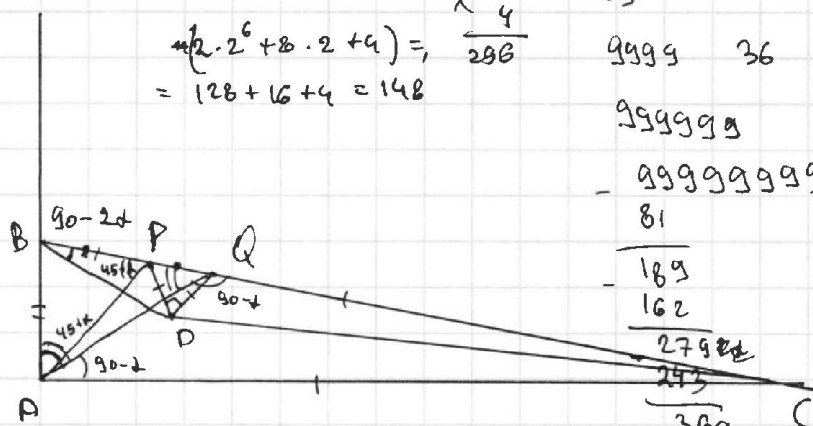
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 132 \\ 11 \overline{) 132} \\ \underline{11} \\ 22 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & 4(2 \cdot 2^6 + 8 \cdot 2 + 4) = \frac{2^4}{296} \\ & = 128 + 16 + 4 = 148 \end{aligned}$$



$$\begin{array}{r} 9999999 \\ 81 \overline{) 999999999} \\ \underline{81} \\ 189 \\ \underline{162} \\ 279 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ 12344 \overline{) 999999999} \\ \underline{81} \\ 189 \\ \underline{162} \\ 279 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 999999999 \\ 81 \overline{) 999999999} \\ \underline{81} \\ 189 \\ \underline{162} \\ 279 \\ \underline{243} \\ 369 \\ \underline{324} \\ 459 \\ \underline{405} \\ 549 \\ \underline{488} \\ 619 \\ \underline{567} \\ 529 \end{array}$$

$$a_2, a_4, a_5, \dots, a_7$$

$$\text{верш} = \frac{a^2 - a}{2} \quad \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2 - a^3}{3} = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (a^2 - a)^2 - 4 \cdot \left(\frac{2 - a^3}{3} \right) = a^4 - 2a^3 + a^2 - \left(\frac{8 - 4a^3}{3} \right) = \\ &= \frac{3a^4 - 6a^3 + 3a^2 - 8 + 4a^3}{3} = \frac{3a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 8}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{a^2 - a}{2} = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$a_1 = 0 \quad \begin{aligned} & a(a^2 - 3a + 2) \\ & a(a-1)(a-2) \end{aligned}$$

$$2a^2 - 2a = a^3 - a^2 \Rightarrow 3a^2 - 2a^3 + 2a = 0 \quad a^3 - 3a^2 + 2a = 0$$

n	n ²
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64

