



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

21

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{cases}$$

$$x \neq y \neq z \neq 0$$

$$\cancel{(x+y)} A = (x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 - ?$$

$$x = \frac{4z + z^2}{y}$$

$$4z^2 + z^3 = 4y^2 + y^3$$

$$4(z-y)(z+y) = (y-z)(y^2 + yz + z^2)$$

$$-4z - 4y = y^2 + z^2 + yz$$

$$y^2 + x^2 + z^2 + 4x + 4z + 4y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{xy + y + z} \quad xy + yz + zx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y+2)^2 + (x+2)^2 + (z+2)^2 - 12 = 0$$

$$(y+4)^2 + (x+4)^2 + (z+4)^2 - 4x - 4y - 4z - 16 - 16 - 16 = 0$$

$$(y+4)^2 + (x+4)^2 + (z+4)^2 - 4(x+4) + 4(y+4) - 4(z+4) = 0$$

$$\cancel{y(y+4) + x(x+4) + z(z+4) = 0}$$

$$A = 4(x+y+z) + 48 = -y^2 - x^2 - z^2 + 48$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

n^2
 $n^3 = ?$

$$n = 9999 \dots 9$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{25000}$$

$$n^3 = 9^3 \cdot (10^{25} + 10^{24} + \dots + 10^0)^3 = 729 \cdot \underbrace{(111111 \dots 1)^3}_{25000} =$$

$$= 729 \cdot \underbrace{1233 \dots 3321}_{24996}$$

Отсюда получаем, что
их произведение будет 25000

Ответ: 25000



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2 - a^3}{3} = 0 \rightarrow a_4 \rightarrow a_5$$

$$2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0 \rightarrow a_2 \rightarrow a_7$$

1) По м. Виетта:

$$\begin{cases} a_4 + a_5 = a^2 - a \\ a_4 \cdot a_5 = \frac{2 - a^3}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 + a_7 = \frac{a^3 - a^2}{2} \\ a_2 \cdot a_7 = -a^6 - 4a - 2 \end{cases}$$

2) a_n - ариф. прогрессия:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_4 &= a_1 + 3d \\ a_5 &= a_1 + 4d \\ a_7 &= a_1 + 6d \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 7d = a^2 - a \\ a_1^2 + 7a_1d + 12d^2 = \frac{2 - a^3}{3} \end{cases}$$

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 7d = \frac{a^3 - a^2}{2} \\ a_1^2 + 7a_1d + 6d^2 = -a^6 - 4a - 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

Подставим их в гр-я:

Ⓘ $a = 0$: $\begin{cases} x^2 + \frac{2}{3} = 0 \\ 2x^2 - 4 = 0 \end{cases} - \emptyset$

ⓗ $a = 1$

$$\begin{cases} x^2 + \frac{1}{3} = 0 \\ 2x^2 - 14 = 0 \end{cases} - \emptyset$$

Ⓙ $a = 2$

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 2 = 0 \\ 2x^2 - 4a - 148 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x^2 - 2x - 2 = 0 \\ x^2 - 2a - 74 = 0 \end{cases}$$

$$6d^2 = -x + \frac{64}{6} + 8 + x$$

$$d = 2\sqrt{3}$$

$$a_1 = 1 - 7\sqrt{3}$$

Проверка:

$$1 - 14\sqrt{3} + 147 + 14\sqrt{3} - 289 + 144 = -74$$

$$-74 = -74 \text{ верно}$$

Ответ: $a = 2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$8) \angle CON = 60^\circ$$

$$\begin{aligned} 3) S_{\varphi} &= 2 \left(\frac{\pi}{4} (R^2 - r^2) + BC \cdot BK + \frac{1}{6} \cdot \pi r^2 - \frac{1}{2} \cdot CN \cdot ON \right) = \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{4} (36^2 - 12^2) + 6 \cdot 18\sqrt{3} + \frac{1}{6} \pi \cdot 12^2 - \frac{1}{2} \cdot 18\sqrt{3} \cdot 18 \right) = \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{4} \cdot 24 \cdot 48 + 24\pi - 54\sqrt{3} \right) = 26 \cdot 24\pi - 108\sqrt{3} = 664\pi - 108\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } 664\pi - 108\sqrt{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

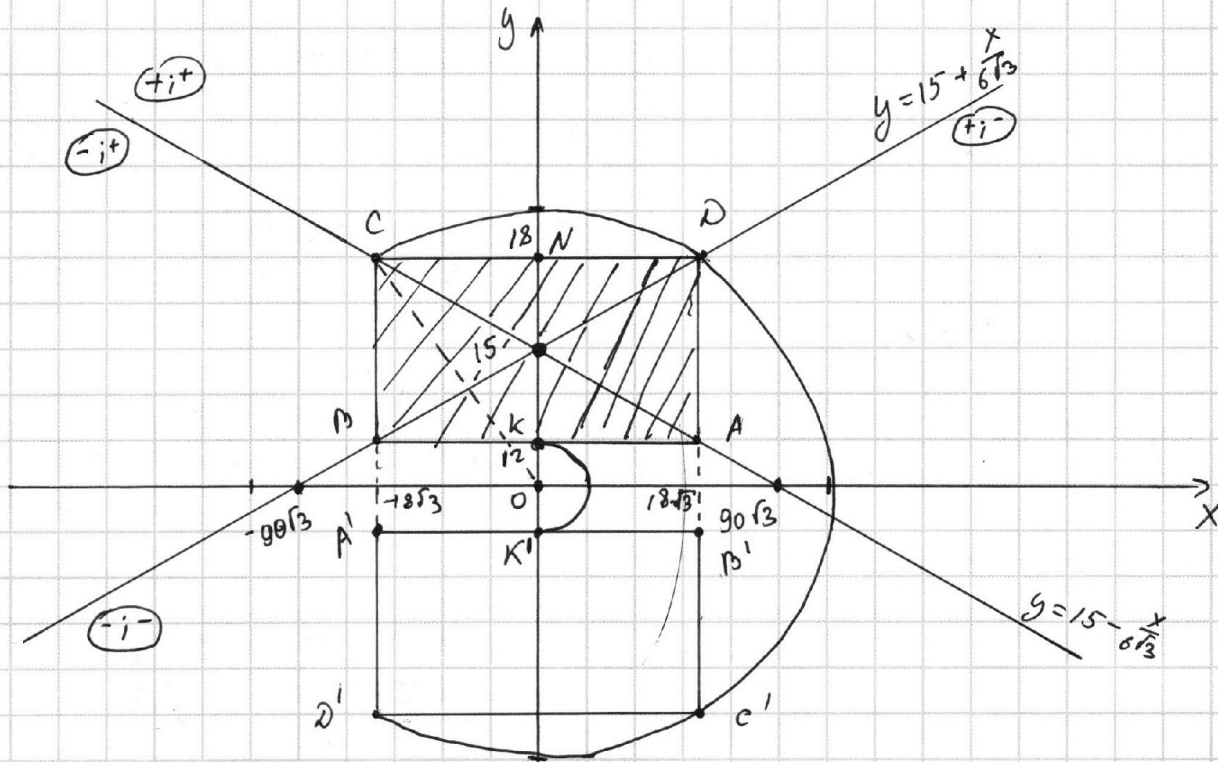
СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6

$$\left| y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \right| + \left| y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \right| \leq 6$$

$S = ?$



1) $(+; +): 2y - 30 \leq 6$

$y \leq 18$

2) $(+; -): x \leq 18\sqrt{3}$

3) $(-; -): -2y + 30 \leq 6$

$y \geq 12$

4) $(-; +): x \geq -18\sqrt{3}$

5) из $ABCD$ в $A'B'C'D'$ через симметрию отн. м. O

6) Затем, что при таком переносе, каждая точка X движется по окр. с радиусом

OX и преобразовывает расстояние в поворотную окр.

Таким образом всегда будет две (в силу симметрии). например C и D ; A и B (они лежат на одной окр.

7) Итоговая площадь будет площадь фигуры $KBCD'A'K'$ (ко - мин. радиус, со - макс. рад.)

$r = OK = 12$; $CO = \sqrt{KB^2 + NO^2} = \sqrt{18^2 + (18\sqrt{3})^2} = 36 = R$

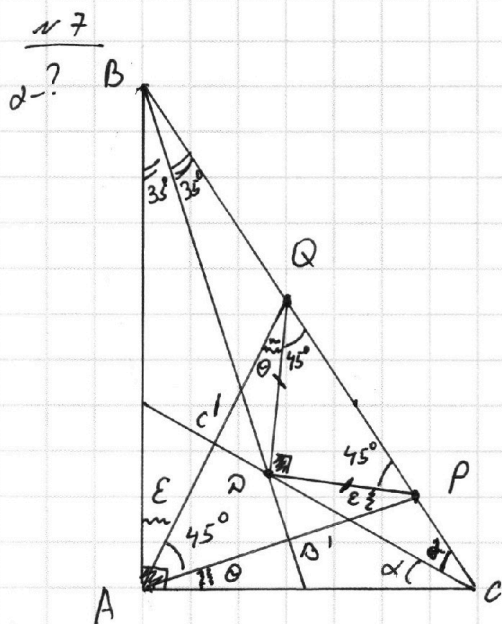


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) $\triangle ABP - p/d \Rightarrow \angle BAB = \angle BPA = \beta$

$\triangle ACQ - p/d \Rightarrow \angle QAC = \angle QCA = \gamma$

2) Пусть $\angle QAP = \delta$, тогда

$\beta + \gamma - \delta = 90^\circ \Rightarrow \beta + \gamma = 90^\circ + \delta$

$\angle AQP + \angle QPA + \angle PAQ = 180^\circ$

~~$\gamma + 45^\circ + \beta - 45^\circ + \delta = 180^\circ$~~

$\gamma + \beta + \delta = 180^\circ \Rightarrow \delta = 45^\circ$

3) Пусть $\angle APD = \epsilon = \beta - 45^\circ = \angle BAQ$
 $\angle AQD = \theta = \gamma - 45^\circ = \angle PAC$

4) ~~Получаем, что $AQ = AP$~~

5) ~~то~~

4) Получаем, что

$AB' = B'P \Rightarrow BB' - \text{биссек.}$
 $\triangle ABP - p/d$

$ABB' = B'BP = 35^\circ$

3) Анализируя CC' - биссектриса

$2\alpha + 35^\circ \cdot 2 = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 10^\circ$

Ответ: 10°

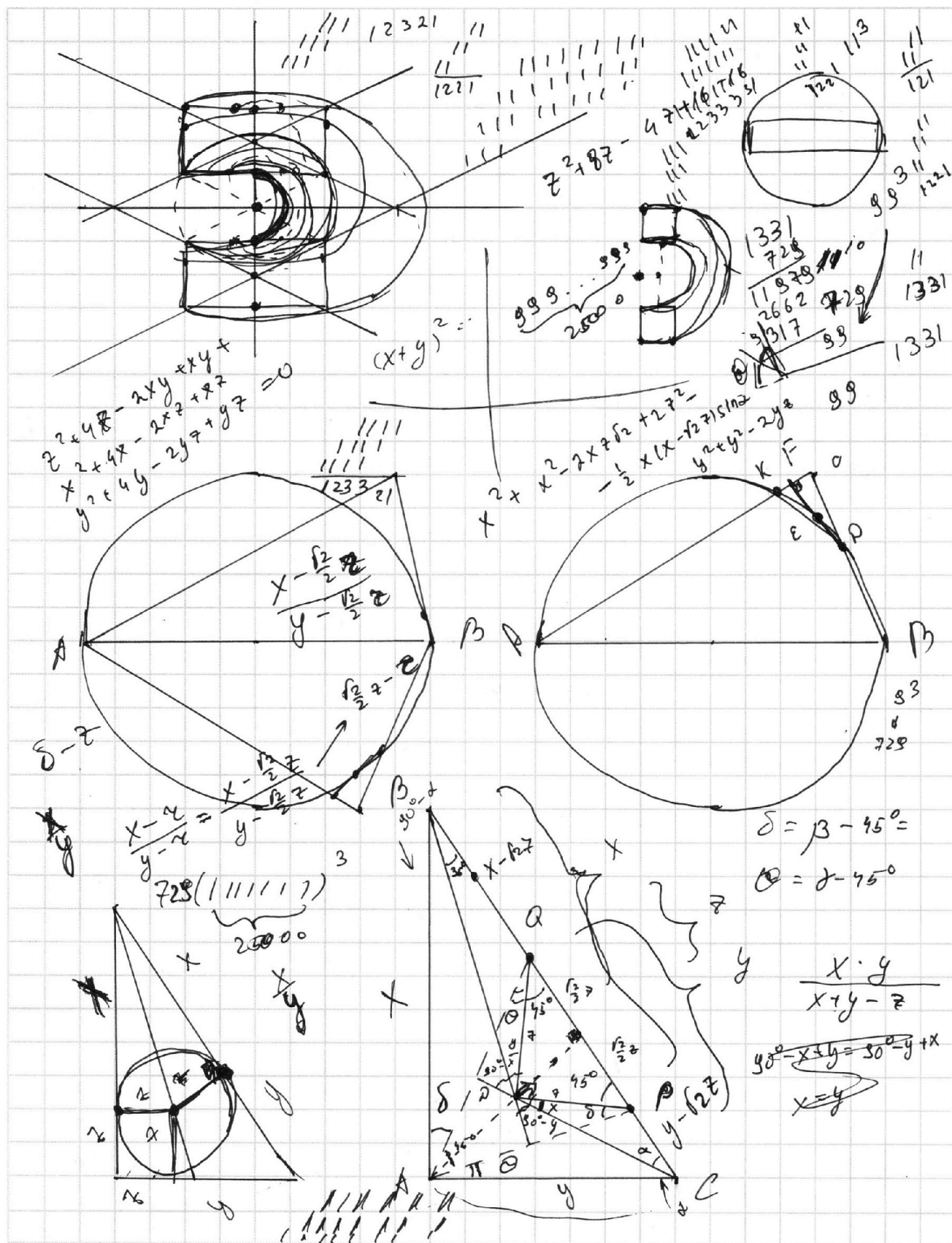
The page contains a complex geometric diagram of a sphere with points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z. The sphere has a horizontal diameter AB and a vertical radius CF. A point D is on the surface, and a line segment CD is drawn. A point E is on the surface, and a line segment CE is drawn. A point F is on the surface, and a line segment CF is drawn. A point G is on the surface, and a line segment CG is drawn. A point H is on the surface, and a line segment CH is drawn. A point I is on the surface, and a line segment CI is drawn. A point J is on the surface, and a line segment CJ is drawn. A point K is on the surface, and a line segment CK is drawn. A point L is on the surface, and a line segment CL is drawn. A point M is on the surface, and a line segment CM is drawn. A point N is on the surface, and a line segment CN is drawn. A point O is on the surface, and a line segment CO is drawn. A point P is on the surface, and a line segment CP is drawn. A point Q is on the surface, and a line segment CQ is drawn. A point R is on the surface, and a line segment CR is drawn. A point S is on the surface, and a line segment CS is drawn. A point T is on the surface, and a line segment CT is drawn. A point U is on the surface, and a line segment CU is drawn. A point V is on the surface, and a line segment CV is drawn. A point W is on the surface, and a line segment CW is drawn. A point X is on the surface, and a line segment CX is drawn. A point Y is on the surface, and a line segment CY is drawn. A point Z is on the surface, and a line segment CZ is drawn.

Handwritten notes include:

- $AF = ?$
- $AC = 20$
- $AB = 15 \Rightarrow AE$
- $BE = 10$
- $d = 2\sqrt{3}$
- $a_1 = 1 - \frac{7}{6}d$
- $2a_1 + 7d = 2$
- $2 + 7ad + 12d^2 = -2$
- $2 + 7ad + 12d^2 = -2$
- $a_1 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}a^3$
- $a^4 - \frac{2}{3}a^3 + a^2 - \frac{8}{3} = -\frac{4}{3}d^2$
- $- \frac{4}{3}d^2 = -\frac{4}{3}(3) = -4$
- $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$
- $1 - 7d + \frac{49}{4}d^2 + \frac{7}{2}d = 79 \cdot 2$
- $- \frac{13}{2}d + 37 = 37$
- $a_1 + 12d^2 = -2$
- $a_2 = a_1 + d$
- $a_4 = a_1 + 3d$
- $a_5 = a_1 + 4d$
- $a_7 = a_1 + 6d$
- $2a_7 + a_2 + a_4 = 4a_5$
- $(a_1 + 3d)(a_1 + 4d)$
- $(a_1 + 6d)(a_1 + 6d)$
- $a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{2}$
- $a - 1 = \frac{a^2 - a}{2}$
- $2a - 2 = a^2 - a$
- $a = 0$
- $a^2 - 3a + 2 = 0$
- $a = 2$
- $a = 1$

At the bottom, there are more calculations:

- $1 - 14\sqrt{3} + 48 \cdot 3 + 7(-7\sqrt{3})$
- $2a_1 + 7d = a^2 - a$
- $2a_1 + 7d = \frac{a^3 - a^2}{2}$
- 280
- 254





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical solution on grid paper, featuring geometric diagrams and algebraic equations.

Geometric Diagrams:

- Top left: A circle with points A, B, C, D, E, F. Lines connect various points, forming a complex polygonal structure.
- Top right: A circle with points A, B, C, D, E, F. Lines connect various points, forming a complex polygonal structure.
- Middle left: A circle with points A, B, C, D, E, F. Lines connect various points, forming a complex polygonal structure.
- Middle right: A circle with points A, B, C, D, E, F. Lines connect various points, forming a complex polygonal structure.
- Bottom left: A triangle with vertices A, B, C. Points P, Q, R are marked on the sides. Lines connect these points, forming a smaller triangle.
- Bottom right: A triangle with vertices A, B, C. Points P, Q, R are marked on the sides. Lines connect these points, forming a smaller triangle.

Algebraic Equations and Calculations:

- $4z^2 + z^3 = 4y^2 + y^3$
- $x = 5$
- $y = 5$
- $z = 5$
- $5 \cdot 5 = 4 \cdot 5 + 5$
- $x_0 = -x_0$
- $y = -2$
- $x = -2$
- $y = -2$
- $25 = -20 + 25$
- $5 \cdot 5 = 4 \cdot 5 + 5$
- $36 - 24$
- $xy + yz + zx = 47 + 4x + 4y + x^2 + y^2 + z^2$
- $(x+4)^2 - 4x - 16 - xy + (y+4)^2 - 4y - 16 - yx + (z+4)^2 - 4z - 16 - yz = 0$
- $xy + yz + zx = 4(x+y+z) + (x+y+z)^2 - 2xy - 2xz - 2yz$
- $(y+2)^2 + (z+2)^2 + (x+2)^2 - 12 = 0$
- $x^2 + 8x + 16 + y^2 + 8y + 16 + z^2 + 8z + 16 = A$
- $x^2 + y^2 + z^2 + 8(x+y+z) +$
- $4(z-y) = -y^2 - yz - z^2$
- $y^2 + 4z + z^2 + 4y + yz = 0$
- $y^2 + 4z + z^2 + 4y + x^2 = 0$
- $(y+2)^2 + (z+2)^2 + (x+2)^2 - 12 = 0$
- $y^2 + 4z + z^2 + 4y + x^2 = 0$
- $4z^2 + z^3 = 4y^2 + y^3$
- $4(2-y)(2+y) = (y-2)(y^2 + yz + z^2)$
- $-4y - 4z = y^2 + yz + z^2 + x^2 + z^2$
- $xz = 4(x+z) + z^2$
- $(y+2)^2 + (z+2)^2 + (x+2)^2 - 12 = 0$
- $xy + yz + zx = 47 + 4x + 4y + x^2 + y^2 + z^2$
- $x = y$
- $x^2 = 4z + z^2$
- $xz = 4x + x^2$
- $xz = x + x^2$
- $\beta + \gamma = 135^\circ$
- $\beta + \gamma = 90^\circ$
- $\beta + \gamma + \delta = 180^\circ$
- $2\delta = 90^\circ$
- $\delta = 45^\circ$
- $\alpha = ?$
- $\alpha = 120^\circ$
- $x = \frac{4z + z^2}{y}$
- $4z^2 + z^3 = 4y^2 + y^3$