



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1} \begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases} \begin{cases} xy = 2(3+z) \\ yz = 3x(3+x) \\ zx = y(3+y) \end{cases} \begin{aligned} 3+z &= \frac{xy}{2} \\ 3+x &= \frac{yz}{3} \\ 3+y &= \frac{zx}{y} \end{aligned} \text{ так } x, y, z \neq 0$$

$$A = (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = \frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{z^2 x^2}{y^2} = \frac{3x^2 y^2 z^2}{x^2 y^2 z^2} = 3$$

выражение равно 3 при всех $x, y, z \neq 0$, для удобства значения выражения обозначим как A

Рассмотрим значения выражения тогда, переменные могут равняться 0, т.к. переменные взаимно замкнутые рассмотрим только 3 случая, где 1, 2 или 3 переменные равны 0:

1 переменная: $(x=0)$!
пусть $x=0$

$$\begin{cases} 0 = 2(3+z) \\ yz = 0 \\ 0 = 3(y+y^2) \\ 0 = y(3+y) \end{cases} \begin{aligned} A &= 3^2 + 0^2 + 3^2 = 18 \\ A &= 0^2 + 9^2 + 9^2 = 27 \\ A &= 3^2 + 0^2 + 3^2 = 18 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} z = -3 \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} y = -3 \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Ответ: выражение может принимать значения 3, 18, 27

На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

② Полюсники не влияют на к-во g при n^2

~~$$\begin{array}{r}
 9999 \dots 9999 \\
 9999 \dots 9999 \\
 9999 \dots 9999 \\
 9999 \dots 9999 \\
 9999 \dots 9999 \\
 9999 \dots 9999 \\
 9999 \dots 9999 \\
 9999 \dots 9999 \\
 9999 \dots 9999 \\
 9999 \dots 9999
 \end{array}$$~~

10000 compression

10000

max AF = $3\frac{1}{18}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) Рассчитайте вероятность с 5 поражениями.

Количество выигрышных способов $\rightarrow$

Во всех выигрышных способах будут выбраны 3 правых порошка, тогда кол-во способов зависит от двух других выбранных порошков. Пусть x будет количество порошков.

$$\frac{(x-3)(x-4)}{2} - \text{кол-во выигрышных способов}$$

$$\frac{x(x-3)(x-2)(x-3)(x-4)}{5!} - \text{кол-во способов выбрать 5 порошков}$$

$$\text{Когда вероятность выигрыша } P_0 = \frac{(x-3)(x-4) \cdot 5!}{2 \cdot x(x-3)(x-2)(x-3)(x-4)} =$$

$$= \frac{60}{2(x-1)(x-2)}$$

Аналогично, но для 6 порошков

$$\frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{3!} - \text{кол-во выигрышных способов}$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{6!} - \text{общее кол-во способов выбора}$$

$$P = \frac{(x-3)(x-4)(x-5) \cdot 6!}{3! \cdot x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} = \frac{120}{x(x-1)(x-2)}$$

Вероятности увеличились в:

$$\frac{120 \cdot x(x-1)(x-2)}{x(x-1)(x-2) \cdot 60} = 2 \text{ раза}$$

Ответ: в 2 раза



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$⑤ \quad x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

по Т. Виета:

$$\begin{cases} a_5 + a_6 = a^2 - a \\ a_5 \cdot a_6 = a - 5 \end{cases}$$

где a_5 и a_6 — члены арифм. прогрессии

$$\begin{cases} a_3 + a_8 = \frac{a^3 - a^2}{4} \\ a_3 \cdot a_8 = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4} \end{cases}$$

распишем a_5, a_6, a_3 и a_8 по формулам члена арифм. прогрессии

$$\begin{cases} a_1 + 4d + a_1 + 5d = a^2 - a & (1) \\ (a_1 + 4d)(a_1 + 5d) = a - 5 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 3d + a_1 + 7d = \frac{a^3 - a^2}{4} & (2) \\ (a_1 + 3d)(a_1 + 7d) = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4} & (4) \end{cases}$$

приравняем (1) и (2):

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$a(a^2 - 5a + 4) = 0$$

$$d = \frac{25}{16} - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{16}$$

$$\frac{a^3}{4} - \frac{5a^2}{4} + a = 0$$

$$a = 0 \quad a = 1$$

$$a = \frac{\frac{5}{4} - \frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = 1$$

$$a = \frac{\frac{5}{4} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = 4$$

Подставим эти значения a в (3) и (4)

$$a = 0$$

$$\begin{cases} (a_1 + 4d)(a_1 + 5d) = 4 - 5 \\ (a_1 + 2d)(a_1 + 7d) = -\frac{4}{4} \end{cases}$$

$$a = 1$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 9da_1 + 20d = -4 \\ a_1^2 + 9da_1 + 24d = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 9da_1 + 20d = -5 \\ a_1^2 + 9da_1 + 24d = -\frac{4}{4} \end{cases}$$

$$-4d = -3\frac{3}{4}$$

$$d = \frac{8}{16}$$

$$a = 4$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 9da_1 + 20d = -1 \\ a_1^2 + 9da_1 + 24d = \end{cases}$$

$$-4d = -4$$

$$d = \frac{1}{4}$$

имеем $a = 0; 1; 4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

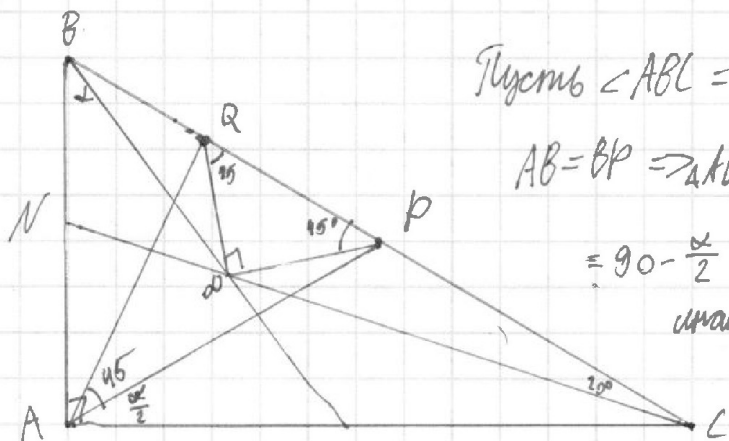
6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(7)



Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle ACB = 90 - \alpha$

$$AB = BP \Rightarrow \triangle ABP \text{ - } p.d. \Rightarrow \angle BAP = \angle BPA = \frac{180 - \alpha}{2} =$$

$$= 90 - \frac{\alpha}{2}; \text{ т.к. } \angle ABC = 90 \Rightarrow \angle PAC = \frac{\alpha}{2}$$

аналогично $QC = AC \Rightarrow \triangle AQC \text{ - } p.d.$

$$\angle QAC = \angle AQC = \frac{180 - \alpha}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\angle APC = \frac{\alpha}{2}, \angle QPC = 45 + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \angle AQP = 45^\circ$$

$$\angle QAP = 45^\circ \Rightarrow \angle NPQ = 45$$

$$\angle NPQ = 135^\circ \text{ т.к. } \angle QPC = 180^\circ - \angle NPQ = 180 - 45 = 135^\circ$$

$$\angle QPB = 180 - 135 - 20 = 25^\circ$$

$$\text{аналогично } \angle QPB = 135^\circ$$

$$\angle NPQ = 180 - 90 - 25 = 65^\circ$$

$$\angle BQP = \angle NPQ - \angle NPB = 65^\circ - 45^\circ = 20^\circ$$

$$\angle PBC = 180^\circ - \angle NPQ - \angle QPB = 180^\circ - 20^\circ - 135^\circ = 25^\circ$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{(x-3) \cdot (x-4) \cdot 5!}{2 \cdot (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} = \frac{60}{x(x-1)(x-2)} = \frac{60}{x(x^2-3x+2)}$$

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$$

$$\frac{(x-3)(x-4)(x-5) \cdot 6!}{3! \cdot 2(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} = \frac{120}{2(x-1)(x-2)} = \frac{10x-100}{x(x^2-3x+2)}$$

$$\left| x - \frac{15}{2} + \frac{4}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} - \frac{4}{6\sqrt{3}} \right|$$

$$x - \frac{15}{2} + \frac{4}{6\sqrt{3}} \geq 0$$

$$x - \frac{15}{2} - \frac{4}{6\sqrt{3}} \leq 0$$

$$26\sqrt{3}x - 15\sqrt{3} + 4 \geq 0$$

$$63x - 15\sqrt{3} \leq 4$$

$$y \geq 45\sqrt{3} - 65x$$

$$A: x - \frac{15}{2} + \frac{4}{6\sqrt{3}} + x - \frac{15}{2} - \frac{4}{6\sqrt{3}} \leq 9$$

$$2x - 15 \leq 3$$

$$2x \leq 18$$

$$-2x + 15 \leq 3$$

$$-2x \leq -12$$

$$x \geq 6$$

$$x + 3 \leq 9$$

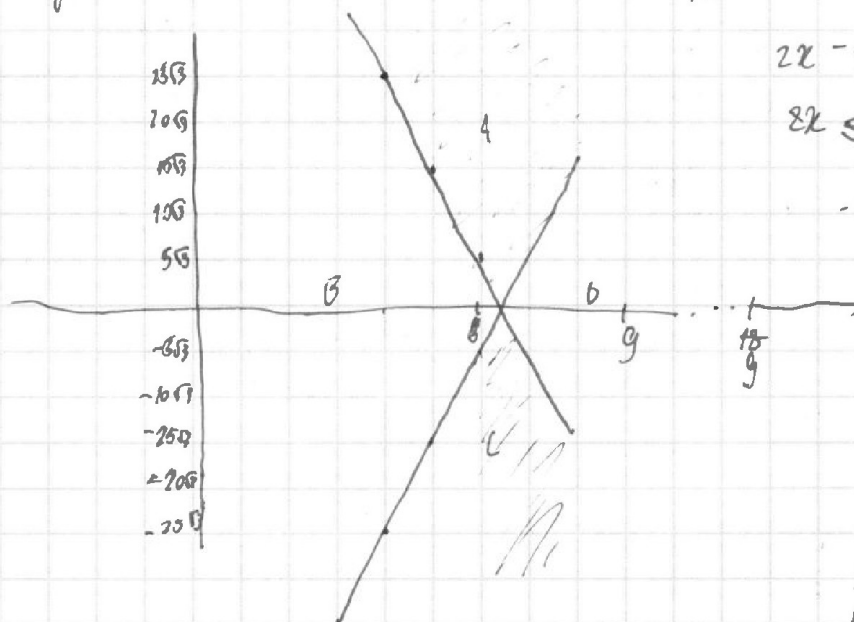
$$x \leq 6$$

$$x \geq 6$$

$$x \geq 6$$

$$x \geq 6$$

$$x \geq 6$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$AC=10$ $AB=6$ $BE=5$

$\sin 2\alpha = \frac{H}{AC}$
 $\tan 2\alpha = \frac{H}{AC-2}$
 $\tan \beta = \frac{H}{AB-2}$
 $H = (AB-2) \tan \alpha$

$\tan \beta = \frac{\tan 10(AC-2)}{AB-2}$

$AE = 26$
 $AE = \sqrt{11^2 + 18^2 + 20^2} = 26$

$AD = \frac{AF}{AC} = \cos \alpha$
 $AD = \frac{\cos \alpha}{10} AC \cos \alpha$
 $AE \cos \alpha = \cos \alpha$
 $AF = AC \cdot \cos^2 \alpha$

$AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC = 180 - 45 - \frac{\alpha}{2} = 135 - \frac{\alpha}{2}$

$AB=2$ $AC=2$
 $\tan 2\alpha = \frac{x}{AC-2}$
 $DP=135$
 $BP=25$
 $180 - 25 - 45 - \frac{\alpha}{2} = 110 - \frac{\alpha}{2}$

$\alpha - \beta = 180 - 160 + \alpha - 65 + \beta$
 $90 - 10 - \alpha = 2\beta$
 $2\beta = 180 - 160 - 65$
 $180 - 10 - \alpha = 160 - \alpha - 2\beta = -45$
 $\beta = 22,5$

$x + 25 + 65 + 90 = 360 - 65 - 65 = -2 - x$

$2y = 2(3+z)$
 $y^2 = 2(3+x)$
 $zx = y(3+y)$

$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} =$
 $= \frac{2x^2 + 2y^2 + 2z^2}{2} = \frac{32x^2}{2} = 16x^2$

3



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = (x - a_5)(x - a_6) =$$

$$= x^2 - a_5x - a_6x \quad (a_5 + a_6)(a_5 + a_6) = a_5^2 + 5a_5a_6 + 4a_6^2 + 20a_6$$

$$a_5 + a_6 = a^2 - a$$

$$a_5 + a_6 = a^3 - a^2$$

$$a_5 \cdot a_6 = a - 5$$

$$a_5 \cdot a_6 = 2a^4 - 2a^2 - a^6 - 4$$

$$a_5 + 9d = a^2 - a$$

$$a_5 + 9d = a^3 - a^2$$

$$a^2 - a^3 = a^3 - a^2$$

$$a^2 + 9da_5 + 4d20d = a - 5$$

$$a^3 - 2a^2 + a = 0$$

$$a(a^2 - 2a + 1) = 0$$

$$a_5 - a_6 =$$

$$a_5 + 9d = 0$$

$$a = 0 \quad a^2 - 2a + 1 = 0$$

$$a^2 + 9da_5 + 20d = a - 5$$

$$a_5 = -9d$$

$$9 = 4 - 4 = 0$$

$$a_5 + 9da_5 + 24d = 2a^4 - 2a^2 - a^6 - 4$$

$$9d = -a_5$$

$$a = \frac{2 - 0}{2} = 1$$

$$d = -\frac{a_5}{9} = \frac{20a_5}{9}$$

$$-9d = a - 5 - 2a^4 + 2a^2 + a^6 + 4$$

$$-9d = a^6 - 2a^4 + 2a^2 + a - 1$$

$$a^2 + -a_5 \cdot a_5 + \frac{20a_5^2}{9}$$

$$a^3 - a - 4(2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4)$$

$$1 - 1 - 4(2 + 2 - 1 - 4) =$$

$$= -4(-1) = 4$$

$$f = -\frac{5}{16} - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{16}$$

$$\frac{\frac{5}{4} - \frac{3}{4}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot 2}{4} = 1$$

$$1 - 1 - 4(1 - 5) = 16$$

$$0 - 4(0 - 5) = 20$$

$$\frac{\frac{5}{4} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{16} = 4$$

$$2 \cdot 2^9 + 2^5 - 2^{12} - 2^2 =$$

$$= 2^2(2^7 + 2^5 - 2^{10} - 1)$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

