



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

0) $xy = -6z + z^2$ (1) $zx = -6y + y^2$ (4)

$yz = -6x + x^2$ (2)

(1) - (2): $y(x-z) = 6(x-z) - (x+z)(x-z)$

$(x-z)(y-6+x+z) = 0$ (5)

i) Предположим, что $y-6+x+z = 0$. ($x+y+z = 6$)

$x = 6 - y - z$

(2) $yz = x(x-6) = (6-y-z)(y-z)$

$yz = (y+z-6)(y+z)$

$yz = (y+z)^2 - 6(y+z) = y^2 + 2yz + z^2 - 6y - 6z$

$yz = y^2 + 2yz + z^2 - 6y - 6z$

$\leftarrow (-6x - x^2)(2)$

$y^2 + z^2 + x^2 - 6x - 6y - 6z = 0$

$y^2 + z^2 + x^2 - 6(x+y+z) = 0$ (3)

$(x+y+z-6)(x+y+z) = 0 \Rightarrow (x+y+z)^2 - 6(x+y+z) = 0 \Rightarrow$

$0 = \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) - 6(x+y+z) = 0$

из (3) $\Rightarrow 2(xy + yz + zx) = 0 \Rightarrow (xy + yz + zx) = 0$

$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = (-y-z)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 =$

$= y^2 + 2yz + z^2 + y^2 - 12y + 36 + z^2 - 12z + 36 =$

$= 2yz + 2yx + 2zx + 36 + 36 = 0 + 72 = 72$

ii) Предположим, что $x-z = 0$. ($x = z$)

Проделаем то же, что и в пункте 0), но не с (1) и (2), а

с (1) и (4) ~~тоже~~ получим аналогичное (5) равенство

$(y-z)(y-6+x+z) = 0$ т.к. случай, когда $x+y+z = 6$

мы уже рассмотрели, то пусть $y+z+x \neq 6 \Rightarrow y = z$.

Получается $x = z = y$:

$x^2 = -6x + x^2$

(4): $x^2 = y(y-6)$ $\left. \begin{array}{l} (y+z)x = y(y-6) \\ (2): x^2 = yx + 6x \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{y(y-6)}{y+6}$

(1): $x^2 = -6x + x^2$

~~$x^2 = -6x + x^2$~~

$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = 2(x-6)^2 + (y-6)^2 = 2\left(\frac{y(y-6)}{y+6} - 6\right)^2 + (y-6)^2$

~~$+ (y-6)^2$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Не теряя общности, скажем, что не $x=2$, а $y=2$.

$$y^2 = -6x + x^2$$

$$yx = -6y + y^2$$

$$x = \frac{-6y + y^2}{y}$$

$$y^2 = -6\left(\frac{-6y + y^2}{y}\right) + \frac{(-6y + y^2)^2}{y^2} \quad | \cdot y^2$$

$$y^4 = 36y^2 - 6y^3 + 36y^2 - 12y^3 + y^4$$

$$0 = 2 \cdot 36y^2 - 18y^3$$

$$0 = 18y^2(4 - y) \quad y \neq 0 \Rightarrow y = 4 = 2$$

$$(y-6)^2 + (2-6)^2 = 4 + 4 = 8$$

$$y^2 = 16 = -6x + x^2$$

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$x_1 = 8$$

$$x_2 = -2$$

Не трудно подставить в систему и проверить, что оба корня подходят.

$$x_1 = 8$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (2-6)^2 = 64 + 8 = 72$$

$$x_2 = -2$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (2-6)^2 = 64 + 8 = 72$$

Ответ: 72.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Заметим, что число состоящее из 20002 девяток это $10^{20002} - 1$.
Тогда $n^3 = (10^{20002} - 1)^3 = 10^{60006} - 3 \cdot 10^{40004} + 3 \cdot 10^{20002} - 1$.

$$2) 10^{60006} = 1 \underbrace{000 \dots 000}_{2002} \underbrace{000 \dots 000}_{2002} \underbrace{000 \dots 000}_{2002} = 10^{20002} \cdot 10^{40004}$$

$$3 \cdot 10^{40004} = 3 \underbrace{000 \dots 000}_{2002} \underbrace{000 \dots 000}_{2002} = 3 \cdot 10^{40004}$$

$$10^{60006} - 3 \cdot 10^{40004} = (10^{20002} - 3) 10^{40004} = (10^{20002} - 1 - 2) \cdot 10^{40004}$$

$$3) 10^{6006} - 3 \cdot 10^{40004} = \underbrace{999 \dots 999}_{2000} 7 \underbrace{000 \dots 000}_{2002} \underbrace{00 \dots 00}_{2002}$$

Это n-число состоящее из 20002 девяток. Тогда $10^{20002} - 3$ это число состоящее из 2000 девяток и в конце 7 ($\underbrace{99 \dots 99}_{2000} 7$)

$$3 \cdot 10^{20002} - 1 = 2 \underbrace{999 \dots 999}_{20001}$$

$$10^{6006} - 3 \cdot 10^{40004} + 3 \cdot 10^{20002} - 1 =$$

$$= \underbrace{999 \dots 999}_{20000} 7 \underbrace{000 \dots 000}_{20002} \underbrace{000 \dots 000}_{2002} + 2 \underbrace{999 \dots 999}_{20001}$$

$$= \underbrace{999 \dots 99}_{20000} 7 \underbrace{00 \dots 00}_{20002} 2 \underbrace{99 \dots 99}_{20001}$$

Всего 99 девяток в числе n^3 $20000 + 20001 = 40001$

Ответ: 40001.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

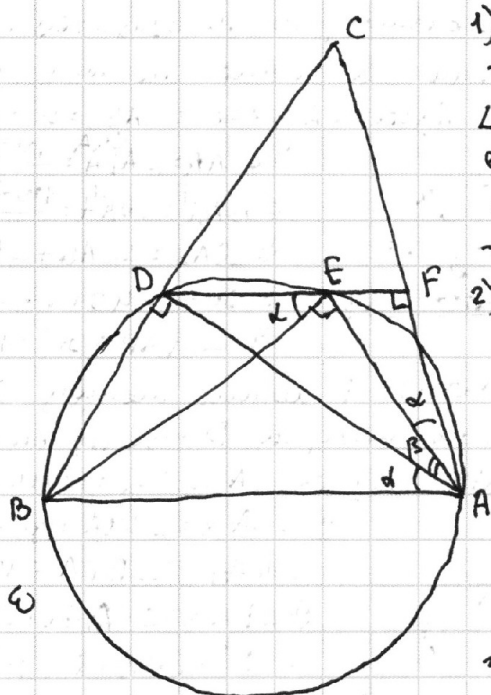


СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



AC=20
AB=10
BE=9
DF ⊥ AC
AF=?



1) Т.к. AB - диаметр ω (по усл.) и точки A, B, D, F $\in \omega$, то $\angle BDA = \angle BEA = 90^\circ$ (как опирающиеся на диаметр). Так же по усл. $\angle DFA = 90^\circ \Rightarrow \triangle AFD, \triangle ADC, \triangle AEB$ - прямоугольные.

2) Пусть угол $DAB = \alpha$, а $DAE = \beta$. Из вписанности ABDE $\angle DEB = \angle DAB = \alpha$ (как опирающиеся на одну дугу) $\Rightarrow$ ~~из суммы углов треугольника~~

Т.к. $\angle DEB + \angle BEA + \angle FEA = 180^\circ \Rightarrow \angle FEA = 90^\circ - \alpha \Rightarrow$ из суммы углов треугольника $\angle FAE = \alpha$

3) $\triangle AEB \sim \triangle AFD$ (по двум углам)
 $\triangle AFD \sim \triangle ADC$ (по двум углам)

$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AF}{AD}$ и $\frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow AD^2 = AF \cdot AC$
 $AD = \frac{AF \cdot AB}{AE}$ } $\Rightarrow$

$$\Rightarrow AD^2 = \frac{AF^2 \cdot AB^2}{AE^2} = AF \cdot AC$$

$$AF \cdot AB^2 = AC \cdot AE^2$$

$$AF = \frac{AC \cdot AE^2}{AB^2}$$

По Тх. Пифагора: $AE^2 = AB^2 - BE^2$

$$AF = \frac{AC \cdot (AB^2 - BE^2)}{AB^2} = \frac{20 \cdot (100 - 81)}{100} = \frac{20 \cdot 19}{100} = 3,8$$

Ответ: 3,8



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Пусть всего было n коробок (из условия ясно, что $n \geq 9$).

В первом случае (т.е. когда игрок должен указать на 5 коробок) всего существует C_n^5 вариантов указать на 5 коробок (т.к. это кол-во способов выбрать множество из 5 коробок). Из них выигрышными являются те, в которых игрок выбрал три коробки с шариками, а остальные 2 пустые. Получается кол-во "счастливых" множеств по 5 коробок равно C_{n-3}^2 . Тогда вероятность выигрыша будет: $P_1 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$

2) Во втором случае (т.е. когда игрок должен указать на 9 коробок) всё аналогично. Всего существует C_n^9 вариантов указать на 9 коробок. Из них выигрышных C_{n-3}^6 . Тогда $P_2 = \frac{C_{n-3}^6}{C_n^9}$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{C_{n-3}^6 \cdot C_n^5}{C_n^9 \cdot C_{n-3}^2}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k(k-1) \dots 2 \cdot 1}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{(n-3)(n-4)}{2 \cdot 1}} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\left(\frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \right) \cdot \left(\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \right)}{\left(\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \right) \cdot \left(\frac{(n-3)(n-4)}{2 \cdot 1} \right)} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3}$$

Это не зафиксировано, а сокращение.

Ничего не написано без сокращения.

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{6 \cdot 7}{5} = 8,4$$

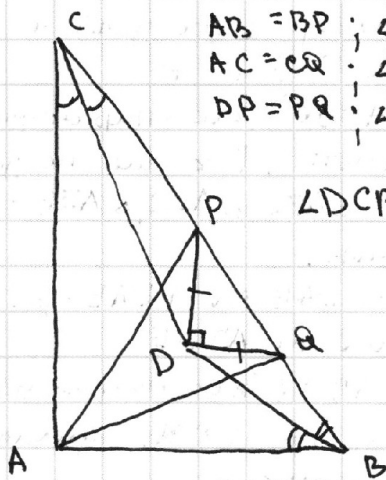
Ответ: 8,4



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} AB &= BP; \angle CAB = 90^\circ \\ AC &= CQ; \angle PBQ = 90^\circ \\ DP &= PQ; \angle CBA = 46^\circ \end{aligned}$$

$\angle DCB = ?$

- 3) Из того, что D - центр описанной $\triangle APQ$ следует, что D лежит на серединном перпендикуляре PA и AQ. Т.к. $\triangle ACQ$ - равнобедренный ($AC = CQ$) $\Rightarrow$ серединный перпендикуляр к AQ - биссектриса $\angle ACQ$. Аналогично серединный перпендикуляр AP - биссектриса $\angle PBA \Rightarrow$ D - точка пересечения биссектрис углов $\angle ABC$ и $\angle ACB \Rightarrow$ D - центр вписанной $\triangle ACB$.

$$\begin{aligned} 4) \Rightarrow \angle DCB &= \angle DCA = \frac{1}{2} \angle ACB = \\ &= \frac{1}{2} (90^\circ - \angle ABC) = \frac{1}{2} (90^\circ - 46^\circ) = 22^\circ \end{aligned}$$

Ответ: 22° .

- 1) Покажем, что не существует случая, когда Q лежит между C и P.

Пусть $\angle ACB = 2\alpha \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ - 2\alpha$
 $\Rightarrow \angle CAQ = \angle CPA = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$
 $\angle BAP = \angle BQA = \frac{180^\circ - 90^\circ + 2\alpha}{2} = 45^\circ + \alpha$
 $\Rightarrow \angle CAB = \angle CAQ + \angle QAP + \angle PAB =$
 $= 90^\circ - \alpha + 45^\circ + \alpha + \angle QAP = 90^\circ$
 $\Rightarrow \angle QAP = 90^\circ - 135^\circ = -45^\circ$

Значит P лежит между C и Q.

- 2) Покажем, что D - центр описанной $\triangle APQ$. Пусть $\angle ACB = 2\alpha \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ - 2\alpha$

$\Rightarrow \angle CAQ = \angle CQA = 90^\circ - \alpha$
 $\angle BAP = \angle BPA = 45^\circ + \alpha$
 $\Rightarrow \angle PAQ = \angle CAQ + \angle BAP - \angle BAC =$
 $= 90^\circ - \alpha + 45^\circ + \alpha - 90^\circ = 45^\circ$

Точка D по условию равноудалена от P и Q $\Rightarrow$ лежит на серединном перпендикуляре к PQ. $\angle PDQ = 90^\circ$ по условию, что втрое больше $\angle PAQ \Rightarrow \angle PDQ$ - центральный, опирающийся на дугу PQ в описанной $\triangle APQ \Rightarrow$ D - центр описанной $\triangle APQ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$C_n^5 \cdot C_n^9$$

$$C_n^2 \cdot C_n^8$$

$$\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{2 \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$$

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{(n-2)(n-3)(n-4)} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{(n-6)(n-7)(n-8)}$$

$$\frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{(n-6)(n-7)(n-8) \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}$$

$$\frac{6 \cdot 7}{5} \cdot \frac{(n-2)(n-2-1)}{(n-2)^2} = 1$$

$$n^2 - 2n - 3n + 6$$

$$(n^2 - 5n + 6)(n-4)$$

$$n^3 - 5n^2 + 6n + 20n^2 - 24$$

$$n^3 + 15n^2 + 6n - 24$$

$$\frac{C_{(n-3)}^2}{C_n^5} = \frac{(n-3)(n-4) \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$$

$$\frac{C_{(n-3)}^6}{C_n^9} = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8) \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}$$

$$\frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7}{n(n-1)(n-2)} \cdot \frac{4(n-1)(n-2)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

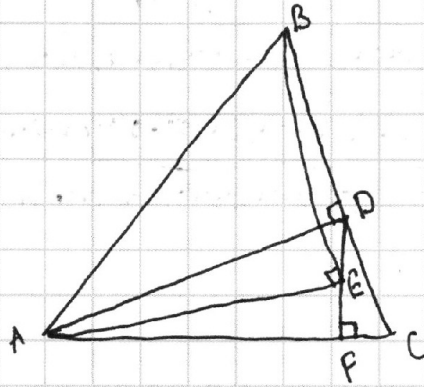


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$42/5 \quad \cdot 2 \cdot 24$$
$$\triangle AFD, \triangle ADC, \triangle AEB$$

$$AD = \frac{AF \cdot AB}{AE} \quad \triangle AEB \sim \triangle AFD$$

$$\frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AB}$$

$$AF \cdot FC = DF^2$$

$$\triangle AFE \sim \triangle ADB$$

$$\frac{AF}{AE} = \frac{AD}{AB}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AF}{AD}$$

$$AD^2 = AC \cdot AF$$

$$AF^2 \cdot AB^2$$

$$\frac{AF^2 \cdot AB^2}{AE^2} = AC \cdot AF \cdot \frac{20}{19}$$

$$AD = \frac{AF \cdot AB}{AE}$$

$$AC + AB > CB$$

$$AC^2 + AB^2 = CB^2 \quad AF = \frac{AC \cdot AE^2}{AB}$$

$$AC + AB \geq \frac{AC^2 + AB^2}{AC + AB}$$

$$AC^2 + AB^2 + 2AC \cdot AB = CB^2 + 2AC \cdot AB$$

$$(AC + AB)^2 = CB^2 + 2AC \cdot AB$$

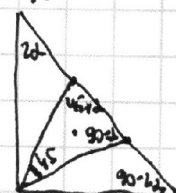
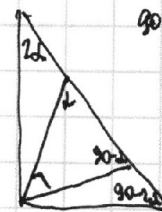
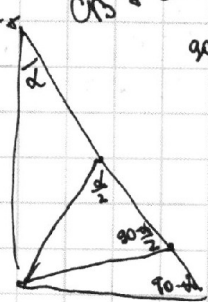
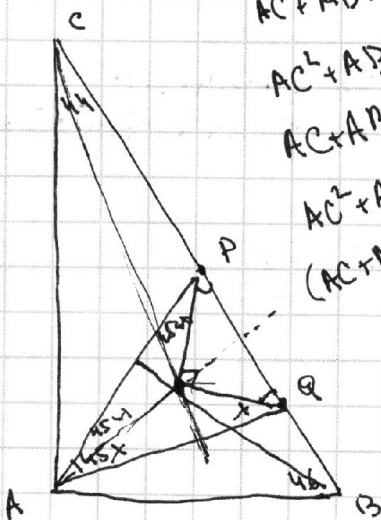
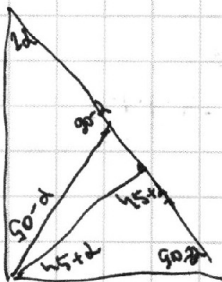
$$CB^2 + 2AC \cdot AB$$

$$90 - \frac{d}{2}$$

$$180 - 2d = \frac{19}{2} \cdot 388$$

$$90 - \frac{d}{2} = 2$$

$$90 - \frac{d}{2} = 2$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = 99999 \dots 999$$

20

$$\overbrace{\phantom{x \cdot 10^x + 9 \cdot 10^{x-1} + y}}^y 9 \overbrace{\phantom{x \cdot 10^x + 9 \cdot 10^{x-1} + y}}^x$$

$$x \cdot 10^x + 9 \cdot 10^{x-1} + y = n^3$$
$$10^{x-1}(10x + 9) + y = n^3$$

$$\begin{matrix} n=0 & n=1 & n=2 & n=3 & n=4 \\ n^3=0 & n^3=1 & n^3=8 & n^3=27 & n^3=64 \end{matrix}$$

$$(x \cdot 10^x + y)^3$$
$$x^3 \cdot 10^{3x} +$$

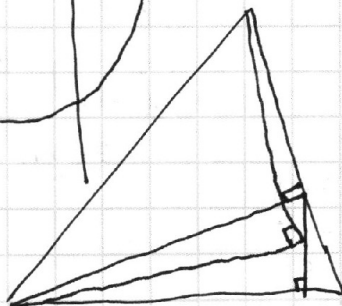
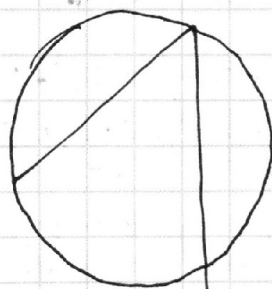
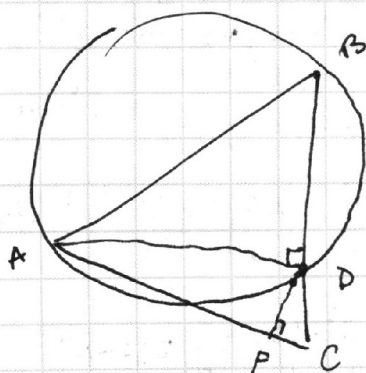
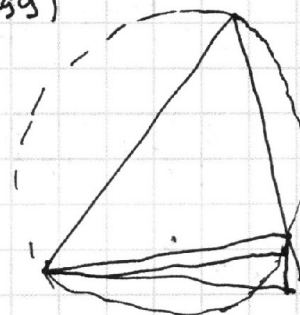
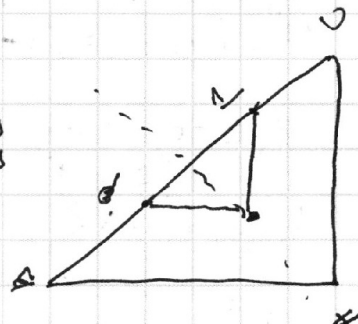
$$\begin{array}{r} 999 \\ \times 999 \\ \hline 999 \\ 9990 \\ 99900 \\ \hline 998001 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 999 \\ + 999 \\ \hline 1998 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 99 \\ + 99 \\ \hline 198 \end{array}$$

$$(9 \cdot 10^n + 9999)^3$$

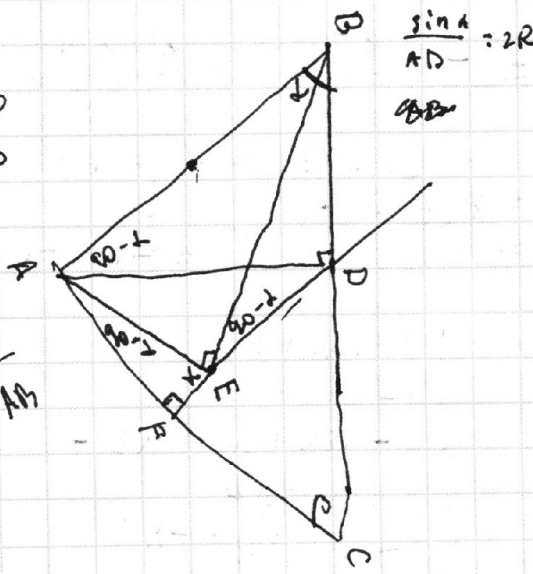
$$\begin{array}{r} 99 \\ \times 99 \\ \hline 891 \\ 8910 \\ \hline 9801 \end{array}$$



$$\begin{matrix} 100 - 81 \\ 19 \end{matrix}$$
$$AC = 20$$
$$AB = 20$$
$$BE = 9$$
$$AE = \sqrt{19}$$

$$\frac{\sin \alpha}{AC} = \frac{\sin \beta}{AB}$$
$$\frac{AD}{AB \cdot AC} = \frac{AD}{AB \cdot AC}$$

$$\frac{AP}{AE} = \frac{AD}{AB}$$



$$\frac{\sin \alpha}{AD} = 2R$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$xy + yz + zx + 6(x + y + z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$12(x + y + z) = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$$

$$z(z - 6) = xy \quad (z - 6)^2 + \dots = \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{xz}{y}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 =$$

$$x(x - 6) = zy$$

$$y(y - 6) = xz$$

$$x = \frac{-6z + z^2}{y}$$

$$x = \frac{-6y + y^2}{z}$$

$$\frac{z - 6}{y - 6} = \frac{xyy}{zxz}$$

$$\frac{z(z - 6)}{y} = \frac{y(y - 6)}{z}$$

$$z^2(z - 6) = y^2(y - 6) = x^2(x - 6)$$

$$\frac{y^2}{z^2} = \frac{(z - 6)}{(y - 6)}$$

$$(z - y)(z^2 + x^2 + y^2 - 6x - 6y - 6z) = 0$$

$$z(z - 6) + x(x - 6) + y(y - 6) = 0$$

$$z^3 - y^3 = 6z^2 - 6y^2$$

$$2z^2 - 12z$$

$$(z - y)(z^2 + zy + y^2) = 6(z - y)(z + y)$$

$$(z - y)(z^2 + zy + y^2 - 6z - 6y) = 0$$

$$(z - y)(z^2 + zy + y^2 + xy + zx - y^2 - z^2) = 0$$

$$(z - y)(zy + xy + zx) = 0$$

$$z(y + x) + y(z + x) + x(z + y) = 0 \quad z^2 - 12z = 12z$$

$$z(z - 6) = xy$$

$$(z - 6)^2 = \left(\frac{xy}{z}\right)^2$$

$$x = \frac{z(z - 6)}{y}$$

$$yz = -\frac{6(z - 6)z}{y} + \frac{z^2(z - 6)^2}{y^2}$$

$$y^3z = -6(z - 6)zy + z^2(z - 6)^2$$

$$y^3 = z(z - 6)^2 - 6y(z - 6)$$

$$y^3 = (z^2 - 6z - 6y)(z - 6)$$

$$x^2 - 12x + 36$$

$$x^2 - 6x = yz$$

$$x^2 - 12x + 36 = yz - 6x + 36$$

$$2x^2 - 12x = yz$$

$$x^2 - 12x = yz - x^2$$

$$\left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{xz}{y}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 \geq \sqrt{3xyz}$$

$$\begin{cases} x^2 - 12x = 2yz - x^2 \\ y^2 - 12y = 2yx - y^2 \\ z^2 - 12z = 2zy - z^2 \end{cases}$$

$$z \neq 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 100000 \\ - 20001 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30000000000 \\ - 1000000000 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20001 \\ - 1000000000 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9999970000000 \\ - 2000 + 300000 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9999700000/3 \\ \hline 2000 \quad 2000 \quad 20003 \\ - 30000 \\ \hline 1 \\ 29999 \end{array}$$

$$\left| y - 6 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \right| \leq 4$$

$$\begin{cases} y - 6 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0 \\ y - 6 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} xy &= \\ (x-6)^2 + (y-6)^2 \end{aligned}$$

$$x^2 - 12x + 36$$

$$y^2 - 6x + 36$$

$$xy - 6z + 36$$

$$yx - 6y + 36$$

$$yz = y^2 + 2yz + z^2 - 6y - 6z$$

$$y^2 + yz + z^2 - 6y - 6z$$

$$y^2 + z^2 + x^2 - 6(x+y+z) = 0$$

$$y(x-z) = 6(x-z) + (x+z)(x-z)$$

$$(x-z)(y-6+x+z) = 0$$

$$x-z = 0$$

$$x+y+z = 6$$

$$x = 6 - y - z$$

$$yz = -36 + 6y + 6z + (6-y-z)^2$$

$$yz = (6-y-z)(-y-z)$$

$$yz = (y+z-6)(y+z)$$

$$y^2 + z^2 + x^2 + 2 \dots = 0$$

$$y+z=$$

$$x+y+z=0$$

$$y^2 = 12y + 36$$

$$z^2 = 12z + 36$$

$$x^2 + y^2 + 2xy$$

$$zx - 6y + 36$$

$$xy - 6z + 36$$

$$z^2 + y^2 + 2zy$$

$$zx + zx + 36$$

$$xy + xy + 36$$