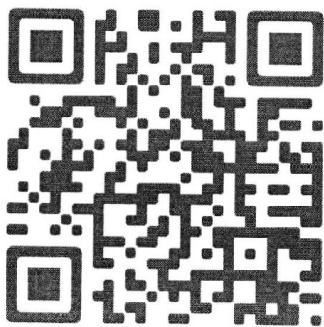




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбрали точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

✓1

$$\begin{cases} xy = z(z-2) \textcircled{1} \Rightarrow z = \frac{xy}{z-2} \\ yz = x(x-2) \textcircled{2} \\ zx = y(y-2) \textcircled{3} \Rightarrow y = \frac{zx}{y-2} \end{cases} \Rightarrow yz = x(x-2) = \frac{xy \cdot zx}{(z-2)(y-2)} \Rightarrow x^2 yz = x(x-2)(y-2)(z-2) \quad | : x \text{ т.к. } x \neq 0$$
$$xyz = (x-2)(y-2)(z-2)$$

$$(x-2)(y-2)(z-2) = (xy - 2x - 2y + 4)(z-2) = xyz - 2xy - 2xz + 4x - 2yz + 4y + 4z - 8 = xyz$$
$$xy + zx + zy - 2x - 2y - 2z = -4 \quad \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} : xy + yz + zx = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 2x + 2y + 2z - 4$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = -4$$
$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = -4 + 12 = 8$$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ $99^3 = 9801 \cdot 99 = 970299$

$999^3 = 998001 \cdot 999 = 997002999$ и т.д.

* $9 \cdot 9 = (10-1)(10-1) = 10^2 - 20 + 1$ тогда

$\underbrace{99 \dots 9}_n^2 = (10^n - 1)^2 = 10^{2n} - 20^n + 1$

тогда $\underbrace{999 \dots 9}_{30.001}^2 = (10^{30001} - 1)^2 = 10^{60002} - 20^{30001} + 1 = \underbrace{9 \dots 9}_{n-1} \underbrace{80 \dots 01}_{n-1}$

$\underbrace{9 \dots 9}_{n-1} \underbrace{80 \dots 01}_{n-1} \cdot \underbrace{9 \dots 9}_n = \underbrace{99 \dots 9}_{n-1} \underbrace{70 \dots 02}_{n-1} \underbrace{9 \dots 9}_n \Rightarrow \text{кон-609} = 2n-1$

Ответ: 60.001

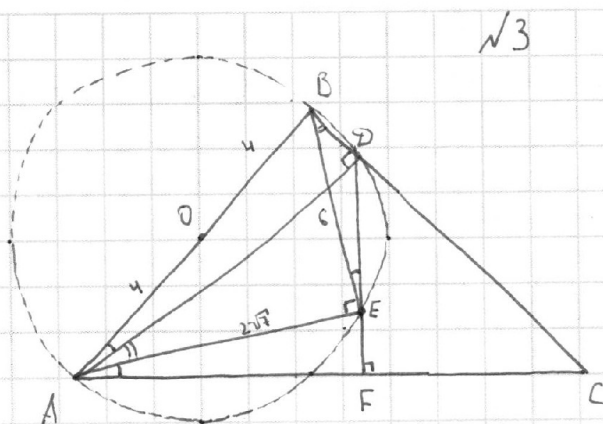


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) $\angle BEA = 90^\circ$ т.к. опирается на диаметр

2) по т. Пифагора для $\triangle ABE$

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

3) $\angle BED = \angle EAF$ т.к.

$$\left. \begin{aligned} \angle EAF + \angle AEF &= 90^\circ \\ \angle BED + \angle AEF &= 180^\circ - 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{равны}$$

4) $\angle BED = \angle BAD$ т.к. опираются на одну дугу

$$5) \triangle ABD \sim \triangle AEF \text{ (по 2 углам)} \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AF} \Rightarrow AF = \frac{AE \cdot AD}{AB}$$

6) $\angle EBD = \angle EAD$ т.к. опираются на одну дугу

$$7) \triangle ADC \sim \triangle AFD \text{ (по 2 углам)} \Rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AD}$$

$$\text{из } (5) \text{ и } (7) \Rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow AD = \frac{AC \cdot AE}{AB}$$

$$AF = \frac{AE^2 \cdot AC}{AB^2} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{8 \cdot 8} = \frac{35}{8}$$

Ответ: $AF = \frac{35}{8}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Вероятность выигрыша игрока в первом случае: отношение кол-ва способов выбрать две коробки без шарика из оставшихся коробок после выбора 3 коробок с шариками к кол-ву способов выбрать 5 коробок из данных.

$$P_1 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}, \text{ где } n - \text{кол-во коробок изначально}$$

Аналогично для ~~раз~~ выбора 7-ми коробок:

$$P_2 = \frac{C_{n-3}^4}{C_n^7}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{C_{n-3}^4 \cdot C_n^5}{C_n^7 \cdot C_{n-3}^2} = \frac{\frac{(n-3)!}{(n-7)! \cdot 4!} \cdot \frac{n!}{(n-5)! \cdot 5!}}{\frac{n!}{(n-7)! \cdot 7!} \cdot \frac{(n-3)!}{(n-5)! \cdot 2!}} = \frac{7! \cdot 2!}{4! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7}{3 \cdot 4} = \frac{7}{2} = 3,5$$

Ответ: в 3,5 раза.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть корни ур-и $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ равны x_6 и x_7 ($x_6 \neq x_7$ т.к. по усл. арифм. пр. непостоянна $\Rightarrow D \neq 0$)

Тогда $D = (a^2 - 2a)^2 - 4(a^2 - a - 7) > 0$
 $a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 4a^2 + 4a + 28 > 0$
 $a^4 - 4a^3 + 4a + 28 > 0$ ①

По т. Виета: $x_6 + x_7 = a^2 - 2a$

Аналогично для ур-и $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ корни x_4 и x_9

Тогда $D = (a^3 - 2a^2)^2 - 12(6 - a^5) > 0$
 $a^6 - 4a^5 + 4a^4 + 12a^5 - 72 > 0$
 $a^6 + 8a^5 + 4a^4 - 72 > 0$ ②

По теореме Виета: $x_4 + x_9 = \frac{a^3 - 2a^2}{3}$

По определению арифметической прогрессии:

$$x_4 + 2d = x_6 \quad x_7 + 2d = x_9 \Rightarrow x_6 - x_4 = x_9 - x_7 \Rightarrow x_6 + x_7 = x_4 + x_9$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a = \frac{a^3 - 2a^2}{3} \Rightarrow 3a^2 - 6a = a^3 - 2a^2$$

$$a^3 - 5a^2 + 6a = 0$$

$$a(a-2)(a-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=2 \\ a=3 \end{cases}$$

Подставим $a=0$ в ②: $0+0+0-72 > 0$ - неверно $\Rightarrow$ не подх

$a=2$ в ①: $16-4 \cdot 8+8+28 > 0$ - верно

$a=2$ в ②: $64+8 \cdot 32+4 \cdot 16-72 > 0$ - верно } $\Rightarrow$ подходит

$a=3$ в ①: $81-4 \cdot 27+4 \cdot 3+28 > 0$ - верно

$a=3$ в ②: $81 \cdot 9+8 \cdot 81 \cdot 3+4 \cdot 81-72 > 0$ - верно } $\Rightarrow$ подходит

Ответ: $a=2$ и $a=3$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

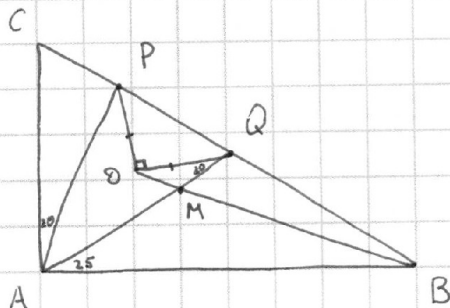
5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



№7

$$1) \angle BCA = 50^\circ \Rightarrow \angle ABC = 40^\circ$$

$$2) \triangle ACQ - \text{p/s} (AC=CQ) \Rightarrow \angle CAQ = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$$

$$3) \triangle PBA - \text{p/s} (PB=AB) \Rightarrow \angle BAP = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$$

$$4) \angle CAB = 90^\circ = \angle CAP + \angle PAQ + \angle QAB$$

$$65^\circ = \angle CAP + \angle PAQ$$

$$70^\circ = \angle PAQ + \angle QAB$$

$$\Rightarrow \angle PAQ = 65^\circ + 70^\circ - 90^\circ = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \angle CAP = 20^\circ, \angle QAB = 25^\circ$$

$$5) \angle DPQ = \angle QRP = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DQB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ \text{ (т.к. смежные)}$$

6)

$$\angle AQB = 180^\circ - \angle QAB - \angle CBA = 180^\circ - 25^\circ - 40^\circ = 115^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DQA = \angle DQB - \angle AQB = 135^\circ - 115^\circ = 20^\circ$$

$$7) \angle DMQ = \angle AMB \text{ (т.к. вертикаль)} \Rightarrow \angle MBA + \angle MAB = \angle MQD + \angle MDQ$$

$$\Rightarrow \angle MBA = \angle MDQ + 20^\circ - 25^\circ = \angle MDQ - 5^\circ$$

$$\Rightarrow \angle MBA + 25^\circ = \angle MBA$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

2

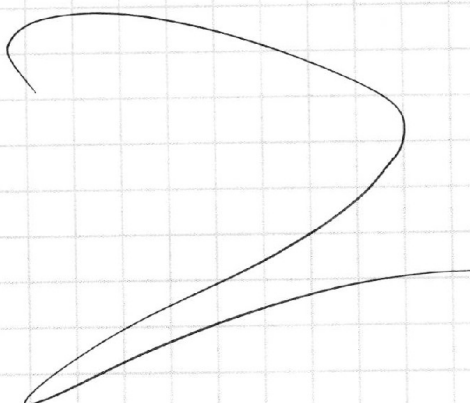


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, featuring geometric diagrams, algebraic equations, and numerical calculations.

Geometric Diagrams:

- Top left: A triangle with vertices A, B, C and an internal point D. Side lengths are labeled: AB = 1, BC = 2, AC = 2. Angles are labeled: $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 30^\circ$. A line segment AD is drawn, and a point E is marked on BC such that AE is perpendicular to BC.
- Bottom left: A triangle with vertices A, B, C. Side lengths are labeled: AB = 1, BC = 2, AC = 2. Angles are labeled: $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 30^\circ$. A line segment AD is drawn, and a point E is marked on BC such that AE is perpendicular to BC.

Algebraic Equations and Calculations:

- Top right: $AB \sim ADF \sim ACD$, $\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AF}$, $\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AF}$, $AF = \frac{AD \cdot AE}{AB}$, $AF = \frac{AE \cdot AD}{AB}$, $AD^2 = AC \cdot AF$, $AF = \frac{AD^2}{AC}$.
- Middle right: $AB = \frac{AE}{AF}$, $AC = \frac{AD}{AE}$, $AB \cdot AC = \frac{AE \cdot AD}{AF \cdot AE} = \frac{AD^2}{AF}$.
- Bottom right: $AB = \frac{AE}{AF}$, $AC = \frac{AD}{AE}$, $AB \cdot AC = \frac{AE \cdot AD}{AF \cdot AE} = \frac{AD^2}{AF}$.
- Left side: $AB = \frac{AE}{AF}$, $AC = \frac{AD}{AE}$, $AB \cdot AC = \frac{AE \cdot AD}{AF \cdot AE} = \frac{AD^2}{AF}$.
- Bottom left: $AB = \frac{AE}{AF}$, $AC = \frac{AD}{AE}$, $AB \cdot AC = \frac{AE \cdot AD}{AF \cdot AE} = \frac{AD^2}{AF}$.
- Bottom center: $AB = \frac{AE}{AF}$, $AC = \frac{AD}{AE}$, $AB \cdot AC = \frac{AE \cdot AD}{AF \cdot AE} = \frac{AD^2}{AF}$.
- Bottom right: $AB = \frac{AE}{AF}$, $AC = \frac{AD}{AE}$, $AB \cdot AC = \frac{AE \cdot AD}{AF \cdot AE} = \frac{AD^2}{AF}$.

Numerical Calculations:

- Top right: $998001 \div 99 = 998001$, $998001 \div 99 = 998001$, $998001 \div 99 = 998001$.
- Middle right: $99^3 = 970299$, $99^3 = 970299$, $99^3 = 970299$.
- Bottom right: $99^3 = 970299$, $99^3 = 970299$, $99^3 = 970299$.
- Bottom center: $99^3 = 970299$, $99^3 = 970299$, $99^3 = 970299$.
- Bottom left: $99^3 = 970299$, $99^3 = 970299$, $99^3 = 970299$.

Other Notes:

- Top left: $AB = 1$, $BC = 2$, $AC = 2$, $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 30^\circ$.
- Middle left: $AB = 1$, $BC = 2$, $AC = 2$, $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 30^\circ$.
- Bottom left: $AB = 1$, $BC = 2$, $AC = 2$, $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 30^\circ$.

[illegible]