



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа  $x, y, z$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения  $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$ , если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа  $n$  состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа  $n^3$ ?
3. [5 баллов] Окружность  $\omega$  с диаметром  $AB$  пересекает сторону  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  в точке  $D$ . Точка  $F$  выбрана на отрезке  $AC$  так, что  $DF \perp AC$ , а  $E$  — точка пересечения отрезка  $DF$  с окружностью  $\omega$ , отличная от  $D$ . Найдите  $AF$ , если  $AC = 20$ ,  $AB = 15$ ,  $BE = 10$ .
4. [4 балла] В телесигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых корни уравнения  $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$  являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения  $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$  являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура  $\Phi$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют неравенству  $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$ . Фигуру  $\Phi$  непрерывно повернули вокруг начала координат на угол  $\pi$  по часовой стрелке. Найдите площадь множества  $M$ , которое замела фигура  $\Phi$  при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $AB = BP$ ,  $AC = CQ$ . Внутри треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$ , для которой  $DP = DQ$ , а  $\angle PDQ = 90^\circ$ . Найдите  $\angle DCB$ , если известно, что  $\angle DBC = 35^\circ$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ yz = 4x + x^2 \\ zx = 4y + y^2 \end{cases}$$

Перемножим левые и правые части

$$x^2 y^2 z^2 = xyz(x+4)(y+4)(z+4) \quad \text{т.к. никакое } x, y, z \neq 0; \text{ то:}$$

$$(x+4)(y+4)(z+4) = xyz$$

$$(x^2 y + 4x + 4y + 16)(z+4) = xyz$$

$$xyz + 4xz + 4yz + 4xy + 16z + 16x + 16y + 64 = xyz$$

$$xz + yz + xy + 4z + 4x + 4y + 16 = 0$$

Заметим:  $(y+4)^2 = y^2 + 8y + 16 = y^2 + 4y + 4y + 16 = xz + 4y + 16$

Тогда  $(y+4)^2 + (x+4)^2 + (z+4)^2 = xy + yz + zx + 4x + 4y + 4z + 48 =$

$$= 0 + 32 = 32$$

Ответ: 32



Or let:  $\frac{100}{9}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим какой-нибудь выигрышный набор из 5 коробок.

Пусть это А. Также рассмотрим набор из 8 коробок, содержащий выигрышный вышеописанный набор из 5. Пусть это В

Всего набор В содержит  $C_8^5$  наборов из 5 коробок.

При этом выигрышных всего  $C_8^2$  (3 берём шаром

2 произвольно). Заметим:  $C_8^5 = 56 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!}$ ;  $C_8^2 = \frac{56}{2}$

Т.е. выигрышных и проигрышных наборов из 5 в наборе В поровну. Так можно сказать про любой

Т.к. есть набор из 8, объединяющий их { выигрышный набор из 8 коробок. Тогда будем считать, что проигрышный набор из 5 становится выигрышным, если  $\cap$  по 3 коробкам пересекается с каким-либо из наборов, содержащих 3 шара, из 5 коробок. Таких наборов (которые станут выигрышными) столько же, сколько наборов, содержащих 3 шара - по сути доказано в нагале. Тогда

будет брать ~~выигрышный набор~~ новые выигрышные наборы можно объединить в восьмёрки с теми выигрышными наборами (по усл.), которыми они пересекаются. Тогда кол-во выигрышных наборов при переходе от 5 к 8 возрастает в 2 раза.

Ответ: 2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Сумма корней у ур-я

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0 \quad \text{равна} \quad \frac{a^2 - a}{1} = a^2 - a$$

Сумма корней у ур-я:

$$2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0 \quad \text{равна} \quad \frac{a^3 - a^2}{2}$$

(По Г. Виета)

Т.к. это в первом случае члены арифметической прогрессии чис.

во втором 2 и 7; то:

$$\frac{a^3 - a^2}{2} = \frac{a^2 - a}{1}; \quad a=0 \text{ или } a=2$$

$a \neq 0$ , т.к.

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = x^2 + \frac{2}{3} = 0 \quad \text{— корней нет}$$

Всп  $a=2$ :

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = x^2 - 2x + \frac{-6}{3} = x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$D = 4 + 8 = 12; \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3} \quad \text{— шаг арифметической прогрессии (очевидно)}$$

$$2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 2x^2 - (4)x - 2 \cdot 64 - 8 \cdot 2 - 4 = 0$$

$$x^2 - 2x - 64 - 8 - 2 = 0 \quad x^2 - 2x - 74 = 0$$

$$D = 4 + 74 \cdot 4 = 4 + 16 + 280 = 300$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{300}}{2} = 1 \pm \sqrt{75} = 1 \pm 5\sqrt{3} \quad \text{— разность}$$

между 7 и 2 членами будет  $10\sqrt{3}$  при шаге  $2\sqrt{3}$

т.е. действительно получили арифметическую прогрессию при  $a=2$

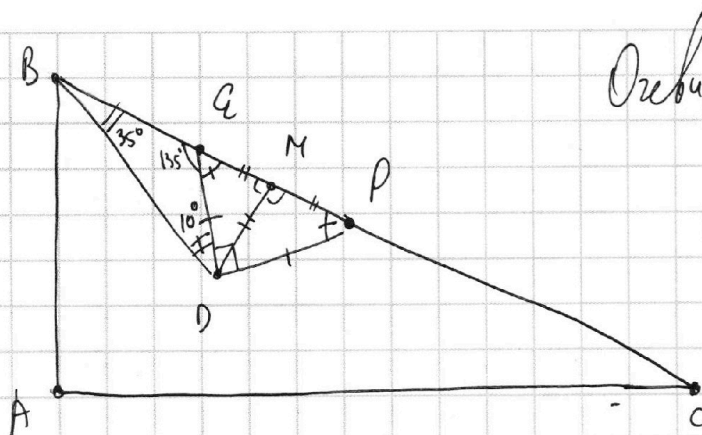
Ответ: 2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐2  
☐3  
☐4  
☐5  
☐6  
☐7  
☒СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Очевидно, что  $Q \in BP$ , т.к.  
 $AC + AB > BC$

Пусть  $M$  — середина  $PQ$

Очевидно, что  $DM \perp BC$

Т.к.  $\angle QDP = 90^\circ$  то очевидно,

что  $\angle DQP = 45^\circ \Rightarrow \angle BQD = 35^\circ \Rightarrow \angle BDQ = 10^\circ$

Заметим:  $QP = AB + AC - BC$ ;  $QM = \frac{AB + AC - BC}{2}$

$DM = QM = MP$  как медиана прями.  $\Delta$ .

Тогда заметим, что:  $BD^2 = BQ \cdot BC$ :

$$BQ = BC - AC \Rightarrow BQ \cdot BC = BC(BC - AC) = BC^2 - AC \cdot BC$$

$$BD^2 = BM^2 + MD^2 \quad (\angle BMD = 90^\circ, \text{ т.к. } DM \perp BC)$$

$$BM^2 = (BQ + QM)^2 = \left(BC - AC + \frac{AB + AC - BC}{2}\right)^2 = \left(\frac{AB + BC - AC}{2}\right)^2$$

$$DM^2 = QM^2 = \left(\frac{AB + AC - BC}{2}\right)^2$$

$$BM^2 + DM^2 = \frac{AB^2 + BC^2 + AC^2 + 2AB \cdot BC - 2AB \cdot AC - 2BC \cdot AC}{4} +$$

$$+ \frac{AB^2 + AC^2 + BC^2 + 2AB \cdot AC - 2AB \cdot BC - 2AC \cdot BC}{4} =$$

$$= \left(\frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} + \frac{BC^2}{2}\right) - AC \cdot BC = BC^2 - AC \cdot BC$$

Тогда окр.  $CDQ$  касается прямой  $BD$  в т.  $D$  и  
 $\angle BCD = \angle BDQ = 10^\circ$  (угол между касат. и хордой)

Отв: 10

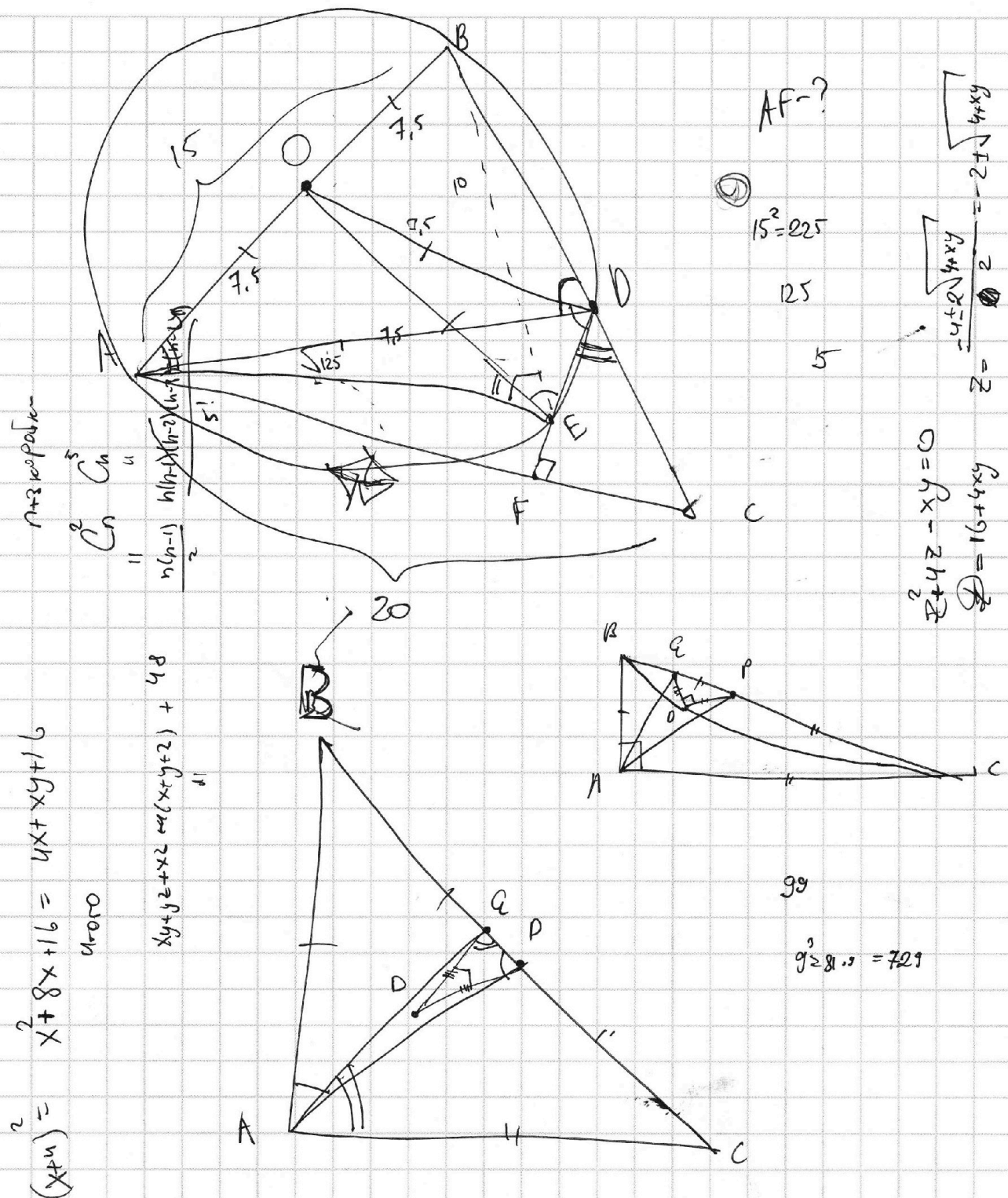


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





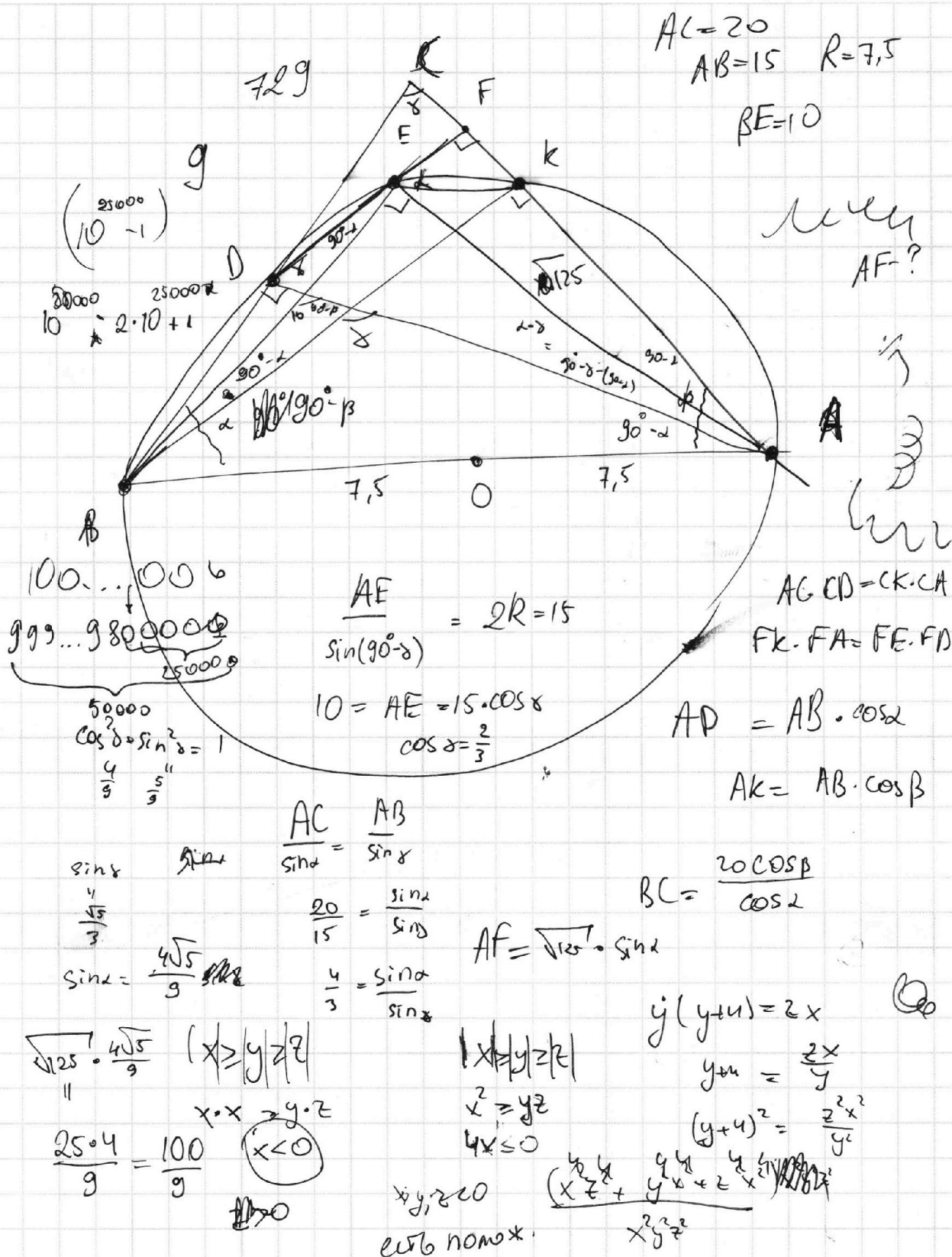


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА     ИЗ    

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2 - a^3}{3} = 0 \quad x_1 x_2 = (a^2 - a)$$

$$2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^3 - 8a - 4 = 0 \quad x_1 + x_2 = \frac{a^3 - a^2}{2}$$

$$D = (a^2 - a)^2 + 4 \left( \frac{a^3 - 2}{3} \right) = a^4 - 2a^3 + a^2 + \frac{4}{3}a^3 - \frac{8}{3} =$$

$$= a^4 - \frac{2}{3}a^3 + a^2 - \frac{8}{3}$$

$$74 \cdot 4$$

$$296$$

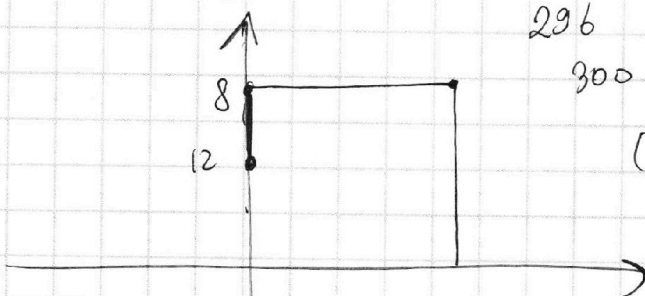
$$300 = 100 \cdot 3$$

$$(50)^2$$

$$\frac{a}{2}(a^2 - a) = a^2 - a$$

$$\frac{a^3 - a^2}{2} = \frac{a^2 - a}{2} \quad ; a = 0$$

$$\text{или } a = 2$$



$$\left| y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \right| + \left| y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \right| \leq 6$$

$$|y - 15| + |y - 15| \leq 6$$

$$\left| x - 15 + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - 15 - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 6$$

$$x = 0$$

$$|y - 15| \leq 3$$

$$4204 = 168$$

$$y \in [12; 18]$$

$$64 \cdot 64 - 8 - 2 = 0 \quad |y - 15 + x| \leq 6$$

$$y = 0$$

$$\frac{x}{2}$$

$$248 \mid 16 \quad 32 \quad 64$$

$$132 = 66$$

$$x + \frac{2}{3} = 0; \quad 2x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0;$$

$$2x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$172 = 86 \cdot 2 = 43$$

$$D = 4 + 8 = 12$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

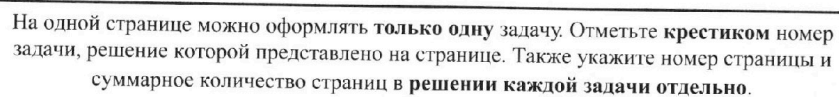
$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$D = 4 + 128 = 132$$

$$64 - 16$$

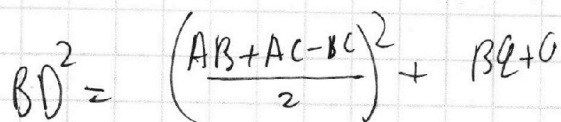
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{132}}{2} = 1 \pm \sqrt{33}$$





СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BD^2 = r^2 + (BQ + r)^2$$

$$BC \cdot BQ = BC(BC - AC)$$

$$f^2 = \frac{AB^2 + AC^2 + BC^2 + AB \cdot AC \cdot 2 - 2AB \cdot BC - 2AC \cdot BC}{4}$$

$$(B \oplus r) = BC - AC + \frac{AB + AC - BC}{2} = \left( \frac{AB + BC - AC}{2} \right)$$

$$(BQ+V)^2 = \frac{AB^2 + BC^2 + AC^2 + 2AB \cdot BC - 2AB \cdot AC - 2BC \cdot AC}{2}$$

$$(BQ + r)^2 = \frac{AB^2}{2} + \frac{BC^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - BC \cdot AC = BC^2 - BC \cdot AC$$

