



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

/ ИЗ /

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = x^2 + 8x + 16 + y^2 + 8y + 16 + z^2 + 8z + 16$$

$$yz + 4x + 2x + 4y + xy + 4z + 48$$

$$2x + xy + 2z + 4 = x(2+y) + z(y+2) = (x+2)(y+2)$$

$$(x+2)(y+2) + (y+2)(z+2) + (z+2)(x+2) + 36$$

$$x = \frac{yz + z^2}{y} = \frac{y + y^2}{z}$$

$$z^3 + 4z^2 = y^3 + 4y^2 \quad \text{аналогично решить для } z$$

$$z^2(z+4) = y^2(y+4) \Rightarrow x^2(x+4)$$

$$(x^3 + 4x^2)' = 3x^2 + 8x \Rightarrow \text{задача решена}$$

$$x = y = z$$

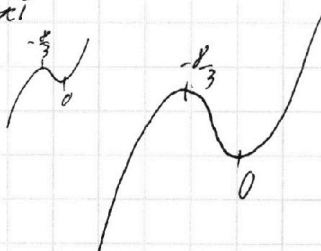
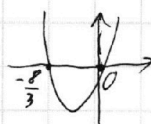
$$x^2 = 48 + x^2$$

$$48 = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow \text{нет решения}$$

$$x(3x+8)$$

$$x^2/(x+4) \text{ характ}$$



$$x^2 = 48 + x^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \underbrace{99 \dots 9}_{25000} = 10^{25000} - 1$$

$$n^3 = (10^{25000} - 1)^3 = 10^{25000 \cdot 3} - 3 \cdot 10^{25000 \cdot 2} + 3 \cdot 10^{25000} - 1 = 10^{75000} - 3 \cdot 10^{50000} + 3 \cdot 10^{25000} - 1$$

$$10^{75000} - 3 \cdot 10^{50000} = 99 \dots 97000 \dots 0$$

$\begin{array}{r} 99999 \\ - 35000 \\ \hline 64999 \end{array}$	$\begin{array}{r} 99999 \\ - 50001 \\ \hline 49998 \end{array}$	$\begin{array}{r} 99999 \\ - 1 \\ \hline 99998 \end{array}$
---	---	---

$$3 \cdot 10^{25000} - 1 = 299 \dots 9$$

$$K-Bo \text{ "9" } 75000 - 50001 = 24999$$

$$K-Bo \text{ "9" } 25001 - 1 = 25000$$

ответ:

$$\text{всего "9" } 25000 + 24999 = 49999$$

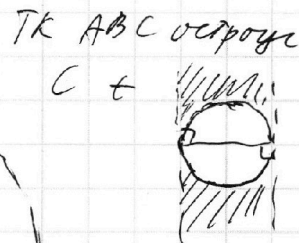
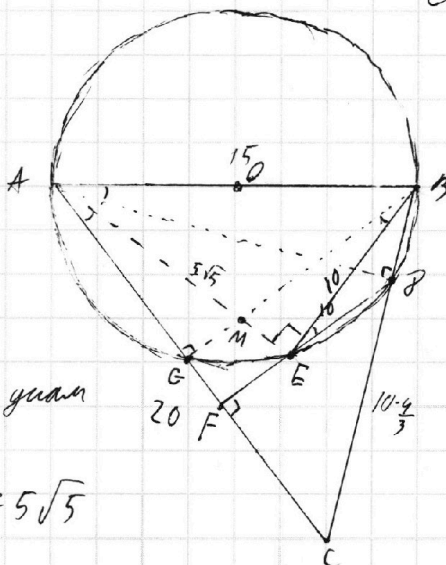
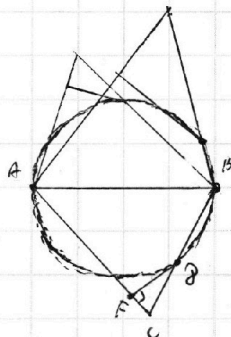


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
/ ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\angle AEB = 90^\circ$ как лемма

$AE = \sqrt{15^2 - 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

$\angle AEB$ лемма; $\angle AEB = 90^\circ$ лемма

$\angle AEB = 90^\circ \Rightarrow EB \parallel FP \Rightarrow \angle EBD = \angle EBF \Rightarrow EG = BP$

$\angle BAE$

$\cos \angle BAE = \frac{5\sqrt{5}}{15} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\angle BAP = \angle FAE$

$BD = AB + AD$

$ADC \sim AEB$

$DC = 10 \cdot \frac{20}{15} = 10 \cdot \frac{4}{3}$

$CFP \sim CAP \Rightarrow CF = CP \cdot \frac{CP}{AC} = \frac{(10 \cdot \frac{4}{3})^2}{20} = 5 \cdot \frac{16}{9} = \frac{80}{9}$

$AF = AC - CF = \frac{180}{9} - \frac{80}{9} = \frac{100}{9}$ ответ



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

пусть всего n коробок

к-во способов выбрать 5 коробок C_n^5

к-во способов победы

C_{n-3}^2 (гарантия скрем
коробки с шариками
выбир ещё 2 из ост)

вероятность победы

$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$$

разрешим выбрать 8 коробок

маленькая вероятность победы

$$\frac{C_{n-3}^5}{C_n^8}$$

$$\frac{C_{n-3}^5}{C_n^8} : \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{C_{n-3}^5}{C_{n-3}^2} \cdot \frac{C_n^5}{C_n^8} = \frac{(n-3)!}{5!(n-3-5)!} \cdot \left(\frac{n!}{8!(n-8)!} \right)^{-1}$$

$$\frac{(n-3)!}{2!(n-3-2)!} \cdot \left(\frac{n!}{5!(n-5)!} \right)^{-1}$$

$$\frac{2!(n-5)!}{5!(n-8)!} \cdot \left(\frac{5!(n-5)!}{8!(n-8)!} \right)^{-1} = \frac{2!(n-5)!}{5!(n-8)!} \cdot \frac{8!(n-8)!}{5!(n-5)!} = \frac{2! \cdot 8!}{5! \cdot 5!}$$

$$8! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 120 \cdot 42 \cdot 8 = 960 \cdot 42$$

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)^2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 7}{5} = \frac{28}{5}$$

11
5,6

$$\begin{array}{r} \times 960 \\ 42 \\ \hline 192 \\ 384 \\ \hline 40320 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$\Phi > 0$~~

~~$$P_1 = a^4(a-1)^2 + 16(a^6 - 4a - 2) > 0$$~~

~~$$P_2 = a^2(a-1)^2 - \frac{4}{3}(2-a^3) > 0$$~~

~~$a \quad P_1 \quad P_2$~~

~~$$0 \quad 0 \cdot (-1)^2 + 16(0 - 4 \cdot 0 - 2) = -32 < 0$$~~

~~$$1 \quad 1 - 0 + 16 \cdot (-4 - 2) = -5 \cdot 16 < 0$$~~

~~$$-1 \quad 1 \cdot (-2)^2 + 16(1 + 4 - 2) = 4 + 16 \cdot 3 > 0 \quad 1 \cdot (-2)^2 - \frac{4}{3}(2 + 1) = 4 - \frac{4}{3} \cdot 3 = 0$$~~

~~ответ: таких a не существует~~

~~$$a(a^2 + a + 2) = 0$$~~

~~$$a(a^2 + a - 2) = 0$$~~

~~$$a(a-1)(a+2) = 0$$~~

~~$$a = 0; 1; -2$$~~

~~$\Phi > 0$~~

$$P_1 = a^4(a-1)^2 + 16(a^6 - 4a - 2) > 0$$

$$P_2 = a^2(a-1)^2 - \frac{4}{3}(2-a^3) > 0$$

$a \quad P_1$

0 $-32 < 0$

1 $-5 \cdot 16 < 0$

-2 $16 \cdot (-3)^2 + 16(64 + 4 \cdot 2 - 2) = 16 \cdot 9 + 16 \cdot 70 > 0$

P_2

$$4 \cdot (-3)^2 - \frac{4}{3}(2 - 8) = 4 \cdot 9 - \frac{4}{3} \cdot 6$$

$$4 \cdot 9 + 2 \cdot 4 > 0$$

ответ: $a = -2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$$

разность прогрессии d

$$D = (a^2 - a)^2 - 4 \cdot \frac{2-a^3}{3} > 0$$

$$x = \frac{a^2 - a \pm \sqrt{(a^2 - a)^2 - \frac{4}{3}(2-a^3)}}{2}$$

разн между 4м и 5м членами d

$$d = \sqrt{D}$$

$$2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$$

$$D = (a^2(a-1))^2 + 4 \cdot 2(2a^6 - 8a - 4) > 0$$

между 2м 4 7м 5 d

$$x = \frac{-a^3 - a^2 \pm \sqrt{D}}{4}$$

$$5d = \frac{\sqrt{D}}{2}$$

$$2 \cdot 5 \sqrt{a^2(a-1)^2 - \frac{4}{3}(2-a^3)} = \sqrt{a^4(a-1)^2 - 16(2a^6 - 8a - 4)}$$

$$4 \cdot 25 \left(a^2(a-1)^2 - \frac{4}{3}(2-a^3) \right) = a^4(a-1)^4 - 16(a^6 - 4a - 2)$$

$$\begin{array}{r} a^6 - 4a - 2 \quad | \quad 2 - a^3 \\ a^6 - 2a^3 \\ \hline 2a^3 - 4 \end{array}$$

$$\frac{1}{4} \left(a^2(1-a) - \sqrt{a^4(a-1)^2 + 4 \cdot 2(2a^6 - 8a - 4)} \right) = n(2)$$

$$\frac{1}{2} \left(a^2 - a - \sqrt{a^2 - a - \frac{4}{3}(2-a^3)} \right)$$

симметр от $n(2) + \frac{5}{2}d$

$$\frac{1}{2} \left(a^2 - a + \sqrt{a^2 - a - \frac{4}{3}(2-a^3)} \right)$$

$$\frac{n(2) + n(7)}{2} = \frac{n(4) + n(5)}{2}$$

$$\frac{1}{4} \left(a^2(1-a) + \sqrt{a^4(a-1)^2 + 16(a^6 - 4a - 2)} \right)$$

$$\begin{aligned} a^2(1-a) &= a^2 - a \\ a^2 - a^3 - a^2 + a &= 0 \\ -a^3 + a &= 0 \\ a &= a^3 \\ a^3 - a &= 0 \\ a(a^2 - 1) &= 0 \\ a &= 0, 1, -1 \end{aligned}$$

$$\frac{a^2 - a^3}{4} = \frac{a^2 - a}{2} \rightarrow a^3 - a^2 + 2a^2 - 2a = 0$$

$$a^3 + a^2 - 2a = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{4} \left((-2)^2 (1+2) - \sqrt{\cancel{16 \cdot 79}} \right)$$

+2b

$$\frac{1}{2} \left(4 + 2 + \sqrt{4 \cdot 11} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(4 + 2 + \sqrt{4 \cdot 11} \right) \quad +d \rightarrow d = 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot 11} = 2\sqrt{11}$$

$$\frac{1}{4} \left(4 - 3 - \sqrt{16 \cdot 79} \right) \quad +2d$$

$$\frac{1}{4} (12 - 4\sqrt{79}) - \frac{1}{2} (6 + 2\sqrt{11}) = 3 - \sqrt{79} - 3 + \sqrt{11} = \sqrt{11} - \sqrt{79} \neq 2 \cdot 2\sqrt{11}$$

↓
 $d \neq -2$

ответ: $\emptyset$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left| y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \right| + \left| y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \right| \leq 6$$

I $y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}, y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0$

$$2y - 30 \leq 6$$

$$y \leq 18$$

II $y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}, y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} < 0$

$$-2y + 30 \leq 6$$

$$y \geq 12$$

III $y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0, y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 0$

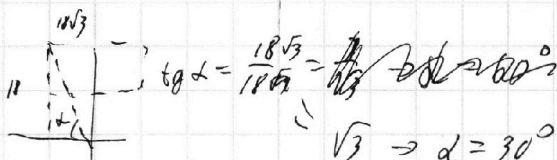
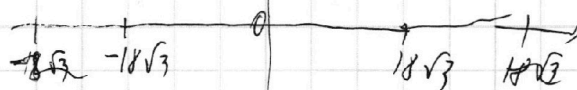
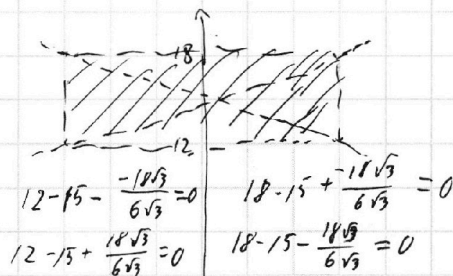
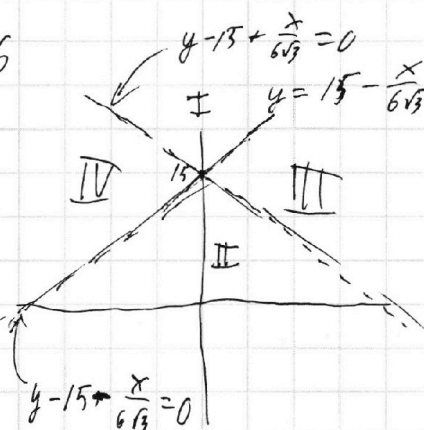
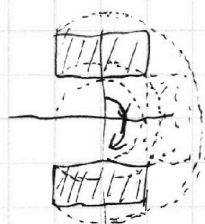
$$\frac{2x}{6\sqrt{3}} \leq 6$$

$$x \leq 18\sqrt{3}$$

IV $y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} < 0, y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0$

$$\frac{-2x}{6\sqrt{3}} \leq 6$$

$$x \geq -18\sqrt{3}$$



$$\sqrt{(18\sqrt{3})^2 + 18^2} = 18 \cdot 2 = 36$$

$$\frac{300^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 36^2 - \frac{\pi \cdot 12^2}{2}$$

$$\frac{300^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 36^2 - \frac{\pi \cdot 12^2}{2} + 2 \cdot \frac{6 \cdot 6\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \frac{12 \cdot 12\sqrt{3}}{2}$$

$$\pi \cdot 36 \cdot 30 - \pi \cdot 12 \cdot 6 + 36\sqrt{3} - 144\sqrt{3} = 1080\pi - 72\pi - 108\sqrt{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

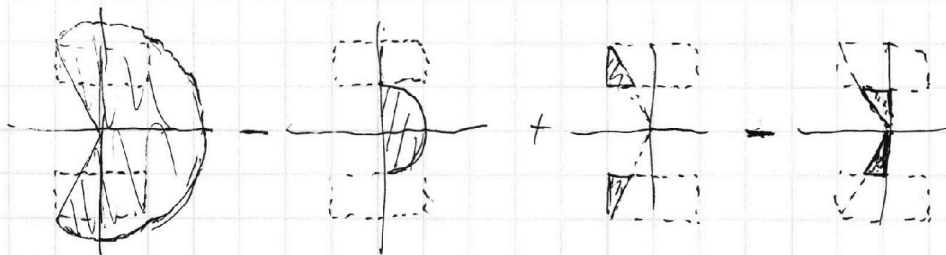
7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

ответ:

$$1008\pi - 108\sqrt{3}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
 / из /

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

