



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 \\ yz = -6x + x^2 \\ zx = -6y + y^2 \end{cases}$$

Перемножим все выражения: $xy \cdot yz \cdot zx =$

$$= x^2 y^2 z^2 = (z^2 - 6z)(x^2 - 6x)(y^2 - 6y) = 2xy(z-6)(x-6)(y-6) \neq$$

Сократим на xyz : $xyz = (x-6)(y-6)(z-6) = xyz - 6zx - 6yz - 6xy + 36z + 36x + 36y - 216$

$$36(x+y+z) - 6(xy+yz+zx) - 216 = 0 \quad | :6$$

$$6(x+y+z) - (xy+yz+zx) - 36 = 0$$

Подставим значения xy, yz, zx из условия:

$$6(x+y+z) - z^2 + 6z - y^2 + 6y - x^2 + 6x - 36 = 12(x+y+z) - x^2 - y^2 - z^2 - 36 = 0 = t$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 12y + 36 + z^2 - 12z + 36 =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - 12(x+y+z) + 108 = 72 - t = 72 - 0 = 72$$

Ответ: 72.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что число, состоящее только из девяток можно предста-
вить в виде $10^n - 1$, где n — кол-во девяток. Тогда число n из усло-
вия можно представить как $10^{20001} - 1$. Возведем это число в
куб: $(10^{20001} - 1)^3 = 10^{60003} - 3 \cdot 10^{40002} + 3 \cdot 10^{20001} - 1$

Теперь посмотрим, какой оно будет принимать вид:

1) Если мы вычитаем три единицы на какую-то степень
десяток, значит, в начале будут идти $60003 - 40002 - 1 =$
 $= 20000$ девяток. На этом этапе можно сокра-
тить числа на 10^{40002} , т.к. дальше все равно идут нули, а нас инте-
ресует начало. Получается $10^{20001} - 3$. Тут уже очевидно, что число
девяток составит кол-во всех цифр без последней. (последняя бу-
дет 7). Теперь можно вернуть 40002 нуля в конец числа.

2) Прибавим $3 \cdot 10^{20001}$. То есть дальше, когда мы будем вычи-
тать 1, можно будет рассматривать $3 \cdot 10^{20001}$ без привязки к
основному числу, т.к. $1 < 3 \cdot 10^{20001}$.

3) Из 40002 нулей, которые пошли после 7 в первом этапе нам
нужно только 20002 цифры, последние 20001 из которых ну-
ли, а первая 3. Вычитая 1, получим число, в котором: сначала



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

идет 20000 ~~9~~ девяток, потом 7, потом 20000 нулей, потом 2,
потом 20001 девяток. Суммарно девяток: 40001
Ответ: 40001

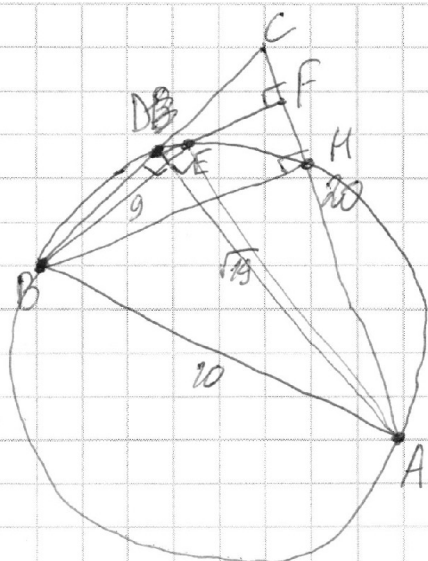


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 из 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Зная, что AB - диаметр, $\triangle BEA$ прямоугольный с $\angle BEA = 90^\circ$.

$$\text{Тогда } AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{100 - 81} = \sqrt{19}$$

$$AF = \sqrt{AE^2 - EF^2} = \sqrt{19 - EF^2} = AC - CF = 20 - CF$$

~~$\triangle BDA$~~ $\triangle BDA$ тоже прямоугольный с

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{100 - BD^2} = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{400 - CD^2}$$

$$100 - BD^2 = 400 - CD^2 \rightarrow CD^2 - BD^2 = 300 = (CD - BD)(CD + BD) = BC(CD - BD).$$

BH - высота на CA из B . $H \in \omega$, т.к. AB всё ещё диаметр, а $\angle BHA = 90^\circ$.

$$\begin{aligned} BH &= \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{100 - AH^2} = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \\ &= \sqrt{(CD^2 - BD^2)^2 - CH^2} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
5 из **7**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть всего коробок было x . Количество способов поместить во все три коробки с шариками будет в таком случае равно количеству способов выбрать из тех коробок, где нет шарика, две шарика. Это есть C_{x-3}^2

~~Количество способов выбрать 5 коробок~~ C_x^5 . Всего способов выбрать 5 коробок C_x^5 .

Тогда вероятность выиграть, когда мы выбирали 5 коробок равна $p_1 = \frac{C_{x-3}^2}{C_x^5} = \frac{\frac{(x-3)!}{(x-5)! \cdot 2!}}{\frac{x!}{(x-5)! \cdot 5!}} = \frac{(x-3)! \cdot (x-5)! \cdot 5!}{x! \cdot (x-5)! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{(x-2)(x-1)x} = \frac{60}{(x-2)(x-1)x}$

В случае с выбором 3 коробок, чтобы угадать, надо из 3 оставшихся выбрать уже не 2 шарика, а 3 шарика в коробках. C_{x-3}^3

А все способы выбрать 3 коробок будет C_x^3 . Вероятность выиграть

теперь: $p_2 = \frac{C_{x-3}^3}{C_x^3} = \frac{\frac{(x-3)!}{(x-6)! \cdot 3!}}{\frac{x!}{(x-3)! \cdot 3!}} = \frac{(x-3)! \cdot (x-3)! \cdot 3!}{x! \cdot (x-6)! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{(x-2)(x-1)x}$

$\frac{504}{(x-2)(x-1)x}$

Можно подсчитать верное в $\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{504}{(x-2)(x-1)x}}{\frac{60}{(x-2)(x-1)x}} = \frac{504}{60} = 8,4$ раз.

Ответ: 8,4 раза



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
6 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть арифметическая прогрессия будет вида $b+nd$, где d — шаг, a — номер элемента. Тогда $b_1 = b+1d$, $b_2 = b+2d$, $b_5 = b+5d$, $b_8 = b+8d$.

По т. Виета для 1) уравнения:

$$-\frac{b}{a} = \frac{a^2 - 4a}{1} = a^2 - 4a = x_1 + x_2 = \text{~~2b+13d~~} b_1 + b_2 = 2b + 3d$$

и по т. Виета для 2) уравнения:

$$-\frac{b}{a} = \frac{a^3 - 4a^2}{5} = x_1 + x_2 = b_5 + b_8 = 2b + 13d$$

$$a^2 - 4a = 2b + 13d = \frac{a^3 - 4a^2}{5} \quad | \cdot 5$$

$$a^3 - 4a^2 = 5a^2 - 20a$$

$$a^3 - 9a^2 + 20a = 0 \quad | :a \quad a=0 \text{ — корень}$$

$$a^2 - 9a + 20 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2} = 5$$

$a=0$ — не подходит, т.к. подставив в 1) уравнение: $x^2 + 4 = 0$ нет корней.

Поэтому $a=5$ и $a=4$ — единственные корни.

Ответ: $a_1=5$; $a_2=4$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

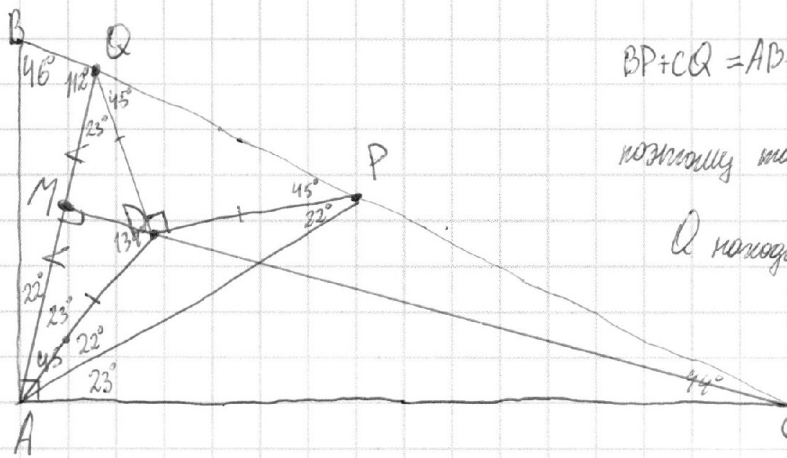
5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
7 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$BQ + CQ = AB + AC > BC$ по нерав. треугольника,
поэтому точки P и Q стоят так, что
Q находится между B и P.

$$\angle BAP = \angle BPA = \frac{180^\circ - \angle ABP}{2} = \frac{180^\circ - 46^\circ}{2} = 67^\circ$$

$$\angle CAQ = \angle CQA = \frac{180^\circ - (90^\circ - \angle ABC)}{2} = \frac{90^\circ + 46^\circ}{2} = 68^\circ; \angle ACB = 90^\circ - \angle ABC = 44^\circ$$

$$\angle BAQ = \angle BAC - \angle CAQ = 90^\circ - 68^\circ = 22^\circ; \angle CAP = \angle BAC - \angle BAP = 90^\circ - 67^\circ = 23^\circ$$

$$\angle QAP = \angle BAC - \angle BAQ - \angle CAP = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

Точка D является центром описанной окружности $\triangle AQP$, т.к.

$$\angle QDP = 2\angle QAP \text{ и } QD = QP, \text{ так как } QD = DP \rightarrow$$

$\rightarrow QD = DP = AD$. Значит, точка D лежит на серединном перпенди-

куляре к AQ. Поскольку $\triangle AQC$ равнобедренной по условию, точка

C также лежит на серединном перпендикуляре к AQ. Значит, точ-

ки M (середина AQ), D и C лежат на одной прямой, при этом сре-

динном перпендикуляре. Значит, CM — высота в $\triangle AQC$. Высота из

вершины C в равнобедренном треугольнике AQC также является

$$\text{биссектрисой, поэтому } \angle ACM = \angle ACD = \angle PCQ = \angle DCB = \frac{\angle ACB}{2} =$$

$$= 22^\circ \text{ Ответ: } 22^\circ$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

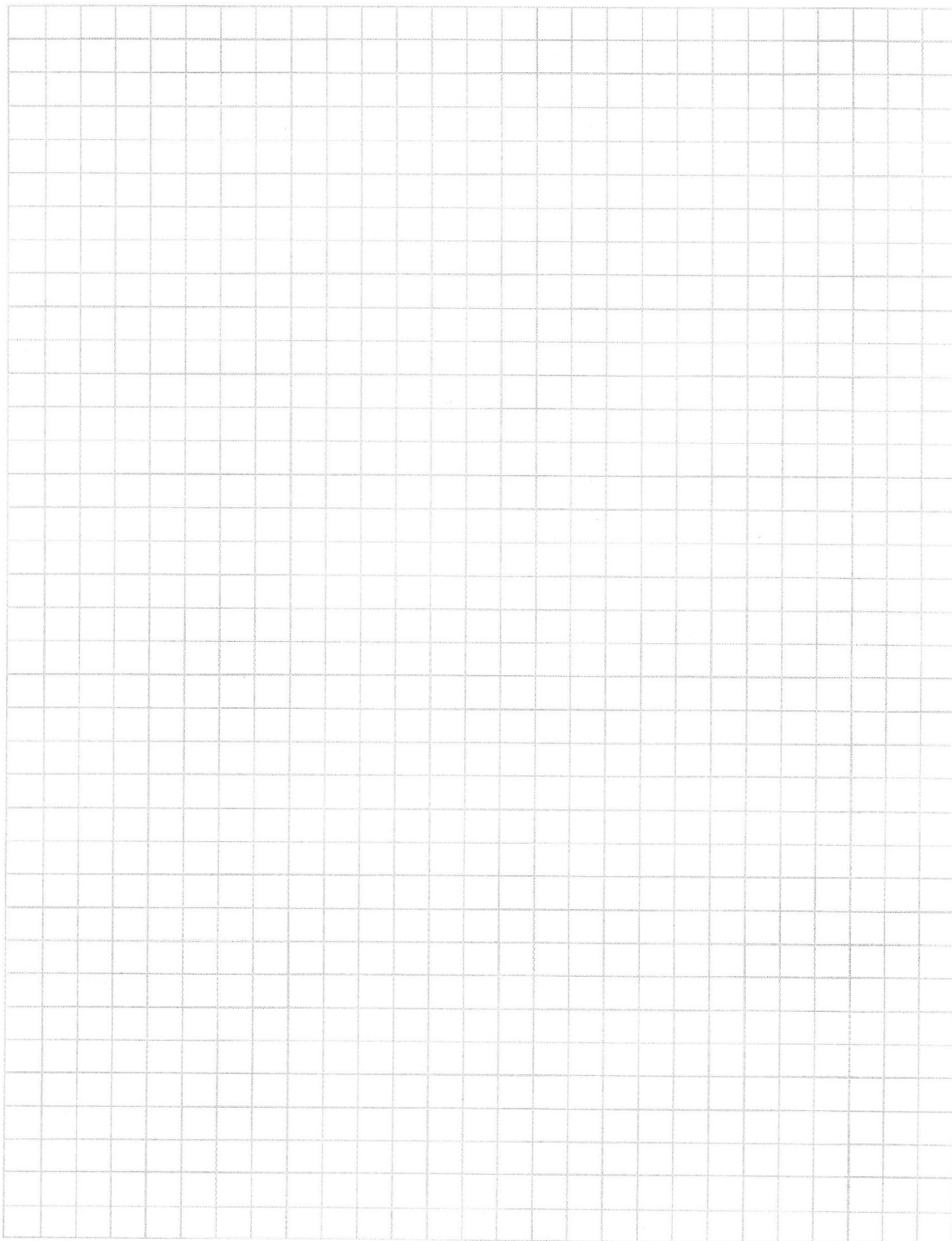
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 = z(z-6) \\ yz - 6x + x^2 = x(x-6) \\ zx - 6y + y^2 = y(y-6) \end{cases}$$

$$x^2 y^2 z^2 = xyz(x-6)(y-6)(z-6)$$

$$xyz = (x-6)(y-6)(z-6) = xyz(xy - 6x - 6y + 36)(z-6) = xyz^2 - 6xz^2 - 6yz^2 + 36z^2 + 36xz + 36yz - 216 \rightarrow 36(x+y+z) - 6(xy+xz+yz) - 216 = 0$$

$$x^2 y^2 = z^2(z-6)^2 \quad 6(x+y+z) - xy - xz - yz - 36 = 0$$

$$(z-6)^2 = \frac{x^2 y^2}{z^2} = \frac{6(x+y+z) - xy - xz - yz - 36}{z^2} = \frac{6(x+y+z) - z^2 + 6z - y^2 + 6y - x^2 + 6x - 36}{z^2} = \frac{12x + 12y + 12z - x^2 - y^2 - z^2 - 36}{z^2} = 0$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 12y + 36 + z^2 - 12z + 36 = x^2 + y^2 + z^2 - 12(x+y+z) + 108 =$$

$$= -(12(x+y+z) - x^2 - y^2 - z^2 - 36) + 72 = 0 + 72 = 72$$

Handwritten calculations showing the expansion of $(999...9)^3$ and the final result $100...00 - 3000...00 = 99...99$.

Left side calculations:

$$\begin{array}{r} 999...9 \\ \times 999...9 \\ \hline 999...9 \\ 999...9 \\ 999...9 \\ \hline 999...9 \end{array}$$

Right side calculations:

$$\begin{array}{r} 999...9 \\ \times 999...9 \\ \hline 999...9 \\ 999...9 \\ 999...9 \\ \hline 999...9 \end{array}$$

Final result:

$$100...00 - 3000...00 = 99...99$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{a^2 - 4a \pm \sqrt{(a^2 - 4a)^2 - 4(a^2 - 6a + 4)}}{2} = \frac{a^2 - 4a \pm \sqrt{a^4 - 8a^3 + 16a^2 - 4a^2 + 24a - 16}}{2} =$$

$$a_5 = a + 5d$$

$$a_3 = a + 3d$$

$$= \frac{a^2 - 4a \pm \sqrt{a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 24a - 16}}{2}$$

$$(2a - 2)^3 = 8a^3 - 24a^2 + 24a - 8$$

$$a^4 - (2a - 2)^3 - 12a^2 + 48a - 24$$

$$a^4 - (2a + 2)^3 = +36a^2 + 48a - 8$$

$$d = \frac{a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 24a - 16}{10}$$

$$5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{a^3 - 4a^2 \pm \sqrt{a^6 - 8a^5 + 16a^4 + 40a^3 + 120a + 300}}{10}$$

$$\begin{array}{r} 450 \\ \times 12 \\ \hline 900 \\ + 450 \\ \hline 5400 \end{array}$$

$$225 \cdot 8 = 1800 + 200 = 2000$$

$$3d = \frac{a^4 - 8a^3 + 16a^2 + 4a^3 + 120a + 300}{5}$$

$$15 \sqrt{a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 24a - 16} = \sqrt{a^6 + 6a^5 + 16a^4 + 4a^3 + 120a + 300}$$

$$225a^4 - 1800a^3 + 2700a^2 + 5400a - 3600 = a^6 + 6a^5 + 16a^4 + 4a^3 + 120a + 300$$

$$a^6 - 8a^5 - 209a^4 + 1804a^3 - 5280a^2 + 3900a = 0$$

$$a^2 - 6a + 4 = (b + 6d)(b + 7d) = b^2 + 13bd + 42d^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 4}}{2}$$

$$a^2 - 4a = 2b + 13d$$

$$\frac{-2a^3 - 6a - 15}{5} = (b + 5d)(b + 8d) = b^2 + 13bd + 40d^2$$

$$\frac{a^3 - 4a^2}{5} = 2b + 13bd$$

$$a^3 - 4a^2 - 5a^2 + 20a = 0 = a^3 - 9a^2 + 20a = 0$$

$$a^2 - 9a + 20 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2} = 5$$

$$1) x^2 + 5x - 1 = 0$$

$$2) 5x^2 - 25x - 295 = 0$$

$$x^2 - 5x - 59 = 0$$

$$x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 236}}{2} =$$

$$= \frac{5 \pm 3\sqrt{29}}{2}$$



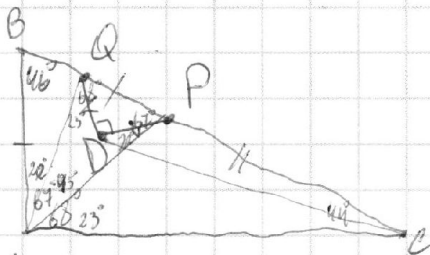
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\left| y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \right| + \left| y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \right| \leq 8$$

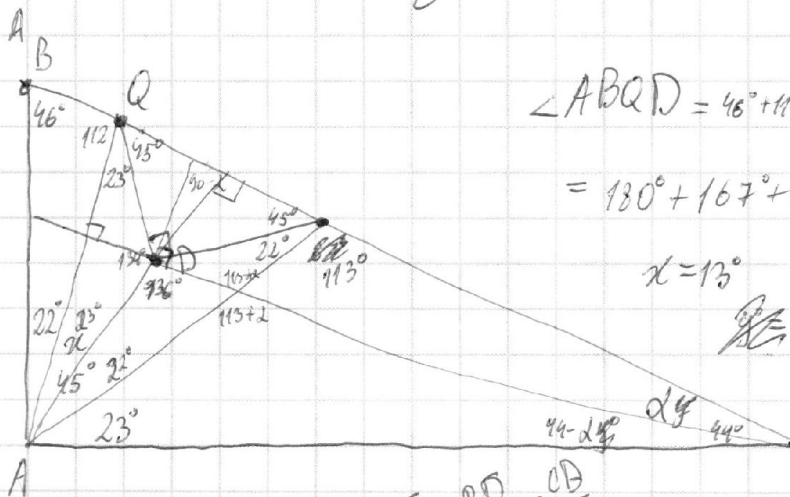


b-a

b+a

$$2y - 40 \leq 8$$

$$y \leq 24$$



$$\angle ABQD = 46^\circ + 112^\circ + 23^\circ + 134^\circ + x + 22^\circ = 360^\circ =$$

$$= 180^\circ + 167^\circ + x^\circ = 347^\circ$$

$$x = 13^\circ$$



$$168 - y = 113 + x$$

$$y = 55 - x$$

$$y = 55 - x$$

$$\frac{CD}{CF} = \frac{BD}{FH} = \frac{CD}{CH}$$

$$19 = EF^2 + AF^2$$

$$AF = \sqrt{19 - EF^2} = \sqrt{19 - 20 - CF^2}$$

$$CF = \sqrt{EC^2 - EF^2}$$

$$AF = \sqrt{AE^2 - EF^2}$$

$$\left| y + \frac{x}{2\sqrt{3}} \right| + \left| y - \frac{x}{2\sqrt{3}} \right|$$

$$\left| \frac{2\sqrt{3}y + x}{2\sqrt{3}} \right| + \left| \frac{2\sqrt{3}y - x}{2\sqrt{3}} \right|$$

