



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В телендре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое задела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 & (1) \\ yz = -6x + x^2 & (2) \\ zx = -6y + y^2 & (3) \end{cases}$$

1) Если $x = y$, то:

$$\begin{cases} x^2 = z^2 - 6z \\ xz = -6x + x^2 \\ xz = -6x + x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = z^2 - 6z \\ z = x - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+6)^2 = z^2 - 6z \\ x = z + 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(2) \begin{cases} z^2 + 12z + 36 = z^2 - 6z \\ x = z + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18z = -36 \\ x = z + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -2 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = -2 \end{cases} \text{ Аналогично, если } y = z, \text{ то: } \begin{cases} y = 4 \\ z = 4 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\text{Аналогично, если } x = z, \text{ то: } \begin{cases} x = 4 \\ z = 4 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\text{Тогда } (x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = (4-6)^2 + (4-6)^2 + (-2-6)^2 =$$

$$= (-2)^2 + (-2)^2 + (-8)^2 = 4 + 4 + 64 = 72$$

2) Если $x \neq y$, $y \neq z$, $x \neq z$, то:

$$(1) - (2): xy - yz = (z^2 - 6z) - (x^2 - 6x) \Leftrightarrow y(x-z) = (z^2 - x^2) + (6x - 6z) \Leftrightarrow$$

$$(2) y(x-z) = 6(x-z) - (x-z)(x+z) \Leftrightarrow y = 6 - x - z \Leftrightarrow \boxed{x + y + z = 6}$$

Аналогично, если вычтем (2) - (3) или (1) - (3):

$$\cancel{x \neq y, z = 6 - x - y}$$

$$\begin{cases} y = 6 - x - z \\ x = 6 - y - z \\ z = 6 - x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 - x - (6 - x - y) \\ x = 6 - y - (6 - x - y) \\ z = 6 - x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 - x - 6 + x + y \\ x = 6 - y - 6 + x + y \\ z = 6 - x - y \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 6^2 - 2(xy+xz+yz) =$$

$$= 36 - 2(xy+xz+yz). \text{ Пусть } t = x^2 + y^2 + z^2, \quad q = xy + yz + xz.$$

Тогда: $t = 36 - 2q.$

(Группой строим:

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 \\ yz = -6x + x^2 \\ zx = -6y + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -6z + z^2 \\ yz = -6x + x^2 \\ zx = -6y + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow xy + yz + zx = -6x - 6y - 6z + x^2 + y^2 + z^2 \Leftrightarrow$$

$$(2) \quad q = -6(x+y+z) + t \Leftrightarrow q = -36 + t \Leftrightarrow q = t - 36.$$

$$\begin{cases} t = 36 - 2q \\ q = t - 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 36 - 2(t - 36) \\ q = t - 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = 108 \\ q = t - 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 36 \\ q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(2) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 36 \\ xy + yz + xz = 0 \end{cases}$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = (-y-z)^2 + (-x-z)^2 + (-x-y)^2 =$$

$$= (y+z)^2 + (x+z)^2 + (x+y)^2 = y^2 + 2yz + z^2 + x^2 + 2xz + z^2 + x^2 + 2xy + y^2 =$$

$$= 2(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + xz) = 2 \cdot 36 + 2 \cdot 0 = 72$$

Ответ: 72. У в 1) и в 2) случаях.

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = 72.$$

Ответ: 72.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = 10^{20001} - 1$$

$$n^3 = (10^{20001} - 1)^3 = 10^{60003} - 3 \cdot 10^{40002} + 3 \cdot 10^{20001} - 1 = (10^{60003} - 1) +$$

$$+ (3 \cdot 10^{20001} - 3 \cdot 10^{40002}) = \underbrace{9 \dots 9}_{60003} - \underbrace{30 \dots 0}_{40002} + \underbrace{300 \dots 0}_{20001} =$$

$$= \underbrace{9 \dots 9}_{20000} \underbrace{9 \dots 9}_{40002} - \underbrace{30 \dots 0}_{40002} + \underbrace{30 \dots 0}_{20001} = \underbrace{9 \dots 9}_{20000} \underbrace{69 \dots 9}_{40002} + \underbrace{30 \dots 0}_{20001} =$$

$$= \underbrace{9 \dots 9}_{20000} \underbrace{69 \dots 9}_{20000} \underbrace{999 \dots 9}_{20001} + \underbrace{30 \dots 0}_{20001} = \underbrace{9 \dots 9}_{20000} \underbrace{70 \dots 0}_{20000} \underbrace{29 \dots 9}_{20001}$$

Всего девяток: $20000 + 20001 = 40001$

Ответ: 40001.



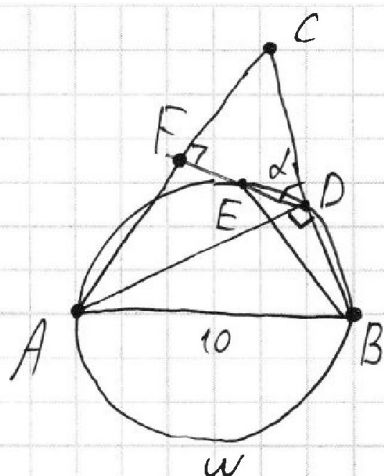
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\triangle BDE$ вписан в ω .

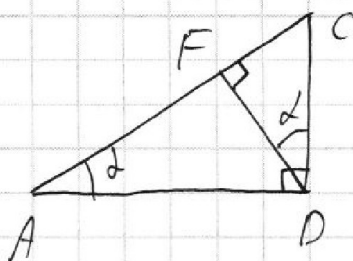
Значит, по теореме синусов:

$$\frac{BE}{\sin \angle BDE} = AB, \text{ т.к. } AB - \text{диаметр } \omega.$$

$$\frac{9}{\sin \angle BDE} = 10 \Leftrightarrow \sin \angle BDE = 0,9.$$

П.к. $\sin \angle BDE = \sin \angle CDF$ (смежные углы), то $\sin \angle CDF = 0,9$. Пусть $\angle CDF = \alpha$.

П.к. $\triangle ABD$ вписан в ω и AB - диаметр, то $\angle ADB = 90^\circ \Leftrightarrow \angle ADC = 90^\circ$.



$$\angle A = 90^\circ - \angle C = \alpha. \angle A = \angle ADF = \alpha.$$

$$1) \sin \alpha = \frac{CD}{AC} \Leftrightarrow CD = AC \cdot \sin \alpha.$$

$$CD = 20 \cdot 0,9 = 18.$$

$$2) \sin \alpha = \frac{CF}{CD} \Leftrightarrow CF = CD \cdot \sin \alpha.$$

$$CF = 18 \cdot 0,9 = 16,2.$$

$$3) AF = AC - CF = 20 - 16,2 = 3,8$$

Ответ: 3,8.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть всего коробок n .

Мара сначала у игрока было C_n^5 вариантов

Открыть коробки, а благоприятных — C_{n-3}^2

Во втором случае у игрока C_n^9 вариантов, а
(Пусть P_1 и P_2 — первая и вторая вероятности)

Благоприятных: C_{n-3}^6

$$P_1 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{\frac{(n-3)!}{2!(n-5)!}}{\frac{n!}{5!(n-5)!}} = \frac{\frac{(n-3)!}{2!}}{\frac{n!}{5!}} = \frac{5!(n-3)!}{2!n!}$$

$$P_2 = \frac{C_{n-3}^6}{C_n^9} = \frac{\frac{(n-3)!}{6!(n-9)!}}{\frac{n!}{9!(n-9)!}} = \frac{\frac{(n-3)!}{6!}}{\frac{n!}{9!}} = \frac{9!(n-3)!}{6!n!}$$

$$P_2 : P_1 = \frac{9!(n-3)!}{6!n!} \cdot \frac{5!(n-3)!}{2!n!} = \frac{9!}{6!} \cdot \frac{2!}{5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 7}{5} = \frac{42}{5} =$$

$= (8,4)$

Ответ: в 8,4 раза



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(1) $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ имеет корни b_6 и b_7 ;

(2) $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ имеет корни b_5 и b_8 , причем b_1 - арифметическая прогрессия.

По теореме Виета: $b_6 + b_7 = a^2 - 4a$;
 $b_5 + b_8 = \frac{a^3 - 4a^2}{5}$

П.к. b_1 - арифметическая прогрессия, то

$b_6 + b_7 = b_5 + b_8$. Значит, $a^2 - 4a = \frac{a^3 - 4a^2}{5} \Leftrightarrow$

$(\Leftrightarrow) 5a(a-4) = a^2(a-4) \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=4 \\ a=5 \end{cases}$

b_5, b_6, b_7, b_8 1) Если $a=0$, то уравнение (1) имеет вид $x^2 + 4 = 0$ и не имеет корней.

2) Если $a=4$, то:

(если разность положительна)

(1) $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

Тогда: $b_5 = -\sqrt{\frac{16}{5}}$,

$b_6 = -2$,

$b_7 = 2$,

$b_8 = \sqrt{\frac{16}{5}}$, что невозможно.

3) Если $a=5$, то:

(1) $x^2 - 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} \\ x = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} \end{cases}$

Тогда: $b_5 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}$,

$b_6 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}$,

$b_7 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$,

$b_8 = \frac{5 + 3\sqrt{29}}{2}$.

(2) $5x^2 - 25x - 295 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 59 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 - 3\sqrt{29}}{2} \\ x = \frac{5 + 3\sqrt{29}}{2} \end{cases}$

(Разность отрицательна. $\sqrt{29}$.)

Ответ: $a=5$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|y-20+\frac{x}{2\sqrt{3}}| + |y-20-\frac{x}{2\sqrt{3}}| \leq 8 \Leftrightarrow |y-20+\frac{x}{2\sqrt{3}}| + |20-y+\frac{x}{2\sqrt{3}}| \leq 8$$

П.ч. $|a+b| \leq |a|+|b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$, то.

$$8 \geq |(y-20+\frac{x}{2\sqrt{3}}) + (y-20-\frac{x}{2\sqrt{3}})| = |2y-40| \Leftrightarrow |y-20| \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$(2) \quad 16 \leq y \leq 24;$$

$$8 \geq |(y-20+\frac{x}{2\sqrt{3}}) + (20-y+\frac{x}{2\sqrt{3}})| = |\frac{x}{\sqrt{3}}| \Leftrightarrow |x| \leq 8\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$(2) \quad -8\sqrt{3} \leq x \leq 8\sqrt{3}.$$

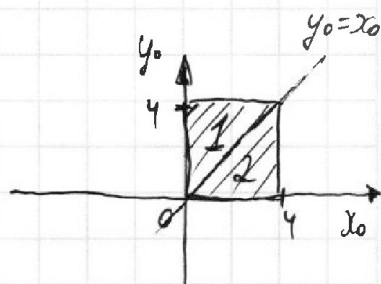
Пусть $y_0^* = y-20$; $x_0^* = \frac{x}{2\sqrt{3}}$.

Тогда: $|y_0^*+x_0^*| + |y_0^*-x_0^*| \leq 8$ ~~(1)~~



1) $x_0 \geq 0, y_0 \geq 0$.

$$|y_0+x_0| + |y_0-x_0| \leq 8 \Leftrightarrow \begin{cases} 8y_0 \geq x_0 & (1) \\ y_0 \leq 4 & \\ 8x_0 \leq y_0 & (2) \\ x_0 \leq 4 & \end{cases}$$



2) $x_0 \leq 0, y_0 \leq 0$.

$$|y_0+x_0| + |y_0-x_0| \leq 8 \Leftrightarrow |(-y_0)+(-x_0)| + |(-y_0)-(-x_0)| \leq 8 \text{ (аналогично ситуации (1))}$$

Тогда - квадрат с вершинами $(0,0)$, $(0,-4)$, $(-4,-4)$, $(-4,0)$.

3) $x_0 \geq 0, y_0 \leq 0$

$$|y_0+x_0| + |y_0-x_0| \leq 8 \Leftrightarrow |y_0+x_0| + |x_0+y_0| \leq 8 \Leftrightarrow |(-y_0)+x_0| + |-y_0| \leq 8$$

$$(2) \quad |(-y_0)+(-x_0)| + |(-y_0)-(-x_0)| \leq 8 \Leftrightarrow |(-y_0)+x_0| + |(-y_0)-x_0| \leq 8.$$

Ситуация аналогична. Тогда - квадрат с вершинами $(0,0)$, $(0,4)$, $(4,4)$, $(4,0)$.

4) $x_0 \leq 0, y_0 \geq 0$. Ситуация аналогична ситуации 3).

Тогда - квадрат с вершинами $(0,0)$, $(0,4)$, $(-4,4)$, $(-4,0)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

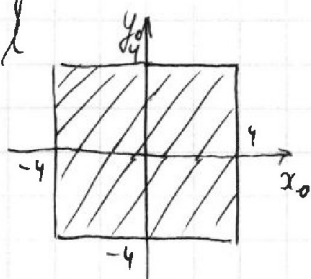
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Вернёмся к задачам с геометрией.

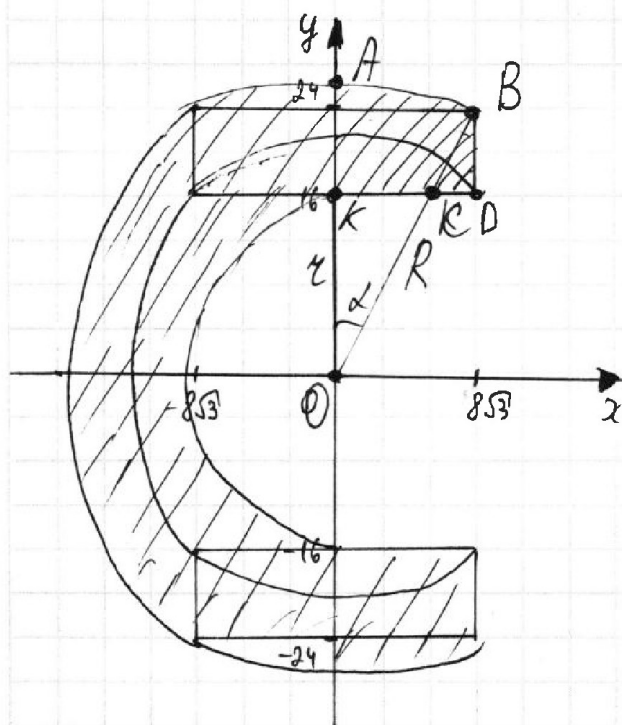
§ Пошли образам, график имеет вид:



Что можно записать так:
$$\begin{cases} |x_0| \leq 4 \\ |y_0| \leq 4 \end{cases}$$

Вернёмся к другим переменным:

$$\begin{cases} |\frac{x}{\sqrt{3}}| \leq 4 \\ |y - 20| \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 8\sqrt{3} \\ 16 \leq y \leq 24 \end{cases} \text{ — прямоугольник}$$



Можно и наоборот на рисунке.

1) Вычислим площадь той части, где $x \leq 0$.

Это полуокружность:

$$r = 16, R = \sqrt{(8\sqrt{3})^2 + 24^2} = \sqrt{3 \cdot 8^2 + 24^2} = 8\sqrt{3+3^2} = 8\sqrt{12} = 16\sqrt{3}$$

$$S_1 = \frac{\pi R^2 - \pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2} (R^2 - r^2) = \frac{\pi}{2} (16^2 \cdot 3 - 16^2) = \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot 16^2 = 256\pi$$

2) Вычислим площадь той части, где $x \geq 0, y \geq 0$.

$$S_2 = S_{\text{всех}} + S_{\text{сектора AOB}} - S_{\text{сек.}} = \pi S_{\text{сектора AOB}} - 32\sqrt{3}$$

$$\left(\frac{CK}{KD} = \frac{2}{3} \Rightarrow S_{\text{всех}} - S_{\text{сек.}} = \frac{1}{4} S_{\text{сек.}} - S_{\text{сек.}} = -\frac{3}{4} S_{\text{сек.}} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 8\sqrt{3} \right) = -32\sqrt{3} \right)$$

Можно же, $\sin \alpha = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$. $S_{\text{сектора AOB}} = \frac{60^\circ}{360^\circ} \pi R^2 = \frac{1}{6} \pi \cdot (16\sqrt{3})^2 = \frac{1}{6} \cdot 256 \cdot 3 \pi = 128\pi$. Значит: $S_2 = (128\pi - 32\sqrt{3})$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) Ввели площадь той части, где $y \leq 0$, $x \geq 0$.

$S_3 = S_2$ из симметрии относительно Ох.

Значит, $S_3 = (12\sqrt{6} - 32\sqrt{3})$

Итого образам: $S = S_1 + S_2 + S_3 = 25\sqrt{6} + 2(12\sqrt{6} - 32\sqrt{3}) =$
 $= 51\sqrt{6} - 64\sqrt{3}$

Ответ: $51\sqrt{6} - 64\sqrt{3}$

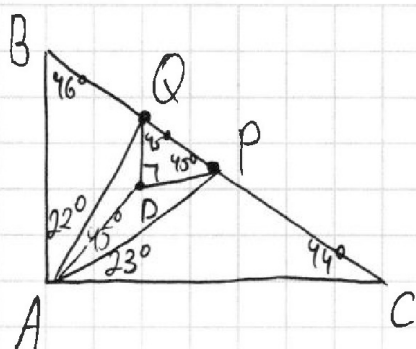


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle C = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - 46^\circ = 44^\circ$$

$$\triangle ABP: \angle BAP = \frac{180^\circ - 46^\circ}{2} = 90^\circ - 23^\circ \Rightarrow \angle CAP = 23^\circ$$

$$\triangle ACQ: \angle CAQ = \frac{180^\circ - 44^\circ}{2} = 90^\circ - 22^\circ \Rightarrow \angle BQA = 22^\circ$$

$$\angle QAP = 90^\circ - \angle BQA - \angle CAP = 90^\circ - 22^\circ - 23^\circ = 45^\circ$$

П.ч. в $\triangle QPD$ $\angle QPD = 90^\circ$, $\angle QAP = 45^\circ = \frac{1}{2} \angle QPD$, то
А лежит на окружности с центром в D
и радиусом $DQ = DP$. (по теореме о ГЧТ).
Значит, $AD = QD$.

П.ч. ~~ADQ~~ $AD = QD$ и $AC = QC$, то CD —
срединный перпендикуляр к AQ. П.ч.

$\triangle ACQ$ — равнобедренный, то CD — биссектриса
угла $\angle ACB$. Значит, $\angle DCB = \frac{1}{2} \angle ACB = 22^\circ$
Ответ: 22° .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

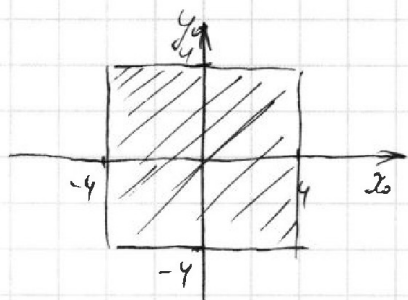


СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Таким образом, графика неравенства $|y_0 + x_0| + |y_0 - x_0| \leq 8$ имеет вид:



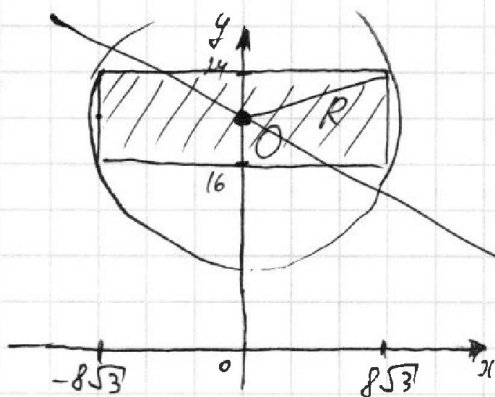
Вернёмся к графику неравенства

Это можно записать так:

$$\begin{cases} |x_0| \leq 4 \\ |y_0| \leq 4 \end{cases}$$

Вернёмся к графику неравенства:

$$\begin{cases} |\frac{x}{2\sqrt{3}}| \leq 4 \\ |y - 20| \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 8\sqrt{3} \\ 16 \leq y \leq 24 \end{cases}$$



Если повернуть данный прямоугольник на 180° будет закрашен круг с центром в точке $(0, 20)$ и радиусом:

$$R = \sqrt{(8\sqrt{3})^2 + 4^2} = \sqrt{3 \cdot 64 + 16} = 4\sqrt{3 \cdot 4 + 1} = 4\sqrt{13}$$

Площадь круга:

$$S = \pi R^2 = \pi \cdot (4\sqrt{13})^2 = 208\pi$$

Ответ: 208π .

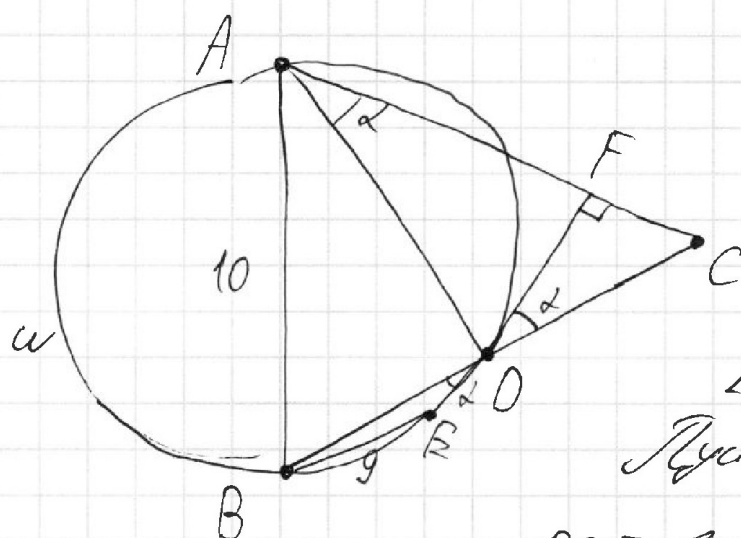


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AC=20, AB=10, \\ BE=9 \\ AF=?$$

$$\angle CDF = \angle BDE \text{ (вертикальные)}$$

$$\text{Пусть } \angle CDF = \angle BDE = \alpha.$$

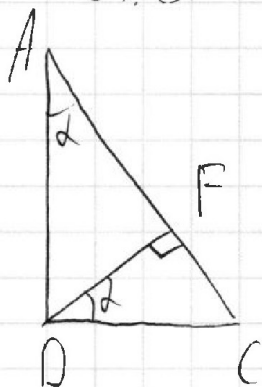
$\triangle BDE$ вписан в ω . По

$$\text{теореме синусов: } \frac{BE}{\sin \alpha} = AB; \sin \alpha = \frac{BE}{AB} = \frac{9}{10} = 0,9.$$

П.ч. $\triangle APB$ вписан в ω и AB — диаметр, то $\angle APB = 90^\circ \Leftrightarrow \angle APC = 90^\circ$.

$\triangle APC \sim \triangle PFC$ (по двум, приравненным углам).

$$\text{Значит, } \frac{AP}{PC} = \frac{PF}{FC}$$



$$\text{Пусть } CD = x. \text{ Тогда } CF = x \sin \alpha = 0,9x;$$

$$\sin \alpha = 0,9 = \frac{CP}{AC} = \frac{x}{AC} \Rightarrow AC = \frac{x}{0,9}.$$

$$\text{Значит, } x = 0,9 AC = 0,9 \cdot 20 = 18;$$

$$CF = 0,9x = 0,9 \cdot 18 = 16,2;$$

$$AF = AC - CF = 20 - 16,2 = 3,8$$

Ответ: 3,8.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

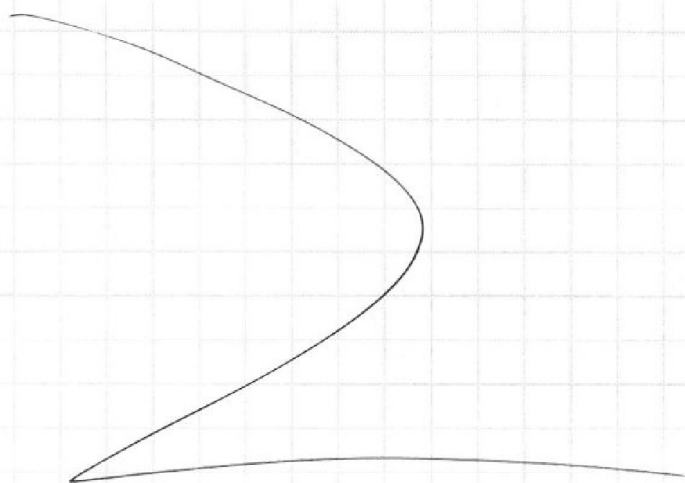
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

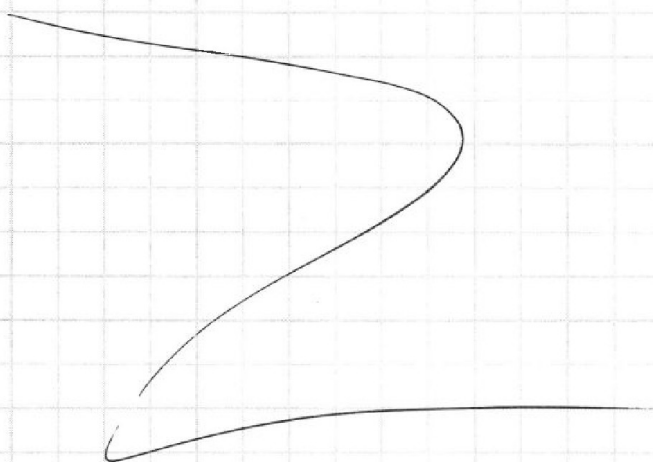
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$D = 25 + 236 = 261 = 3 \cdot 87 = 9 \cdot 29 =$$

$$\sqrt{D} = 3\sqrt{29}.$$

$$\frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{x^2 z^2}{y^2} = \frac{y^2}{x}$$

$$\begin{cases} x^2 - 6x = yz \\ z^2 - 6z = xy \\ y^2 - 6y = xz \end{cases}$$

$$(x-3)^2 = yz + 9.$$

$$\frac{x(x-6)}{2(x-6)} = \frac{z}{x}; \quad \frac{(x-6)^2}{(x-6)^2} = \frac{z^2}{x^2}.$$

$$x_6^2 = \frac{z^4}{x^4} z_6^2.$$

$$y_6^2 = \frac{z^4}{y^4} z_6^2.$$

$$(x-6)^2 = (x-3-3)^2 = (x-3)^2 + 9 - 6(x-3) = yz + 18 - 6x + 18 - 6x + yz + 36. \quad \frac{z^2}{x^2} = \frac{x-6}{z-6}.$$

$$108 + xy + yz + xz - 6x - 6y - 6z$$

$$y^2 = (x-6)(z-6).$$

$$x^2 = (y-6)(z-6)$$

$$z^2 = (x-6)(y-6).$$

$$x^2(x-6) = z^2(z-6).$$

$$(x+y+z-18)^2 - 2(x-6)(y-6) - 2(y-6)(z-6) - 2(x-6)(z-6) =$$

$$= (x+y+z-18)^2 - 2z^2 - 2x^2 - 2y^2 = (x+y+z)^2 - 36(x+y+z) + 18^2 - 2z^2 - 2x^2 - 2y^2 =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2 - 36x - 36y - 36z + 18^2 =$$

$$= 2xy + 2xz + 2yz - x^2 - y^2 - z^2 - 36x - 36y - 36z + 18^2 =$$

$$\frac{z^4}{x^4} + \frac{z^4}{y^4} + \frac{z^4}{z^4}.$$

$$= 2z^2 - 12x - 12y + 2x^2 - 12x - x^2 - y^2 - z^2 - 36x - 36y - 36z + 18^2 =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - 48x - 48y - 48z + (3 \cdot 6)^2 =$$

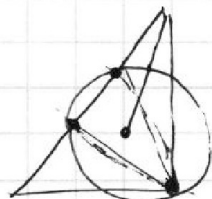
$$x = \frac{x(x-6)}{y}$$

$$y = \frac{z(z-6)}{x} =$$

$$= (x-24)^2 + (y-24)^2 + (z-24)^2 - 324^2 + 3 \cdot 108$$

$$(z-6)^2 \cdot \frac{z^4}{x^4} + (z-6)^2 \cdot \frac{z^4}{y^4} + (z-6)^2 = (z-6)^2 \cdot \left(\frac{z^4}{x^4} + \frac{z^4}{y^4} + \frac{z^4}{z^4} \right) =$$

$$xy = \frac{x(x-6)}{y} \left(\frac{x(x-6)}{y} - 6 \right) \quad yz = (x-6) \left(\frac{x(x-6)}{y} - 6 \right).$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено болес одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 \\ yz = -6x + x^2 \\ xz = -6y + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-6) = yz \\ y(y-6) = xz \\ z(z-6) = xy \end{cases}$$

$$y(x-z) = z^2 - x^2 + 6x - 6z; \quad \text{Сум } x \neq z.$$

$$y(x-z) = -(x-z)(x+z) + 6(x-z)$$

$$y^2 - x - z + 6.$$

$$(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 = x^2 + 2xy + y^2 + x^2 + 2xz + z^2 + y^2 + 2yz + z^2 + y^2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$\begin{cases} xy = 6z + z^2 \\ yz = -6x + x^2 \\ zx = -6y + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - x - z \\ yz = -6x + x^2 \\ zx = -6y + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - x - z \\ z = 6 - x - y \\ zx = -6y + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(z) \begin{cases} z = 6 - x - y \\ y = 6 - x - (6 - x - y) \\ xz = -6y + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 6 - x - y \\ x(6 - x - y) = -6y + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 6 - x - y \\ 6x - x^2 - xy = -6y + y^2 \end{cases}$$

$$(z) \begin{cases} z = 6 - x - y \\ x^2 + 2xy^2 = 6x + 6y \end{cases}$$~~

Аналогично М.О: $x + y + z = 6$.

$$\begin{aligned} \text{Значит: } (x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 &= (-y-z)^2 + (-x-z)^2 + (-x-y)^2 = \\ &= (x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+z)^2 = x^2 + 2xy + y^2 + y^2 + 2yz + z^2 + x^2 + 2xz + z^2 = \\ &= 2(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz) = 2(x^2 + y^2 + z^2 + 2^2 \cdot 6z + x^2 - 6x + y^2 - 6y) = \\ &= 2(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 6(x+y+z)) = 4(x^2 + y^2 + z^2) - 12 \cdot 6 = 4 \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 36 - 2(xy + xz + yz).$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + xz$$