



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 \\ yz = -6x + x^2 \\ zx = -6y + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xyz = z^3 - 6z^2 \\ xyz = x^3 - 6x^2 \\ xyz = y^3 - 6y^2 \end{cases} \quad \text{Тогда } \text{шкорожен} \\ (t^3 - 6t^2 - xyz) \text{ имеет}$$

корни x, y, z , тогда по теореме Виета $x + y + z = 6$,
 $xy + yz + zx = 0$. $\Rightarrow (x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = (x^2 - 12x + 36) + (y^2 - 12y + 36) + (z^2 - 12z + 36) = (x^2 + y^2 + z^2) - 12(x + y + z) + 36 \cdot 3 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) - 12(x + y + z) + 3 \cdot 36 = 6^2 - 2 \cdot 0 - 12 \cdot 6 + 36 \cdot 3 = 36 \cdot (1 - 2 + 3) = 36 \cdot 2 = 72$.

Ответ: 72.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \underbrace{99 \dots 9}_{20001} \Rightarrow n = 10^{20001} - 1 \Rightarrow n^3 = (10^{20001} - 1)^3 =$$

$$= 10^{60003} - 3 \cdot 10^{40002} + 3 \cdot 10^{20001} - 1 =$$

~~Докажем, что $n^3 < 10^{60003}$~~

$$= 10^{20001} (10^{40002} - 3 \cdot 10^{20001} + 3) - 1 =$$
$$= 10^{20001} (10^{20001} (10^{20001} - 3) + 3) - 1 =$$
$$= 10^{20001} (10^{20001} \cdot \underbrace{999 \dots 97}_{20000} + 3) - 1 =$$
$$= 10^{20001} (\underbrace{999 \dots 97}_{20000} \underbrace{00 \dots 0}_{20001} + 3) - 1 =$$
$$= 10^{20001} \cdot \underbrace{999 \dots 97}_{20000} \underbrace{00 \dots 0}_{20001} - 1 =$$
$$= \underbrace{999 \dots 97}_{20000} \underbrace{00 \dots 0}_{20000} \underbrace{300 \dots 0}_{20001} - 1 = \underbrace{99 \dots 97}_{20000} \underbrace{00 \dots 0}_{20000} \underbrace{299 \dots 9}_{20001}$$

$\Rightarrow$ в n^3 20000 + 20001 = 40001 девяток.

Ответ: 40001.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3.

Заметим, что $\angle AEB = \angle ADB = 90^\circ$
(т.к. D, E лежат на окр. с diam. AB)

Тогда по т. Пифагора для $\triangle AEB$:

$$AB^2 = AE^2 + BE^2 \Rightarrow AE^2 = AB^2 - BE^2 = 100 - 81 = 19.$$

Теперь заметим, что $\angle BAD = \angle BED$ (т.к. ABDE - впис.)

Рассмотрим два случая:

1) E лежит на отрезке DF. Тогда $\angle BAD = \angle BED$, т.к. ABDE - впис. Также $\angle AEF = 180^\circ - 90^\circ - \angle BED = 90^\circ - \angle BED = 90^\circ - \angle EAF$ (т.к. $\angle EAF + \angle AEF = 90^\circ$) $\Rightarrow \angle BED = \angle EAF \Rightarrow \angle BAE - \angle DAE = \angle DAF - \angle DAE \Rightarrow \angle BAE = \angle DAF \Rightarrow \triangle BAE \sim \triangle DAF$ (по 2 углам).

2) D лежит на отрезке EF.

Тогда $\angle BAD = \angle BED$ (т.к. ABDE - впис.)

$$\angle BAE = \angle BDE \text{ (BADE - впис.)}$$

$$\angle DAF = 90^\circ - \angle ADF = 90^\circ - (180^\circ - 90^\circ - \angle BDE) = \angle BDE = \angle BAE \Rightarrow$$

$$\triangle BAE \sim \triangle DAF.$$

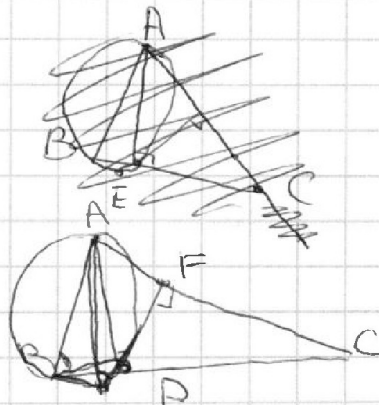
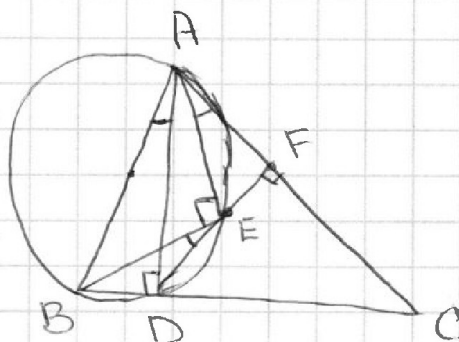
Значит в любом случае $\triangle BAE \sim \triangle DAF$ (E не лежит на отрезке ED, т.к. F лежит вне $\triangle ABD$).

3) F лежит на отрезке ED. $\angle ABE = \angle ADE \Rightarrow \triangle BAE \sim \triangle DAF$ (по 2 углам).

Значит в любом случае $\triangle BAE \sim \triangle DAF$. Пусть $AF = x$, тогда $FC = 20 - x$, тогда $FD^2 = AF \cdot FC = x(20 - x)$ (метриз. котк. в прямоуг. $\triangle$). Запишем подобие $\triangle BAE$ и $\triangle DAF$:

$$\frac{AF}{AE} = \frac{DF}{BE} \Rightarrow \frac{AF^2}{AE^2} = \frac{DF^2}{BE^2} \Rightarrow \frac{x^2}{19} = \frac{x(20-x)}{81} \Rightarrow 81x^2 = 19(20x - 19x^2) \Rightarrow 100x^2 - 19 \cdot 20x = 0 \Rightarrow x^2 - 3,8x = 0 \Rightarrow x(x - 3,8) = 0 \Rightarrow x = 3,8.$$

Ответ: 3,8.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4.

Пусть всего было n коробок. Тогда $\forall p$ подбора, если открыв. 5 короб.

вероят. подбора
какой-то открыв. 6 короб.

$\Downarrow$

увеличить в

$$= \frac{8 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3} \cdot \frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{(n-2)(n-3)(n-4)}$$

Ответ: при n коробках

$$\frac{C_n^2}{C_n^5} \leftarrow \begin{matrix} 3 \text{ коробки зафикс.}, 2 \text{ выдир.} \\ \text{всего вариантов} \end{matrix}$$

$$\frac{C_n^6}{C_n^3} = \frac{C_n^6}{C_n^3}$$

$$= \frac{\frac{n(n-1)\dots(n-5)}{6!}}{\frac{n(n-1)\dots(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{9!}} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}}$$

$$= \frac{42(n-2)(n-3)(n-4)}{5(n-6)(n-7)(n-8)}$$

$$\frac{42(n-2)(n-3)(n-4)}{5(n-6)(n-7)(n-8)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

* NS.

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + (a^2 - 6a + 4) = 0 \quad - \text{корни } a_6 \text{ и } a_7$$

$$5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - (2a^3 + 6a + 15) = 0 \quad - \text{корни } a_5 \text{ и } a_8$$

Заметим, что $a_6 + a_7 = a_5 + a_8$, т.к. $a_6 = a_1 + 5d$, $a_7 = a_1 + 6d$, $a_5 = a_1 + 4d$, $a_8 = a_1 + 7d \Rightarrow a_6 + a_7 = 2a_1 + 11d = a_5 + a_8$.

Но $a_6 + a_7 = a^2 - 4a$ по теореме Виета для 1 уравн и

$$a_5 + a_8 = \frac{a^3 - 4a^2}{5} \quad - \text{по теореме Виета для 2 уравн} \Rightarrow$$

$$a^2 - 4a = \frac{a^3 - 4a^2}{5} \Rightarrow a(a^2 - 4a) = 5(a^2 - 4a) \Rightarrow (a^2 - 4a)(a - 5) = 0$$

$$a(a-4)(a-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=4 \\ a=5 \end{cases}$$

1) $a=0 \quad x^2 - 0 \cdot x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4 = 0 \leftarrow \text{нет корней!}$

2) $a=4 \quad x^2 - 0 \cdot x + (16 - 24 + 4) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \quad \text{корни}$
 $5x^2 - 0 \cdot x - (2 \cdot 64 + 24 + 15) = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 167 = 0$

$0 \pm \sqrt{167} \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{167}{5}}, x_2 = -\sqrt{\frac{167}{5}}$
 $a_5 = a_1 + 4d = -22 + 16 = -6 \pm \sqrt{\frac{167}{5}}$
 $a_6 = a_1 + 5d = -22 + 20 = -2 \pm \sqrt{\frac{167}{5}}$
 $a_7 = a_1 + 6d = -22 + 24 = 2 \pm \sqrt{\frac{167}{5}}$
 $a_8 = a_1 + 7d = -22 + 28 = 6 \pm \sqrt{\frac{167}{5}}$

~~Tогда $a_6 = a_1 + 5d = -22 + 20 = -2 \pm \sqrt{\frac{167}{5}}$~~
 ~~$a_7 = a_1 + 6d = -22 + 24 = 2 \pm \sqrt{\frac{167}{5}}$~~
 ~~$a_8 = a_1 + 7d = -22 + 28 = 6 \pm \sqrt{\frac{167}{5}}$~~

2.2) $-2 = a_1 + 5d \Rightarrow d = -\frac{4}{5} \Rightarrow a_1 = -2 + \frac{8}{5}$
 $2 = a_1 + 6d \Rightarrow d = \frac{4}{5} \Rightarrow a_1 = 2 - \frac{8}{5}$

~~$a_5 = a_1 + 4d = -2 + \frac{8}{5} + 4 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -2 - \frac{16}{5} = -\frac{22}{5}$~~
 ~~$a_6 = a_1 + 5d = -2 + \frac{8}{5} + 5 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -2 - 4 = -6$~~
 ~~$a_7 = a_1 + 6d = -2 + \frac{8}{5} + 6 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -2 - \frac{20}{5} = -6$~~
 ~~$a_8 = a_1 + 7d = -2 + \frac{8}{5} + 7 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -2 - \frac{24}{5} = -\frac{28}{5}$~~

3) $a=5 \quad x^2 - 5x + 1 = 0 \rightarrow \text{корни } \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2} \text{ и } \frac{5 - \sqrt{29}}{2}$

$$5x^2 - 25x - (250 + 30 + 15) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 59 = 0 \rightarrow \text{корни}$$

Tогда если $a_1 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} \Rightarrow a_5 = a_1 + 4d = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} + 4 \cdot \frac{\sqrt{29}}{2} = \frac{5 + 3\sqrt{29}}{2}$
 $a_6 = a_1 + 5d = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} + 5 \cdot \frac{\sqrt{29}}{2} = \frac{5 + 4\sqrt{29}}{2}$
 $a_7 = a_1 + 6d = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} + 6 \cdot \frac{\sqrt{29}}{2} = \frac{5 + 5\sqrt{29}}{2}$
 $a_8 = a_1 + 7d = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} + 7 \cdot \frac{\sqrt{29}}{2} = \frac{5 + 6\sqrt{29}}{2}$

Ответ: $a=5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

Докажем, что фигура P — прямоугольник

с вершинами $(8\sqrt{3}; 16); (-8\sqrt{3}; 16);$

$(8\sqrt{3}; 24); (-8\sqrt{3}; 24):$

Рассмотрим 4 случая

1) $y \geq 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}, y \geq 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}$ (1 часть плоскости на рис.)

$$|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}| + |y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}| = y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} + y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} = 2y - 40 \leq 8$$

$y \leq 24 \Rightarrow$ в 1 области подходит закрашенная Δ .

2) $y \geq 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}, y \leq 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}$ (2 часть плоскости на рис.)

$$|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}| + |y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}| = 20 - y - \frac{x}{2\sqrt{3}} + y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{3}} \leq 8 \Rightarrow x \geq -8\sqrt{3} \Rightarrow \text{в 2 области подходит}$$

закраш. Δ

3) $y \leq 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}, y \leq 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}$ (3 часть плоск. на рис.)

$$|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}| + |y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}| = 20 - y - \frac{x}{2\sqrt{3}} + 20 - y + \frac{x}{2\sqrt{3}} =$$

$$= 40 - 2y \leq 8 \Rightarrow y \geq 16 \Rightarrow \text{в 3 области подходит закраш.}$$

Δ .

4) $y \geq 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}, y \leq 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}$ (4 часть плоск. на рис.)

$$|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}| + |y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}| = y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} + 20 - y + \frac{x}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{3}} \leq 8 \Rightarrow x \leq 8\sqrt{3} \Rightarrow \text{в 4 области подходит закраш. } \Delta.$$

Вкажит это уравнение действительно задаёт такой прямоугольник.

Тогда множество M является ~~такой фигурой~~ множеством которое ограничивается полукр.

с центром $(0,0)$ $R=16$ (где $x \leq 0$)





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

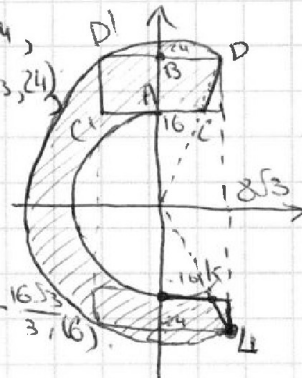
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 (продолжение)

дугой окружности с центром $(0,0)$ и $R=24$,
отрезками $(0,16)-(8\sqrt{3},16)$; $(8\sqrt{3},16)-(8\sqrt{3},24)$
 $(0,-16)-(8\sqrt{3},-16)$; $(8\sqrt{3},-16)-(8\sqrt{3},-24)$.



Т.к. пусть $D(8\sqrt{3}, 24)$, $A(0, 16)$,
 $B(0, 24)$, $C(\frac{16\sqrt{3}}{3}, 16)$. Тогда

Отрезок AB зашекает кольцо между окр. с унк. $(0,0)$
и $R=16$ и $R=24$, а и отрезок CD зашекает
кольцо между окр. с унк. $(0,0)$ и $R=\sqrt{(8\sqrt{3})^2+24^2}$ и
 $R=\sqrt{(\frac{16\sqrt{3}}{3})^2+16^2}$ (в левой полуокр. от CD)

$C'D'$ зашекает ~~то же~~ кольцо,
но в ^{лев.} полуокр. $C'D'$, но $\sqrt{(\frac{16\sqrt{3}}{3})^2+16^2} \geq 24$,

т.к. $16\sqrt{(\frac{1}{3})^2+1} < 24$, т.к. $2 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} < 3$, т.к. $4 < 3\sqrt{3}$, т.к.

$16 < 27$. $\Rightarrow$ вместе они зашекают область от CD до
 KL на рис. ($K = (\frac{16\sqrt{3}}{3}, -16)$, $L(8\sqrt{3}, -24)$). Оставшиеся
части зашекают конечное и начальное положение прями.

Получается ~~$S = \frac{1}{2}(\pi \cdot 24^2 - \pi \cdot 16^2) + 2 \cdot 64\sqrt{3}$~~

$$S = \frac{1}{2} (\pi \cdot (64 \cdot 3 + 24^2) - \pi \cdot 16^2) + 2 \cdot 64\sqrt{3} + 2 \cdot$$

$$+ \frac{\arctg \frac{\sqrt{3}}{3}}{\pi} \cdot (\pi (64 \cdot 3 + 24^2)) =$$

полукольцо
2 прямих.
образ. на ABD и
отраж. от ос. $y=0$.

$$= \frac{\pi}{2} \cdot 512 + 128\sqrt{3} + \arctg \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 768$$

Ответ: $256\pi + 128\sqrt{3} + 768 \arctg \frac{\sqrt{3}}{3}$.



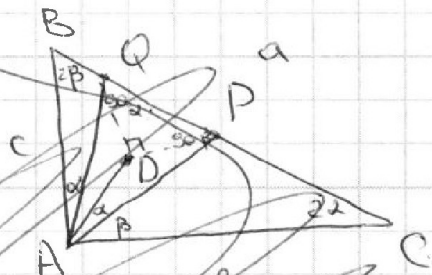
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

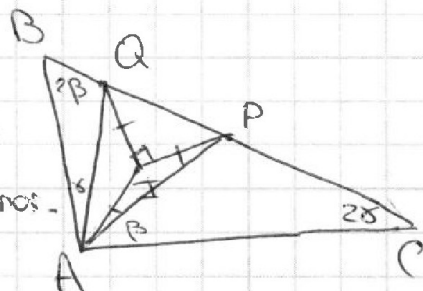
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $\angle ABC = 2\beta$, $\angle ACB = 2\alpha$,
Тогда $\angle QAC = \angle AQC = 90^\circ - \alpha$ (т.к.
 $\triangle AQC - \text{p/d}$), аналог. $\angle BAP = \angle APB =$
 $90^\circ - \beta$ (т.к. $\triangle ABP - \text{p/d}$). Тогда
 $\angle BAQ = 90^\circ - \angle QAC = \alpha$, а $\angle PAC = 90^\circ - \angle BAP = \beta$. Но $\alpha + 2\beta =$
 $90^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 45^\circ$. $\angle QAP = 90^\circ - \angle BAQ - \angle CAP =$



Пусть I - центр $\triangle ABC$,

тогда $\triangle ACI \cong \triangle QCI$ (по 2 стор.
 $CI = CI$, $AC = QC$, $\angle ACI = \angle QCI$
и углу между ними) $\Rightarrow AI = QI$, аналог.
 $\triangle ABI \cong \triangle PBI \Rightarrow AI = QI$. $\Rightarrow I$ -



центр описанной окр. $\triangle APQ$. Пусть $\angle ABC = 2\beta$, $\angle ACB =$
 $2\alpha \Rightarrow 2\beta + 2\alpha = 90^\circ \Rightarrow \beta + \alpha = 45^\circ$.

$\angle BAP = 90^\circ - \frac{\angle ABP}{2} = 90^\circ - \beta$ (т.к. $\triangle ABP - \text{p/d}$) $\Rightarrow$
 $\angle PAC = 90^\circ - \angle BAP = \beta$. Аналогично, $\angle QAC = 90^\circ - \frac{\angle ACQ}{2} =$

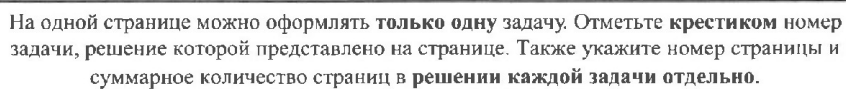
$90^\circ - \alpha$ (т.к. $\triangle ACQ - \text{p/d}$) $\Rightarrow \angle BAQ = 90^\circ - \angle QAC = \alpha \Rightarrow$

$\angle QAP = 90^\circ - \angle BAQ - \angle PAC = 90^\circ - \alpha - \beta = 45^\circ \Rightarrow$

$\angle QIP = 2\angle QAP = 90^\circ \Rightarrow I = H$ (т.к. I равнод.
тогда внутри $\triangle ABC$: $\angle QIP = 90^\circ$ и $PI = DI$ (перпен.

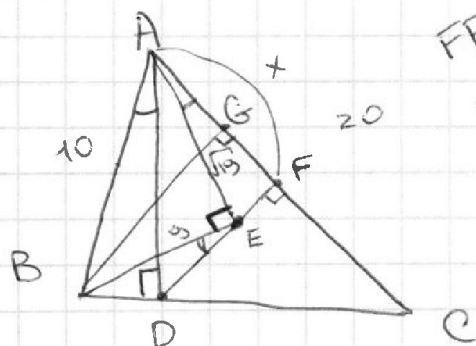
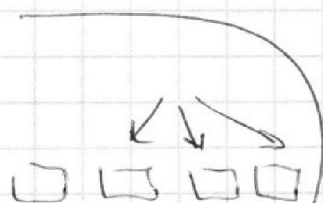
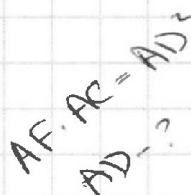
вер. пера к PQ и окр. с diam. PQ по той же
сторону от BC , что и A). Тогда $\angle DCB = \frac{\angle ACB}{2} =$
 $\frac{90^\circ - \angle CBA}{2} = \frac{44^\circ}{2} = 22^\circ$.

Ответ: 22° .



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$FE = \sqrt{19 - x^2}$$

$$FD \cdot FE = FA \cdot GF$$

$$\frac{GF}{BD} = \frac{FC}{CD}$$

$$\frac{FC \cdot BD}{CD} =$$

$$\frac{GF}{FD} = \frac{FC}{FO} \cdot \frac{BD}{DO} = \frac{DC}{AD} \cdot \frac{BD}{DO}$$

$$\frac{FE}{FA} = \frac{BD}{AD}$$

$$\frac{\sqrt{19}}{x} = \frac{9}{0.4}$$

$$\frac{\sqrt{19}}{x} = \frac{9}{\sqrt{x(20-x)}}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2} = \frac{10}{x(20-x)}$$

$$\frac{6!}{(n-6)(n-7)(n-8)} = 20x - 19x^2 = 81x^2$$

$$19.20x = 100x^2$$

$$19 = 5x \Rightarrow x = \frac{19}{5}$$

$$\frac{C_n^2}{C_n^{n-2}} \rightarrow \frac{C_6^6}{C_9^9}$$

~~n(n+1)~~

$$\frac{C_6^6}{C_9^9} = \frac{n(n-1)}{\dots}$$
$$\frac{C_7^2}{C_5^5}$$

$$\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~1.
 $xyz = z^3 - 6z^2 = x^3 - 6x^2 = y^3 - 6y^2$
 $x+y+z$

$$xy + yz + zx = 6$$

$$xy + yz + zx - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 36$$

$$36 - 12 \cdot 6 + 36 \cdot 3 =$$

$$= 36(1 - 2 + 3) = 2 \cdot 36 = 72.$$

~2.
 $n = \overbrace{99 \dots 9}^{20001} = 10^{20001} - 1$

$$n^3 = (10^{20001} - 1)^3 =$$

$$10^{60003} - 3 \cdot 10^{40002} + 3 \cdot 10^{20001} - 1 > 10^{60002}$$

$$3 \cdot 10^{40002} \rightarrow 3 \cdot 10^{20001} > 1$$

$$10^{20001} - 1 > 0 \checkmark$$

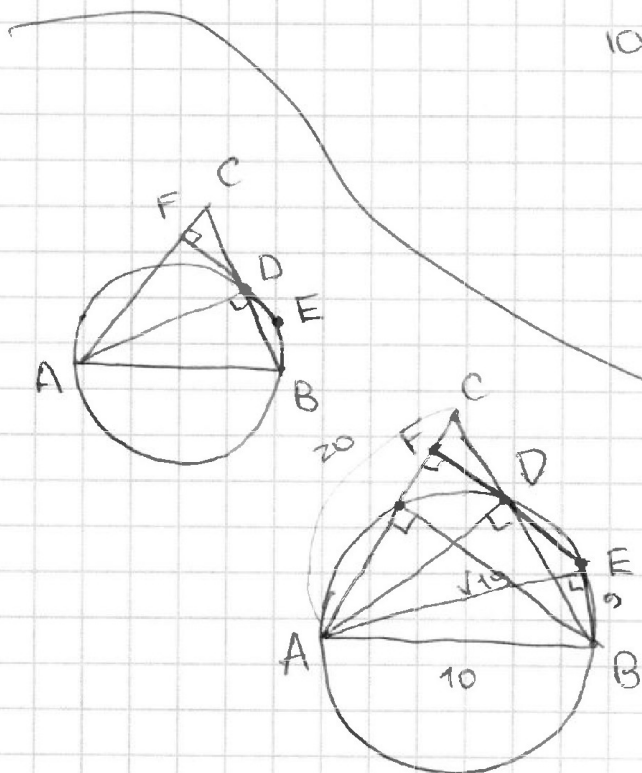
~~10^{20001}~~
 ~~$3 \cdot 10^{40002}$~~
 ~~10^{20001}~~
 ~~$3 \cdot 10^{40002}$~~
 ~~10^{20001}~~

$$3 \cdot 10^{20001}$$

$$10^{20001} - 3 > 10^{20000}$$

$$10^{20000} (10 - 1) > 3.$$

$$AE = \sqrt{19}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

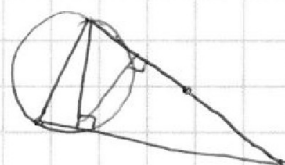
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{100...0}{60003} - \frac{30...0}{40002} + \frac{300...0}{20001} - 1$$

3 $5 \rightarrow 3$ $10^{20001} (10^{40002} -$

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + (a^2 - 6a + 4) = 0.$$

$$a_6 \quad a_7$$



$$5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - (2a^3 - 6a - 15) = 0.$$

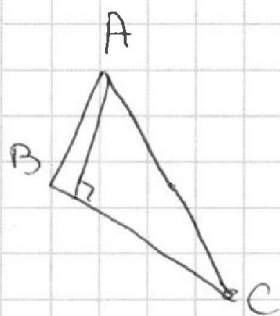
$$a_5 \quad a_8$$

$$a^2 - 4a = \frac{a^3 - 4a^2}{5} \rightarrow a = 0$$

$$5a - 4 = a^2 - 4a$$

$$a^2 - 9a + 4 = 0 \rightarrow a = 4, a = 5$$

$$(a-4)(a-5) = 0$$



$$|y-20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}| + |y-20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}| \leq 8$$

$$|y-x| + |y+x| \leq 8$$

$$1) y-20 \geq \frac{x}{2\sqrt{3}}, \quad y-20 \leq -\frac{x}{2\sqrt{3}}$$

$$2y-40 \leq 8 \quad y \leq 24$$

$$|x| \leq 2\sqrt{3}(y-20)$$

$$|y + \frac{x}{a}| + |y - ax| \leq 8$$

$$y \geq |ax|$$

$$-ax \geq y \geq ax \quad x \leq 0$$

$$-2ax \leq 8$$

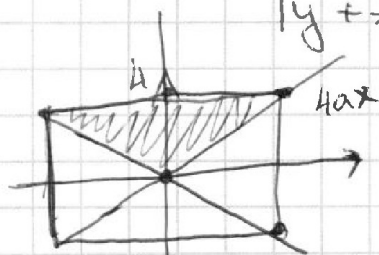
$$-ax \leq 4$$

$$0 \geq x \geq -\frac{4}{a}$$

$$ax \geq y \geq -ax \quad x \geq 0$$

$$2ax \leq 8 \quad x \leq \frac{4}{a}$$

$$\frac{4}{a} \geq x \geq 0$$



$$-|ax| > y \geq -4 \quad 2y \leq 8$$

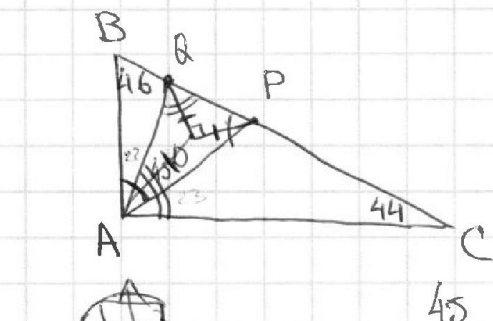


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

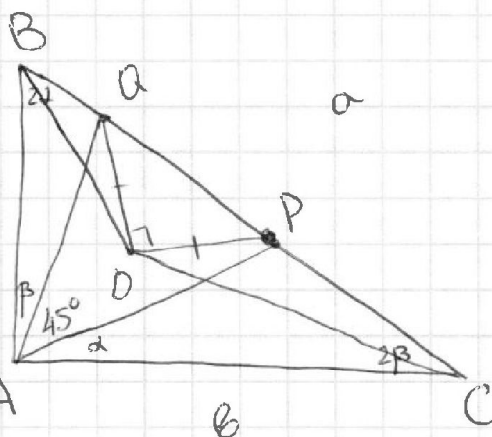


$$\frac{180-44}{2} = 90-22 = 68$$

$$\frac{180-46}{2} = 90-23 = 67$$



D - центр (APQ)



$$r = p - a = \frac{b+c-a}{2}$$

$$PQ = b+c-a$$

D - центр

$$a_6 = \frac{15 - \frac{11\sqrt{29}}{3} + \frac{5\sqrt{29}}{3}}{6} = \frac{15 + 10\sqrt{29}}{6}$$

$$a_1 = 4d$$

$$7d$$

$$\sqrt{29} = 3d$$

$$\frac{4\sqrt{29}}{3}$$

$$d = \frac{\sqrt{29}}{3}$$

$$a_1 = \frac{5+\sqrt{29}}{2} - \frac{4\sqrt{29}}{3} = \frac{15-5\sqrt{29}}{6}$$

$$\frac{\sqrt{29}}{3}$$

$$29$$

$$a_1 + \frac{4\sqrt{29}}{3} = \frac{5-\sqrt{29}}{2}$$

$$a_1 = \frac{15-3\sqrt{29}+2\sqrt{29}}{6} = \frac{15-11\sqrt{29}}{6}$$

$$\frac{853}{24} = \frac{53}{3} \cdot 128 + 64 = 192$$

$$576$$

$$192 + 576 = 768$$

$$128 + 24 = 152$$

$$512$$

$$3d = 4$$

$$d = \frac{4}{3}$$

$$d = -\frac{4}{3}$$

$$25 - 30 + 4$$

$$25 + 4 \cdot 59 = 25 + 200 + 36 = 261 = 9 \cdot 29$$

$$\frac{5-3\sqrt{29}}{2} = a_5 = a_1 + 4d$$

$$a_1 = \frac{5-11\sqrt{29}}{2}$$