



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Вычтем из первой строки вторую, тогда

$$xy - yz = z^2 - 2z - x^2 + 2x$$

$$(x-z)y = (z+x)(z-x) + 2(x-z)$$

$$(x-z)y = (x-z)(2-x-z)$$

Аналогично если вычтем из второй строки третью и из третьей первую

$$(y-x)z = (y-x)(2-y-x) - \text{из второй третьей}$$

$$(z-y)x = (z-y)(2-z-y) - \text{из третьей второй}$$

Если $x-z$, $y-x$, $z-y$ все равны 0, то $x=y=z$, тогда

$$xy = x^2 = z^2 - 2z = x^2 - 2x, \text{ что возможно только}$$

при $x=0$, что противоречит условию $\Rightarrow$ не все числа

одинаковы $\Rightarrow$ пусть $x \neq y$ (все вычитание взаимно и

мы можем значения менять между переменными и система все равно будет выполняться).

$$\text{Тогда } (y-x)z = (y-x)(2-x-y), y-x \neq 0 \Rightarrow z = 2-x-y \Rightarrow$$

$$x+y+z = 2. \text{ Тогда } (x-z)^2 + (y-z)^2 + (z-z)^2 = (2-x)^2 + (2-y)^2 + (2-z)^2 =$$

$$= (y+z)^2 + (x+z)^2 + (x+y)^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2zx.$$

$$\text{Также } (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = 2^2 = 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Также из системы $xy = -2z + z^2 \Rightarrow z^2 = xy + 2z$,
аналогично $y^2 = zx + 2y$, $x^2 = yz + 2x$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } 3((x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2) &= \\ &= 3(4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 6xy + 6yz + 6zx) = \\ &= 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 6xy + 6yz + 6zx + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \text{ (замена)} = \\ &= 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 6xy + 6yz + 6zx + 2(yz + 2x) + 2(zx + 2y) + 2(xy + 2z) = \\ &= 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 8xy + 8yz + 8zx + 4(x+y+z) = \\ &= 4(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx) + 4(x+y+z) = \\ &= 4(x+y+z)^2 + 4(x+y+z) = 4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 = 16 + 8 = 24 \Rightarrow \\ 3((x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2) &= 24 \Rightarrow (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = 8 \Rightarrow \\ (2-z)^2 + (2-x)^2 + (2-y)^2 &= 8 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 8. \end{aligned}$$

Ответ: 8.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

☐☒☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = (10^{30001} - 1)$$

$$n^3 = (10^{30001} - 1)^3 = 10^{90003} - 3 \cdot 10^{60002} + 3 \cdot 10^{30001} - 1$$

тогда это равно $10^{60002} (10^{30001} - 3) + 3 \cdot 10^{30001} - 1 \Rightarrow$

нам надо посчитать сколько девяток в числе

$10^{30001} - 3$ и $10^{30001} - 1$, так как число выглядит

как $(10^{30001} - 3) \underbrace{0 \dots 0}_{30000} (10^{30001} - 1)$, в числе

$10^{30001} - 3$ будет 30001 цифра, где все девятки кроме

последней ^(последняя 4) $\Rightarrow$ 30000 девяток. В числе $3 \cdot 10^{30001} - 1$

будет 30002 цифры где все кроме первой это девятки

(первая 2) $\Rightarrow$ 30001 девятка $\Rightarrow$ всего девяток $30001 + 30000 =$

$= 60001$.

Ответ: 60001.

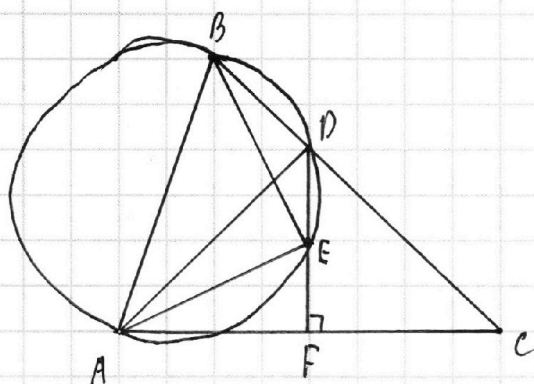


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



ABDE - вписанный
четырехугольник,
AB - диаметр $\Rightarrow \angle AEB = 90^\circ$,
т.к. опирается на диаметр.
AB = 8, BE = 6, по условию $\Rightarrow$
по теореме
 $AB^2 = BE^2 + AE^2 \Rightarrow$
 $64 = 36 + AE^2 \Rightarrow AE^2 = 28 \Rightarrow$
 $AE = \sqrt{28}$.

Пусть $\angle ABE = \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\angle ABE = \angle ADE$, так как в ABDE опираются на AE в
вписанном. $\angle ADE = \alpha$. $\angle ADB = 90^\circ$ т.к. опирается на диаметр
в вписанном четырехугольнике $\Rightarrow \angle ADC = 90^\circ \Rightarrow \angle FDC = 90 - \alpha$
 $\Rightarrow \angle FCD = \alpha$ (т.к. $\angle DFC = 90^\circ$ и $\Rightarrow \angle FDC + \angle FCD = 90^\circ$).

$\triangle ADC$ прямоугольный т.к. ($\angle ADC = 90^\circ$) $\Rightarrow AD = \sin \alpha \cdot AC =$
 $= 10 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{5\sqrt{7}}{2}$. $\triangle AFD$ прямоугольный т.к. ($\angle AFD = 90^\circ$) $\Rightarrow$

$AF = \sin \alpha \cdot AD = \frac{5\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{35}{8} = 4,375$.

* везде $\sin \alpha$ т.к. $\angle ADF = \alpha$ и $\angle ACD = \alpha$. ($\angle ACD = \angle FCD$),
($\angle ADF = \angle ADE$).



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Вероятность того, что он выиграет 5 коробок отлив. Пусть всего коробок n . Тогда шанс выиграть это вероятность достать 3 шарика пятого выбора (C_{n-3}^2 , т.е. 3 коробки где шары одинаковы и еще какие то 2) делено на количество вариантов выиграть 5 коробок (C_n^5). Аналогично для 4 это C_{n-3}^4 и C_n^7 . Тогда для 5 коробок вероятность

$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{\frac{(n-3)!}{2! \cdot (n-5)!}}{\frac{n!}{5! \cdot (n-5)!}} = \frac{(n-3)! \cdot 5!}{n! \cdot 2!}$$

Теперь посчитаем для 4 коробок

$$\frac{C_{n-3}^4}{C_n^7} = \frac{\frac{(n-3)!}{4! \cdot (n-7)!}}{\frac{n!}{7! \cdot (n-7)!}} = \frac{(n-3)! \cdot 7!}{n! \cdot 4!}$$

Теперь узнаем во сколько раз увеличилась вероятность

$$\frac{\frac{(n-3)! \cdot 7!}{n! \cdot 4!}}{\frac{(n-3)! \cdot 5!}{n! \cdot 2!}} = \frac{7! \cdot 2!}{4! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 2}{24} = \frac{7}{2} = 3,5$$

Ответ: увеличилась вероятность в 3,5 раза.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

с периодом k
Пусть шестой член арифм. прогрессии равен n , тогда корни $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 4 = 0$ будут равны n и $n+k$ и по Виету
 $n + (n+k) = \frac{a^2 - 2a}{1}$. Тогда корни
 $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ будут равны $n - 2k$ и $n + 3k \Rightarrow$
по Виету $n - 2k + n + 3k = \frac{a^3 - 2a^2}{3}$, тогда получается
(даем n на -1)
что $2a - a^2 = \frac{a^3 - 2a^2}{3} \Rightarrow \frac{2a^2 - a^3}{3} + a^2 - 2a = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{2a^2 + 3a^2 - a^3 - 6a}{3} = 0 \Rightarrow 5a^2 - a^3 - 6a = 0 \Rightarrow a^3 - 5a^2 + 6a = 0 \Rightarrow$

$a(a-3)(a-2) = 0$. Тогда $a \in \{0; 2; 3\}$. Проверим

$a = 0$, тогда $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 4 = x^2 - 4 \Rightarrow$ корни $\pm \sqrt{4}$.

$3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 3x^2 + 6 \Rightarrow$ корней нет. $\Rightarrow$ не арифм. прогрессия.

$a = 2$, тогда $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 4 = x^2 - 5 \Rightarrow x = \pm \sqrt{5}$

$x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 3x^2 - 28x + 6 \Rightarrow$ корни $\pm \frac{\sqrt{26}}{3}$, но

по арифм. прогрессии $-\sqrt{5}, \sqrt{5}, 3\sqrt{5}, 5\sqrt{5}$ и $5\sqrt{5} \neq \frac{\sqrt{26}}{3} \Rightarrow$ не подходит.

Значит $a = 3$. Проверим $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 4 = x^2 - 3x - 1$

корни $\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$, $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 3x^2 - 9x - 237 = x^2 - 3x - 79$

$D = 9 + 316 = 13 \cdot 5^2 \Rightarrow x = \frac{3 \pm 5\sqrt{13}}{2}$, заметим, что

$\frac{3 - 5\sqrt{13}}{2}, \frac{3 - 3\sqrt{13}}{2}, \frac{3 - \sqrt{13}}{2}, \frac{3 + \sqrt{13}}{2}, \frac{3 + 3\sqrt{13}}{2}, \frac{3 + 5\sqrt{13}}{2}$ арифм. прогрессия.

Ответ: 3.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

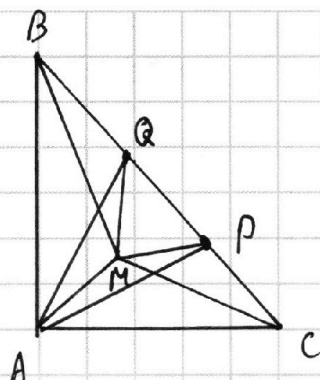
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5) \angle QMB = \angle B A Q \text{ из вписанности, } \angle B A Q = 90^\circ - \angle Q A C = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$$

$$6) \angle CMP = \angle CAP \text{ из вписанности } A M P Q C, \angle CAP = 90^\circ - \angle B A P = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$$

$$7) \angle BDC = 25^\circ + 20^\circ + 90^\circ = 135^\circ$$

Ответ: 135°



1) Пусть точка M - это пересечение всех биссектрис, тогда

$$\angle ABM = \angle MBC = 20^\circ, \angle ACM = \angle QCM = 25^\circ, \angle CAM = \angle BAM = 45^\circ.$$

$$2) AC = CQ \Rightarrow \angle CAQ = \angle CQA = \frac{180 - 50}{2} = 65^\circ \Rightarrow \angle QAM =$$

$$= 65^\circ - 45^\circ = 20^\circ \Rightarrow ABQM \text{ вписанный, так как}$$

$\angle MAQ = \angle MBQ = 20^\circ$ опирается на QM и BM биссектриса $\Rightarrow AM = MQ$ и также $\angle MQR = \angle BAM = 45^\circ$ из вписанности.

$$3) AB = BP \Rightarrow \angle BAP = \angle BPA = \frac{180 - 40}{2} = 70^\circ \Rightarrow \angle MAP =$$

$$= 70^\circ - 45^\circ = 25^\circ \Rightarrow AMPC - \text{вписанный четырехугольник т.к.}$$

$\angle MAP = \angle MCP = 25^\circ$ опирается на MP и CM биссектриса $\Rightarrow AM = MP$ и также $\angle MAC = \angle MPQ = 45^\circ$

из вписанности.

$$4) MQ = AM, MP = AM \Rightarrow \triangle MQP \text{ равн. } QM = MP \text{ и также } \angle$$

$$QMP = 180 - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ \Rightarrow M \text{ это и есть } D \text{ (такая}$$

$$\text{точка } D \text{ одна это очевидно)} \Rightarrow \angle BDC = \angle BMC = \angle QMB + \angle PMC + \angle QMP.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

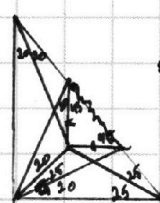
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} \times 29 \\ 891 \\ \hline 9801 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 9801 \\ 88209 \\ \hline 940299 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 9801 \\ 88209 \\ \hline 940299 \end{array}$$

②



$$(1000-1)^3 = 1000^3 - 3 \cdot 1000^2 + 3 \cdot 1000 - 1$$

$$(100-1)^3 = 1000000 - 300000 + 30000 - 1$$

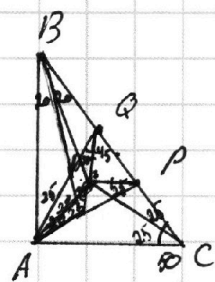
22

$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} \rightarrow \frac{C_{n-3}^4}{C_n^4}$$

$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{(n-3)!}{2! \cdot (n-5)!} \cdot \frac{1}{n!} = \frac{5! \cdot (n-5)! \cdot (n-3)!}{2! \cdot (n-5)! \cdot n!} = \frac{5! \cdot (n-3)!}{2! \cdot n!} = \frac{5! \cdot 4!}{2! \cdot 4!} = \frac{4!}{2 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{4!}{48}$$

$$\frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 4} = \frac{4}{2} = 2$$

④



$$\frac{C_{n-3}^4}{C_n^7} = \frac{(n-3)!}{4! \cdot (n-7)!} \cdot \frac{1}{n!} = \frac{(n-3)! \cdot 4!}{4! \cdot n!}$$

3,5 раза

$$\begin{cases} z^2 \cdot 2z = xy \\ x^2 - 2x = yz \\ y^2 x - 2y = 2x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 &= xy - yz = z^2 - x^2 + 2x - 2z \\ &= 2x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \\ xy + 2z &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x+y+z)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \\ y &= 2 - x - z \\ x + y + z &= 2 \end{aligned}$$

$$(z-1)^2 = xy + 1$$

$$(x-2)^2 = yz - 2x + 4$$

$$(x-1)^2 = yz + 1$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = xy + yz + zx - 2x - 2y - 2z + 12$$

$$(y-1)^2 = 2x + 1$$

$$(x-1)(y-1) + (y-1)(z-1) + (z-1)(x-1)$$

$$x^2 - 2x - yz = 0$$

$$\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$