



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

- ✓ 2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
- ✓ 3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
- ✓ 4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
- ✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
- ✗ 6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left| y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \right| + \left| y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 \\ yz = -6x + x^2 \\ zx = -6y + y^2 \end{cases} \Rightarrow y^2 + z^2 + x^2 - 6x - 6z - 6y = xy + xz + yz = 0$$

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 &= \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 36 \cdot 3 - 12x - 12y - 12z = \\ &= 0 + 36 \cdot 3 - 6x - 6y - 6z + xy + xz + yz \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

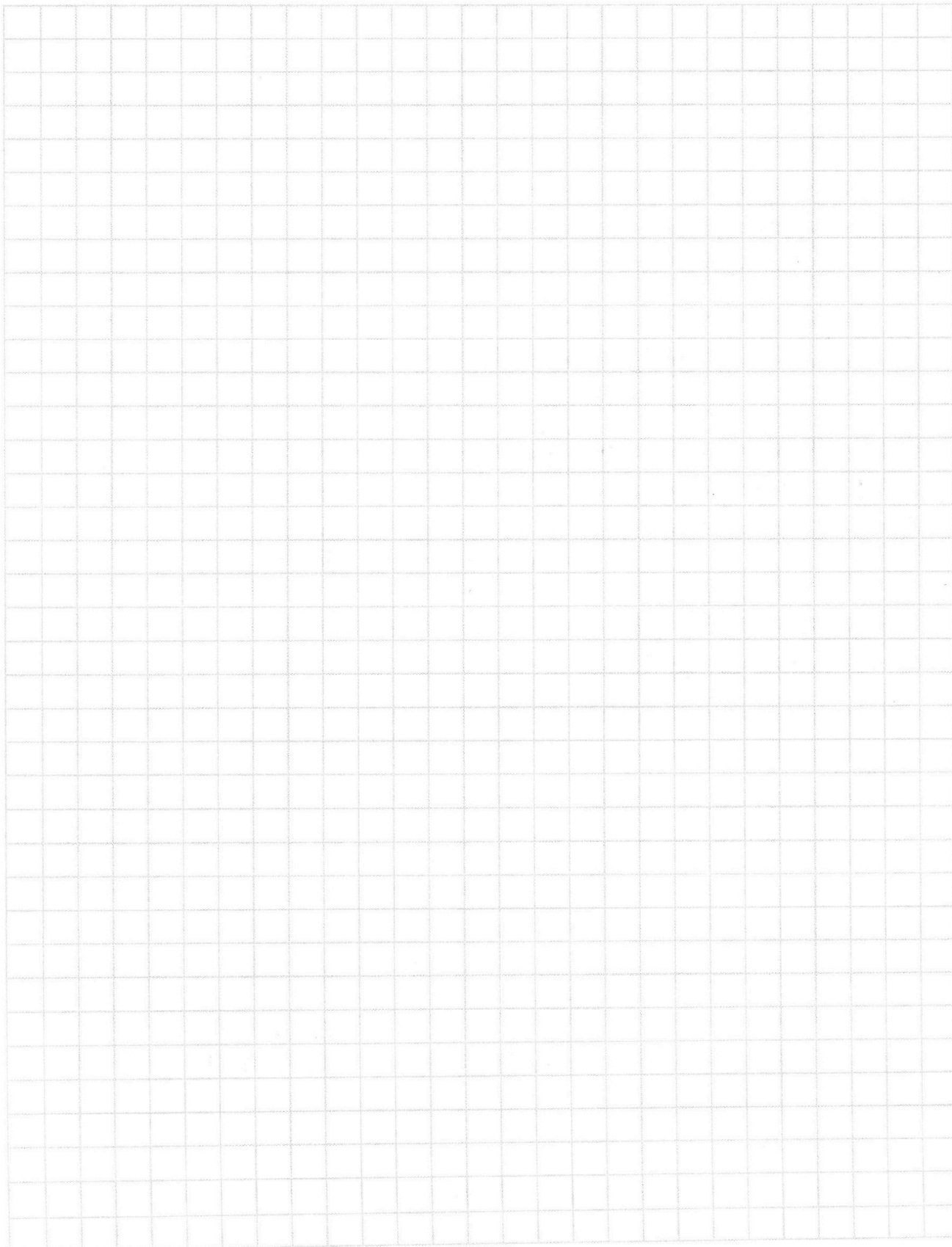
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



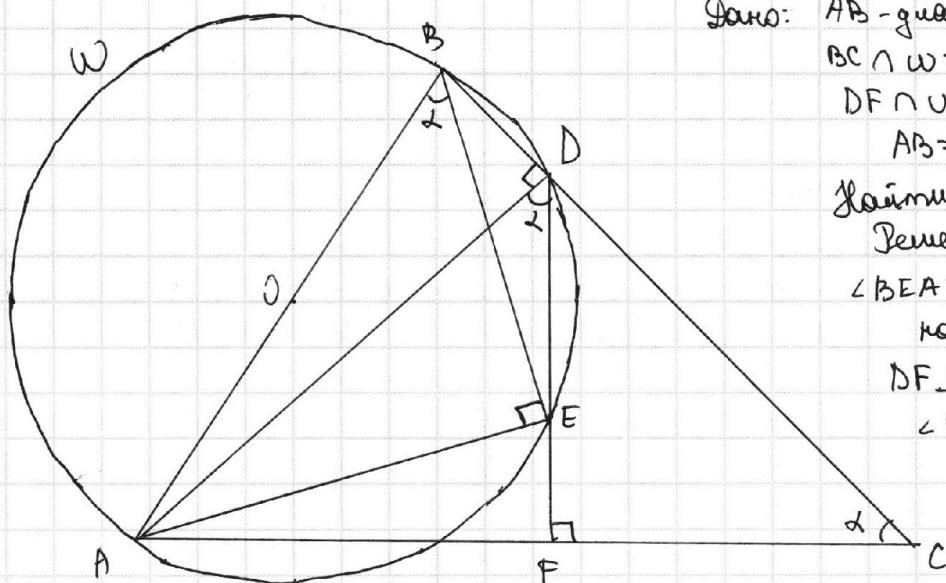


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: AB - диаметр окр. ω
 $BC \cap \omega = D$, $DF \perp AC$
 $DF \cap \omega = E$, $AC = 20$
 $AB = 10$, $AE = 9$

Найти: AF

Решение:

$\angle BEA = 90^\circ$, т.к. опирается на диаметр AB окр. ω
 $DF \perp AC \Rightarrow \angle DFA = \angle DFC = 90^\circ$
 $\angle BDA = 90^\circ$, т.к. опирается на диаметр AB окр. ω

$\angle ABE = \angle ADE = \alpha$ т.к. опираются на одну дугу ($\cup AE$)

$$\angle ADC = 180^\circ - \angle BDA = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

$$\angle FDC = \angle ADC - \angle ADF = 90^\circ - \alpha \quad \angle C = \angle DFC - \angle FDC = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$$

$$\triangle ABE - \text{н.у.}: AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{100 - 81} = \sqrt{19}$$

$\triangle ABE \sim \triangle ADF \sim \triangle DFC$ по трем углам (90° и α)

$$\triangle ABE \sim \triangle DCF \Rightarrow AB:BE:AE = DC:FC:DF = 10:9:\sqrt{19}$$

$$DC = 10x, FC = 9x, DF = \sqrt{19}x$$

$$\triangle ABE \sim \triangle ADF \Rightarrow AB:BE:AE = AD:DF:AF = 10:9:\sqrt{19}$$

$$AD = 10y, DF = 9y, AF = \sqrt{19}y$$

$$DF = \sqrt{19}x = 9y \Rightarrow y = \frac{\sqrt{19}x}{9}$$

$$\Rightarrow AF = \frac{\sqrt{19}x}{9} \cdot \sqrt{19} = \frac{x}{9}$$

$$AC = AF + FC = \frac{x}{9} + 9x = 9\frac{1}{9}x \quad AC = 20 \Rightarrow 9\frac{1}{9}x = 20$$

$$\frac{82}{9}x = 20 \Rightarrow \frac{41}{9}x = 10$$

$$\frac{41}{9}x = 10 \Rightarrow x = 10: \frac{41}{9} = \frac{90}{41}$$

$$AF = \frac{x}{9} = \frac{90}{41}:9 = \frac{10}{41}$$

$$\text{Ответ: } AF = \frac{10}{41}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

пусть всего n коробок

выбрать 3 из n вариантов: C_n^3

значит вер. выбрать любую тройку: $\frac{1}{C_n^3}$

дополнительно выбираются в первом случае 2 коробки, во втором в

$\left(1 - \frac{1}{C_n^3}\right)^2$ - выбор не тех двух

$\left(1 - \frac{1}{C_n^3}\right)^6$ - выбор не тех 6

$$1 - \frac{1}{C_n^3} = \frac{C_n^3 - 1}{C_n^3}$$

т.е. вероятность в первом случае

$$P_1 = \frac{1}{C_n^3} \cdot \left(\frac{C_n^3 - 1}{C_n^3}\right)^2 = \frac{(C_n^3 - 1)^2}{(C_n^3)^3}$$

во втором случае

$$P_2 = \frac{1}{C_n^3} \cdot \left(\frac{C_n^3 - 1}{C_n^3}\right)^6 = \frac{(C_n^3 - 1)^6}{(C_n^3)^7}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{(C_n^3 - 1)^6 \cdot (C_n^3)^3}{(C_n^3)^7 \cdot (C_n^3 - 1)^2} = \frac{(C_n^3 - 1)^4}{(C_n^3)^4} = \left(\frac{C_n^3 - 1}{C_n^3}\right)^4$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{C_n^3 - 1}{C_n^3}\right)^4$$

где n - общее
число коробок



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

пусть первый член прогрессии равен a , разность d
тогда шестой член прогрессии $n_6 = a + 5d$, седьмой $n_7 = a + 6d$
пятый $n_5 = a + 4d$, восьмой $n_8 = a + 7d$

n_6 и n_7 - корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$,

значит $n_6 + n_7 = \frac{a^2 - 4a}{2}$ - по т. Виета

при этом $n_6 + n_7 = a + 5d + a + 6d = 2a + 11d$

n_5 и n_8 - корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$

значит $n_5 + n_8 = \frac{a^3 - 4a^2}{10}$ - по т. Виета

при этом $n_5 + n_8 = a + 4d + a + 7d = 2a + 11d$

$$\begin{cases} n_6 + n_7 = \frac{a^2 - 4a}{2} \\ n_5 + n_8 = \frac{a^3 - 4a^2}{10} \\ n_6 + n_7 = n_5 + n_8 = 2a + 11d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 - 4a}{2} = \frac{a^3 - 4a^2}{10} \quad | \cdot 10$$

$$5a^2 - 20a = a^3 - 4a^2$$

$$a^3 - 9a^2 + 20a = 0$$

$$a(a^2 - 9a + 20) = 0$$

$$a^2 - 9a + 20 = 0$$

$$D = 81 - 4 \cdot 20 = 1$$

$$a = \frac{9 \pm 1}{2}$$

$$\begin{cases} a = 4 \\ a = 5 \end{cases}$$

$$a(a-4)(a-5) = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 & ① \\ a = 4 & ② \\ a = 5 & ③ \end{cases}$$

корни уравнений могут образовывать арифметическую прогрессию, но не в этом случае

① $a = 0$

$$x^2 - (0 - 4 \cdot 0)x + 0 - 6 \cdot 0 + 4 = 0$$

$$x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = -4$$

но $x^2 \geq 0$, значит $x^2 + 4 = 0$ не имеет решений

в действительных числах

значит $a = 0$ не подходит

② $a = 4$

$$x^2 - (16 - 16)x + 16 - 24 + 4 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$5x^2 - (64 - 64)x - 2 \cdot 64 - 24 - 15 = 0$$

$$5x^2 - 128 - 39 = 0$$

$$5x^2 - 167 = 0$$

$$5x^2 = 167$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{167}{5}}$$

$$|x_1 - x_2| = 4 \Rightarrow |d| = 4, \text{ т.к. } |n_6 - n_7| = |d|$$

$$|x_3 - x_4| = 2\sqrt{\frac{167}{5}} \Rightarrow |d| = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{167}{5}}$$

$$\text{т.к. } |n_5 - n_8| = |3d|$$

$$4 \neq \frac{2}{3}\sqrt{\frac{167}{5}} \Rightarrow$$

$a = 4$ не подходит

③ $a = 5$

$$x^2 - (25 - 20)x + 25 - 30 + 4 = 0$$

$$x^2 - 5x - 1 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$D = 25 + 4 = 29$$

$$5x^2 - (125 - 100)x - 250 - 30 - 15 = 0$$

$$5x^2 - 25x - 295 = 0$$

$$x^2 - 5x - 59 = 0$$

$$D = 25 + 4 \cdot 59 = 25 + 236 = 261 = 9 \cdot 29$$

$$x = \frac{5 \pm 3\sqrt{29}}{2}$$

$$|x_1 - x_2| = |n_6 - n_7| = \left| \frac{5 + \sqrt{29}}{2} - \frac{5 - \sqrt{29}}{2} \right| = \sqrt{29} = |d|$$

$$|x_3 - x_4| = |n_5 - n_8| = \left| \frac{5 + 3\sqrt{29}}{2} - \frac{5 - 3\sqrt{29}}{2} \right| = 3\sqrt{29} = |3d|$$

$$\sqrt{29} = \frac{3\sqrt{29}}{3} \Rightarrow \text{подходит}$$

прогрессия имеет вид

5-ый

6-ый

7-ый

8-ый

$$\frac{5 - 3\sqrt{29}}{2}$$

$$\frac{5 - \sqrt{29}}{2}$$

$$\frac{5 + \sqrt{29}}{2}$$

$$\frac{5 + 3\sqrt{29}}{2}$$

$$\frac{5 + 3\sqrt{29}}{2}$$

$$\frac{5 + \sqrt{29}}{2}$$

$$\frac{5 - \sqrt{29}}{2}$$

$$\frac{5 - 3\sqrt{29}}{2}$$

Ответ: $a = 5$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

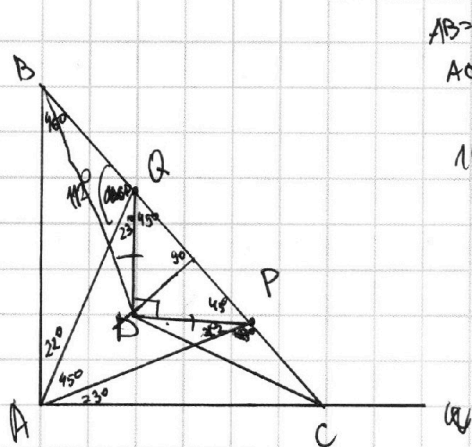
5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = BP$$

$$AC = CQ$$

$$180 - 68 = 112$$

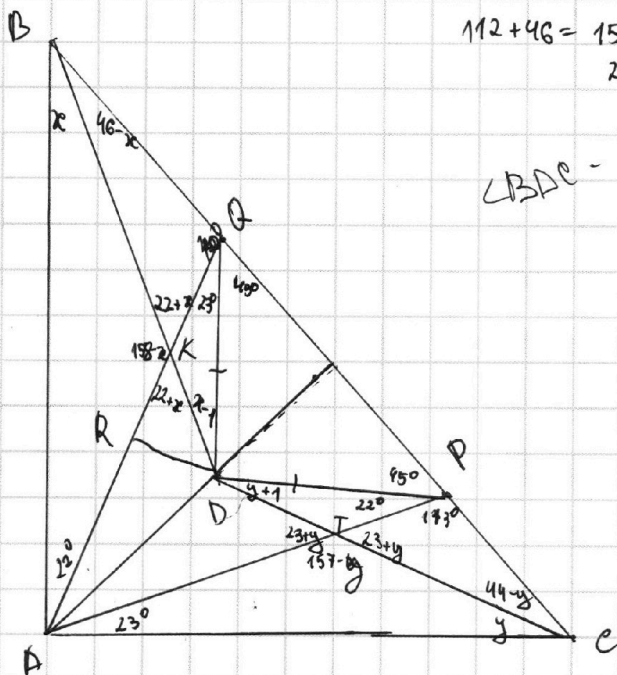
$$\frac{180 - 46}{2} = \frac{134}{2} = 67$$

$$67 - 45 = 22$$

$$\angle DPA = 22^\circ$$

$$\frac{180 - 44}{2} = \frac{136}{2} = 68$$

$$68 - 45 = 23$$



$$112 + 46 = 158$$

$$22$$

$$\angle BDC = ? = 270^\circ - x - y$$

$$90^\circ + x + y$$

$$x = 23^\circ \quad y = 22^\circ$$

$\triangle ADP$ - вписанный

$$\angle DCB = \angle DPA = 22^\circ$$

$$\text{Ответ: } \angle DCB = 22^\circ$$

$\triangle QKD = \triangle DTP$ по двум сторонам и углу между ними

$$QK = DI, \quad QD = DP, \quad y + 1 = 23^\circ$$

BD и CD - биссектрисы

т.к. CR - высота $\triangle ABC$ равнобедренного



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

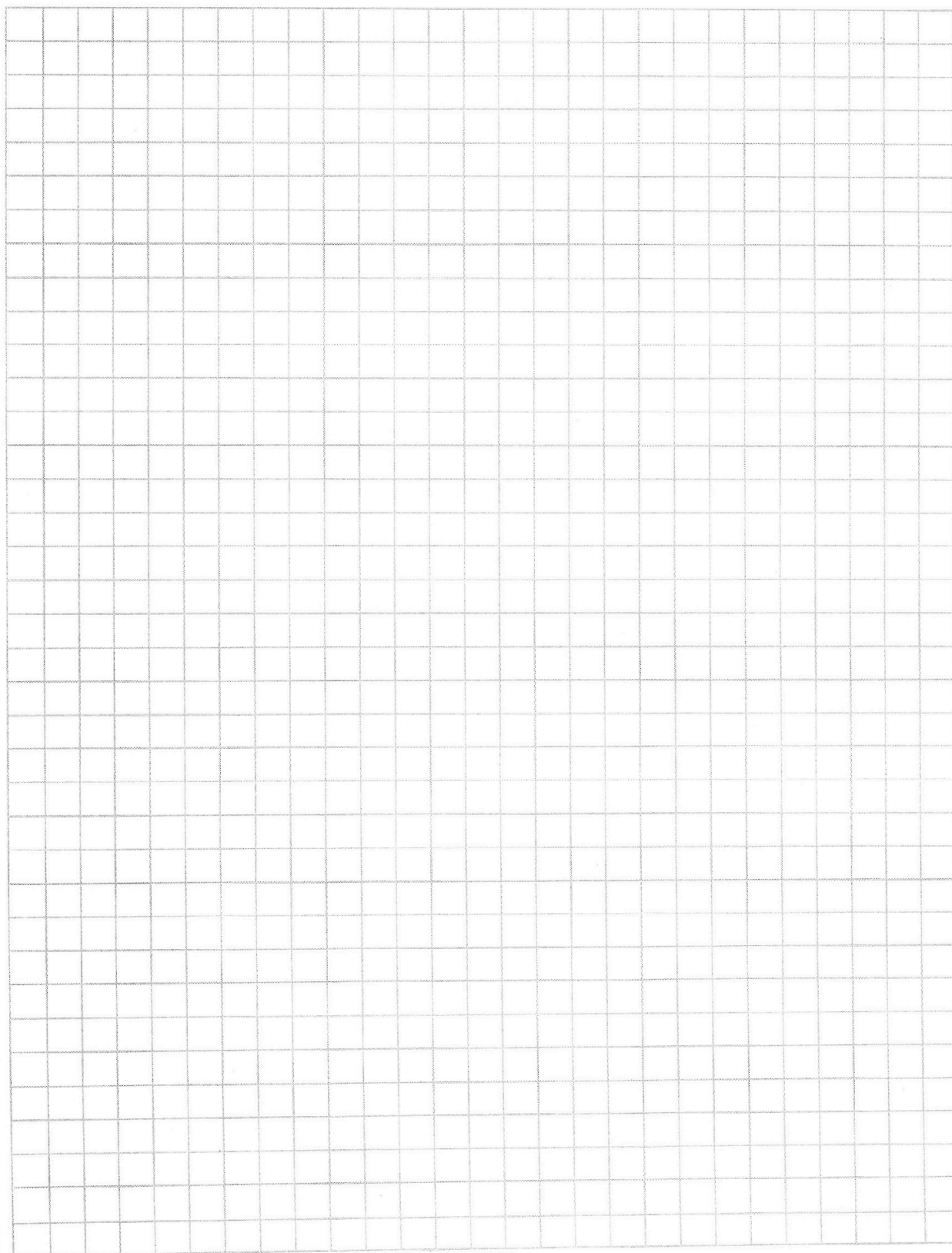
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

было n коробок

вероятность 1-ого

$\frac{3}{n}$

$$1 - \left(\frac{3}{n} \left(\frac{n-3}{n-1} \right)^4 \right) < \left(\frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \right)$$

C_n^3

$$C_n^3 = \frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{12} \quad C_n^5 = \frac{n!}{5!(n-5)!}$$

$$\frac{1}{C_n^3} = \frac{12}{n(n-1)(n-2)}$$

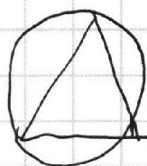
вероятность
нулевой трёх

+ 2 нулевые

$$C_{n-3}^2 = \frac{(n-3)!}{(n-5)! \cdot 2} = \frac{(n-3)(n-4)}{2}$$

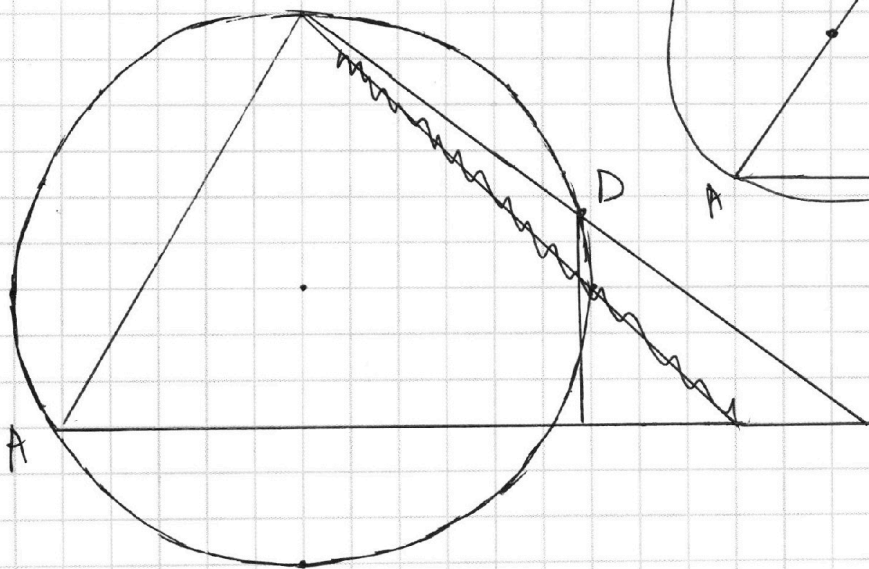
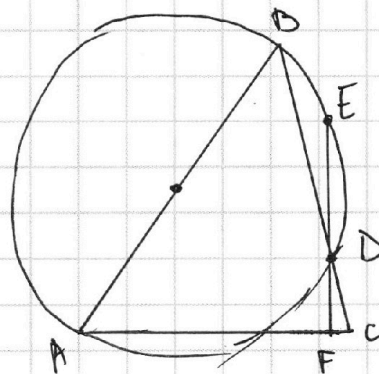
+ 6 нулевых

$$C_{n-5}^6 = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{6!}$$



$$\frac{1}{C_n^3} \cdot \left(\frac{C_n^3 - 1}{C_n^3} \right)^2$$
$$\frac{1}{C_n^3} \cdot \left(\frac{C_n^3 - 1}{C_n^3} \right)^6$$
$$\frac{(C_n^3 - 1)^4}{(C_n^3)^5}$$

$$\frac{1 \cdot (C_n^3 - 1)^2 \cdot (C_n^3)^2}{(C_n^3)^5 \cdot (C_n^3 - 1)^6} = \frac{(C_n^3)^4}{(C_n^3 - 1)^4}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$$

$$6-a \quad \text{и} \quad 2-a$$

$$a + 5d + a + 6d = 2a + 11d = \frac{-6}{2a} = \frac{a^2 - 4a}{2}$$

$$5x^2(a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$$

$$5-a \quad \text{и} \quad 8-a$$

$$a + 4d + a + 7d = 2a + 11d = \frac{-6}{2a} = \frac{a^3 - 4a^2}{10}$$

$$\frac{a^2 - 4a}{2} = \frac{a^3 - 4a^2}{10}$$

$$5a^2 - 20a = a^3 - 4a^2$$

$$a^3 - 9a^2 + 20a = 0$$

$$a(a^2 - 9a + 20) = 0$$

$$D = 81 - 4 \cdot 20 = 1$$

$$(a^2 - 4a)^2 - 4(a^2 - 6a + 4) \geq 0$$

$$a^4 - 8a^3 + 16a^2 - 4a^2 + 24a - 16 \geq 0$$

$$(a^3 - 4a^2)^2 + 20(2a^3 + 6a + 15) > 0$$

$$a^6 - 8a^5 + 16a^4 + 240a^3 + 120a + 300 > 0$$

$$a = 0 \quad x^2 + 4 = 0$$

$$(a+5d)(a+6d) = a^2 + 30d^2 + 11ad$$

$$(a+4d)(a+7d) =$$

$$a^2 - 9a^2 + 20a = 0$$

$$D = 81 - 80 = 1$$

$$a = \frac{9 \pm 1}{2} \quad \begin{cases} a=0 \\ a=5 \\ a=4 \end{cases}$$

$$a^4 - 8a^3 + 16a^2 - 4a^2 + 24a - 16 \geq 0$$

$$a=2$$

$$16 - 8 \cdot 8 + 16 \cdot 4 + 16 + 4 - 16$$

$$a=0 \quad x$$

$$a=4$$

$$2^8 - 2^9 + 3 \cdot 2^6 + 2^3 - 2^4 \quad 4^3 = 2^6$$

$$-2^8 \quad 2^7 + 2^6 \quad -2^3$$

$$-2^7$$

$$-2^3$$

$$-2^3$$

$$x^2 + 16 - 24 + 4 = x^2 - 4$$

$$\begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$5x^2 - (64 - 64)x - 2 \cdot 2^6 - 24 - 15 =$$

$$a=5$$

$$x^2 - 5x + 25 - 30 + 4 = 0$$

$$x^2 - 5x - 1 = 0$$

$$D = 25 + 4 = 29$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$-261 \mid 9$$

$$-81$$

$$-6$$

$$x = \frac{59}{5}$$

$$= 5x^2 - 128 - 39$$

$$5x^2 - 167$$

$$x^2 = \frac{167}{5} \quad x$$

$$x = \frac{5 \pm 3\sqrt{29}}{2}$$

$$5x^2 - 25x - 250 - 30 - 15$$

$$5x^2 - 25x - 295$$

$$x^2 - 5x - 59 = 0$$

$$D = 25 + 4 \cdot 59 = 25 + 236 = 261 = (3\sqrt{29})^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 899999 \\ \times 899999 \\ \hline 8999991 \\ 8999991 \\ 8999991 \\ 8999991 \\ 8999991 \\ \hline 91 \\ \hline 980001 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8999 \\ \times 8999 \\ \hline 89991 \\ 89991 \\ 89991 \\ 89991 \\ \hline 999901 \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 899999 \\ \times 899999 \\ \hline 8999991 \\ 8999991 \\ 8999991 \\ 8999991 \\ 8999991 \\ 8999991 \\ \hline 99999981 \\ 1234554321 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8999998000001 \\ \times 899999 \\ \hline 89999982000009 \end{array}$$

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 \\ yz = -6x + x^2 \\ zx = -6y + y^2 \end{cases}$$

$$z(z-6) = xy$$

$$z-6 = \frac{xy}{z}$$

$$x-6 = \frac{yz}{x}$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 36 \cdot 3 - 12x - 12y - 12z$$

$$z^2 + x^2 + y^2 - 6x - 6y - 6z - xy - yz - zx = 0$$

$$36 = -36 + 36$$

$$= 36 \cdot 3 - 6x - 6y - 6z + xy + yz + zx$$

$$(z-6)^2 = \frac{x^2 y^2}{z^2}$$

$$\frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{x^2 z^2}{y^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2} = 36 \cdot 3 (6x + 6y - xy)$$

$$-6x + 6y + xy$$

$$x(y-6) - 6y =$$

$$= x(y-6) - 6(y-6) = (x-6)(y-6) + 36$$

$$x(6-y) + 6(6-y)$$

$$\frac{x^2 y^2}{z^2} = 729$$

$$xy + yz + zx + 36 \cdot 3 - 6x - 6y - 6z$$

$$y^2 - 6y - zx = 0$$

$$\frac{y^2}{4} = 9 + zx \geq 0$$

$$9 + xy \geq 0$$

$$9 + yz \geq 0$$

$$zx \geq 9$$

$$xy \geq 9$$

$$yz \geq 9$$

$$\Rightarrow 2x + y + yz \geq -27$$

$$x^2 y^2 z^2 \geq 9^3 = 729$$

$$\frac{x^4 y^4 + x^4 z^4}{2} \geq \sqrt{\quad} = x^4 y^2 z^2$$

$$\frac{x^4 y^4 + x^4 z^4 + y^4 z^4}{x^2 y^2 z^2} \geq x^2 + y^2 + z^2 = 6z + xy + 6x + y + 6y + zx =$$

$$\begin{array}{r} 89 \\ \times 89 \\ \hline 891 \\ 891 \\ \hline 9801 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 899 \\ \times 899 \\ \hline 8991 \\ 8991 \\ 8991 \\ \hline 998001 \\ 1221 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8999 \\ \times 8999 \\ \hline 89991 \\ 89991 \\ 89991 \\ 89991 \\ \hline 99980001 \\ 123321 \end{array}$$

$$10n - 9 + 1 - 2$$

$$\begin{array}{r} 998001 \\ \times 999 \\ \hline 998009 \\ 998009 \\ 998009 \\ \hline 997002999 \\ 997002999 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9801 \\ \times 99 \\ \hline 9809 \\ 9809 \\ \hline 970299 \\ 970299 \end{array}$$