



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 & (1) \\ yz = 4x + x^2 & (2) \\ zx = 4y + y^2 & (3) \end{cases}$$

№ 1.

~~Или (1)+(2): $xy + yz = 4$~~

Или (2)-(1): $yz - yx = 4(x - z) + x^2 - z^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -y(x - z) = 4(x - z) + (x - z)(x + z) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x - z)(4 + x + y + z) = 0.$$

Или (3)-(1) аналогично, $(y - z)(4 + x + y + z) = 0.$

Если $x + y + z + 4 \neq 0$, то $x = z$ и $y = z \Rightarrow x = y = z \Rightarrow$

$$\Rightarrow xy = 4z + z^2 \rightarrow x^2 = 4x + x^2 \rightarrow 4x = 0 \rightarrow x = 0 !!!$$

(x ≠ 0)

Значит, $x + y + z = -4 \Rightarrow (x + y + z)^2 = 16$

(*) $x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 16.$

Или (1)+(2)+(3), $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = -4(x + y + z)$

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx) = 32, \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 16 (*) \end{cases} \quad (*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(x^2 + y^2 + z^2) = 48 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 16. (**)$$

Рассмотрим $(x + 4)^2 + (y + 4)^2 + (z + 4)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 8(x + y + z) + 48 =$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - 32 + 48 = x^2 + y^2 + z^2 + 16 =$$

$$= 16 + 16 (***) = 32 - \text{решение есть по условию.}$$

Ответ: 32



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 2.

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\underbrace{999\dots9}_{25000}^3 = \left(\underbrace{100\dots0}_{25000} - \underbrace{1}_{25000} \right)^3 = \underbrace{100\dots0^3}_{25000} - 3 \cdot \underbrace{10\dots0^2}_{25000} + \underbrace{300\dots0}_{25000} - \underbrace{1}_{25000} =$$

$$= \underbrace{100\dots0}_{75000} - 3 \underbrace{00\dots0}_{50000} + \underbrace{30\dots0}_{25000} - 1 =$$

$$= \underbrace{99\dots9}_{24999} \underbrace{70\dots0}_{50000} + \underbrace{300\dots0}_{25000} - 1 = \underbrace{99\dots9}_{24999} \underbrace{70\dots0}_{24999} \underbrace{30\dots0}_{25000} - 1 =$$

$$= \underbrace{99\dots9}_{24999} \underbrace{700\dots0}_{24999} \underbrace{2}_{25000} \underbrace{99\dots9}_{25000}.$$

Итого, увеличив в числе $\underbrace{99\dots9}_{25000}^3$ равно $25000 + 24999 = 49999$

Ответ: 49999

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

$\triangle ABC$ — остр. ω на AB — дуга

на дуге ω

$\omega \cap BC = D$

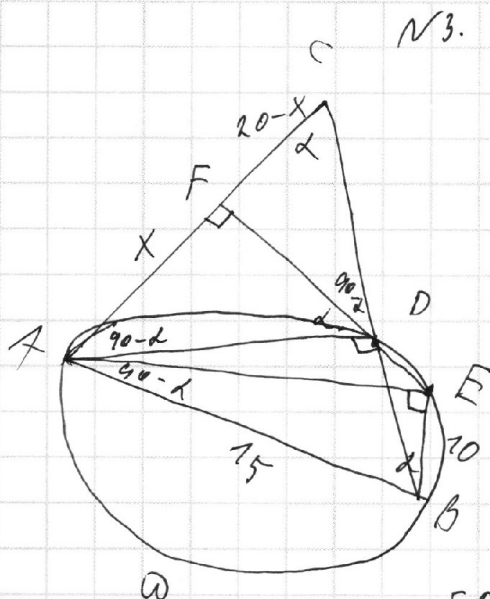
$DF \perp AC$,
 $DF \cap \omega = E$

$AB = 15$

$AC = 20$

$BE = 10$

$AF = ?$



N3.

Решение:

AB — дуга $\omega \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ADB = \angle AEB = 90^\circ$

$\left. \begin{array}{l} AF = x \Rightarrow FC = 20 - x. \\ \angle C = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \angle FDC = 90 - \alpha.$

$\Rightarrow \angle FDC = 90 - \alpha.$

$\angle FDC = \angle BDE$ (вертикал.) $= 90 - \alpha.$

$\angle BDE = \angle EAB = 90 - \alpha$ (опираются на дугу

BE) $\Rightarrow \angle ABE = \alpha \Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle CFD$ (по 2-м

углам. $\Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{BE}{FC} = \frac{AE}{FD}$. (*)

$\triangle AFD \sim \triangle CFD$ ($\angle ADC = 90^\circ \Rightarrow \angle FDA = \alpha$). $\Rightarrow \frac{FD}{AF} = \frac{FC}{FD} \Rightarrow$

$\Rightarrow FD^2 = AF \cdot FC = x(20 - x) = 20x - x^2.$

$\triangle AFD: AD^2 = AF^2 + FD^2 = x^2 + 20x - x^2 = 20x.$

$\triangle ADC: CD^2 = AC^2 - AD^2 = 400 - 20x.$

из (*), $\frac{AB}{BE} = \frac{CD}{FC}$, $\frac{15}{10} = \frac{\sqrt{400 - 20x}}{20 - x}.$

$1,5(20 - x) = \sqrt{400 - 20x}$

$30 - 1,5x = \sqrt{400 - 20x}$

$(30 - 1,5x)^2 = 400 - 20x;$ $900 - 90x + 2,25x^2 = 400 - 20x;$

$2,25x^2 - 70x + 500 = 0.$

$400 - 20x \geq 0 \quad x \leq 20.$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$0,45x^2 - 14x + 180 = 0.$$

$$D = 196 - 180 = 16 = 4^2$$

$$x_1 = \frac{14 - 4}{0,9} = \frac{10}{0,9} = \frac{100}{9} = 11,11$$

$$x_2 = \frac{14 + 4}{0,9} = \frac{18}{0,9} = \frac{180}{9} = 20 !!! (\Rightarrow) D \perp AC \Rightarrow \angle ACB =$$

$\approx 90^\circ$, а т.к. и окруж-

ность).

Ответ: $11\frac{1}{9}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 4.

Будем говорить, что сначала игрок выбирает коробку, а затем ведущий случайным образом кладёт шарик. Вероятность выигрыша от этого не меняется. Тогда, необходимо, чтобы ведущий, все 3 раза положил шарик, все их положил в выбранные игроком коробки. Т.е., если игрок берёт на выбор x коробок, а всего коробок n , вероятность ведущего положить шарик в одну из x : $\frac{x}{n}$, второй шарик $\frac{x-1}{n-1}$, третий шарик $\frac{x-2}{n-2}$. Т.е. вероятность победы игрока равна $\frac{x}{n} \cdot \frac{x-1}{n-1} \cdot \frac{x-2}{n-2}$.

Тогда, в первом случае вероятность равна

$$\frac{5}{n} \cdot \frac{4}{n-1} \cdot \frac{3}{n-2} = \frac{60}{n(n-1)(n-2)}, \text{ а во втором } \frac{6}{n} \cdot \frac{5}{n-1} \cdot \frac{4}{n-2} = \frac{336}{n(n-1)(n-2)}.$$

Тогда вероятность увеличилась в

$$\frac{336}{n(n-1)(n-2)} : \frac{60}{n(n-1)(n-2)} = \frac{336}{60} = \frac{56}{10} = 5,6 \text{ раза.}$$

Ответ: 5,6.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5.

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2 - a^3}{3} = 0.$$

По П. Виета, $\begin{cases} x_1 x_2 = \frac{2 - a^3}{3}, \\ x_1 + x_2 = a^2 - a \end{cases}$

При этом если арифм. прогр.

решая в + Кд, то

$$x_1 + x_2 = 2b + 9d = a^2 - a$$

$$x_1 = b + 4d$$

$$x_2 = b + 5d.$$

$$2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0.$$

По П. Виета, $\begin{cases} x_3 x_4 = \frac{-2a^6 - 8a - 4}{2}, \\ x_3 + x_4 = \frac{a^3 - a^2}{2} \end{cases}$

$$x_3 = b + 2d$$

$$x_4 = b + 7d$$

Тогда, $2b + 9d = x_3 + x_4 = \frac{a^3 - a^2}{2} \Rightarrow a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{2};$

$$2a^2 - 2a = a^3 - a^2$$

$$3a^2 = a^3 + 2a \Rightarrow \cancel{a^3 + 2a - 3a^2 = 0} \Rightarrow \cancel{a^3 + 2a - 3a^2 = 0}$$

$$a^3 + 2a - 3a^2 = 0 \Rightarrow a(a^2 - 3a + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a^2 - 3a + 2 = 0. \end{cases}$$

1) $a = 0 \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{2 - 0}{3}$, то $x_1 x_2 = (b + 4d)(b + 5d) = b^2 + 9bd + 20d^2$, (*)

$(b + 2d)(b + 7d) = x_3 x_4 = \frac{-0 - 0 - 4}{2} = -2.$

$b^2 + 9bd + 14d^2 = -2$ (**)

$b^2 + 9bd + 20d^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow b^2 = \frac{2}{3}, bd^2 = \frac{8}{3}; d^2 = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}; d = \pm \frac{2}{3}.$

$b^2 + 9bd + 14d^2 = -2$, то если $a = 0$, то $x^2 + \frac{2}{3} = 0$ не имеет решений $\Rightarrow$ нет корней!!!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 5

$$2) a^2 - 3a + 2 = 0.$$

$$\begin{cases} a_1 a_2 = 2 \\ a_1 + a_2 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 2, \\ a = 1 \end{cases}$$

$$2.1) a = 1. \Rightarrow x^2 - (1^2 - 1)x + \frac{2 - 1^3}{3} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + \frac{1}{3} = 0 \text{ не имеет решений.}!!!$$

$$2.2) a = 2 \Rightarrow x^2 - (4 - 2)x + \frac{2 - 8}{3} = 0;$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0.$$

$$D = 4 + 8 = 12.$$

$$x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}; \quad x_2 = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}$$

$$2x^2 - (8 - 4)x - 2 \cdot 2^6 - 8 \cdot 2 - 4 = 0$$

$$2x^2 - 4x - 128 - 16 - 4 = 0$$

$$2x^2 - 4x - 148 = 0$$

$$x^2 - 2x - 74 = 0$$

$$D = 4 + 296 = 300 \quad D = 4 + 296 = 300 = (10\sqrt{3})^2$$

$$x_1 = \frac{2 + 10\sqrt{3}}{2} = 1 + 5\sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{2 - 10\sqrt{3}}{2} = 1 - 5\sqrt{3}$$

$$6^2 + 96d + 14d^2 = x_3 x_4 (**); \quad 6^2 + 96d + 20d^2 = x_1 x_2 (*\dagger) \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow 6d^2 = x_1 x_2 - x_3 x_4 = -2 - (-44) = 44 - 2 = 42.$$

$$d^2 = 72 \Rightarrow d = \pm 2\sqrt{3}.$$

Положим $d = 2\sqrt{3}$, $b = 1 - 9\sqrt{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_3 = b + 2d = 1 - 9\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 1 - 5\sqrt{3},$$

$$x_1 = b + 4d = 1 - 9\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 1 - \sqrt{3},$$

$$x_2 = b + 5d = 1 - 9\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}$$

$$x_4 = b + 7d = 1 - 9\sqrt{3} + 14\sqrt{3} = 1 + 5\sqrt{3} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 1 - 5\sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}, 1 + 5\sqrt{3}$ — арифм. прогрессия
корней с $b = 1 - 9\sqrt{3}$, $d = 2\sqrt{3}$. Т.е., при $a = 2$ корни
являются непрерывной арифм. прогрессией.

Ответ: 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

$$\left| y - 75 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \right| + \left| y - 75 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \right| \leq 6.$$

Пусть $\alpha = y - 75$, $\beta = \frac{x}{6\sqrt{3}}$.

Тогда, $|\alpha + \beta| + |\alpha - \beta| \leq 6$.

Известно, что $\left. \begin{aligned} |\alpha + \beta| &\geq |\alpha| + |\beta|, \\ |\alpha - \beta| &\geq |\alpha| - |\beta| \end{aligned} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\alpha + \beta| + |\alpha - \beta| \geq |\alpha| + |\beta| + |\alpha| - |\beta| = 2|\alpha| \leq 6 \Rightarrow |\alpha| \leq 3.$$

Заметим, что $|\alpha + \beta| + |\alpha - \beta| = |\alpha + \beta| + |\beta - \alpha| \leq 6 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{аналогично, } |\beta| \leq 3.$$

Значит, $-3 \leq \alpha \leq 3$

$$-3 \leq \beta \leq 3$$

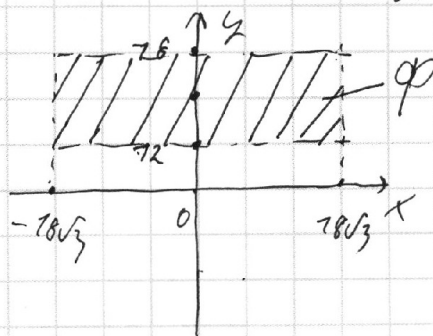
$$-3 \leq y - 75 \leq 3$$

$$-3 \leq \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 3$$

$$72 \leq y \leq 78$$

$$-78\sqrt{3} \leq x \leq 78\sqrt{3}.$$

Т.е., фигура Φ выглядит как:





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

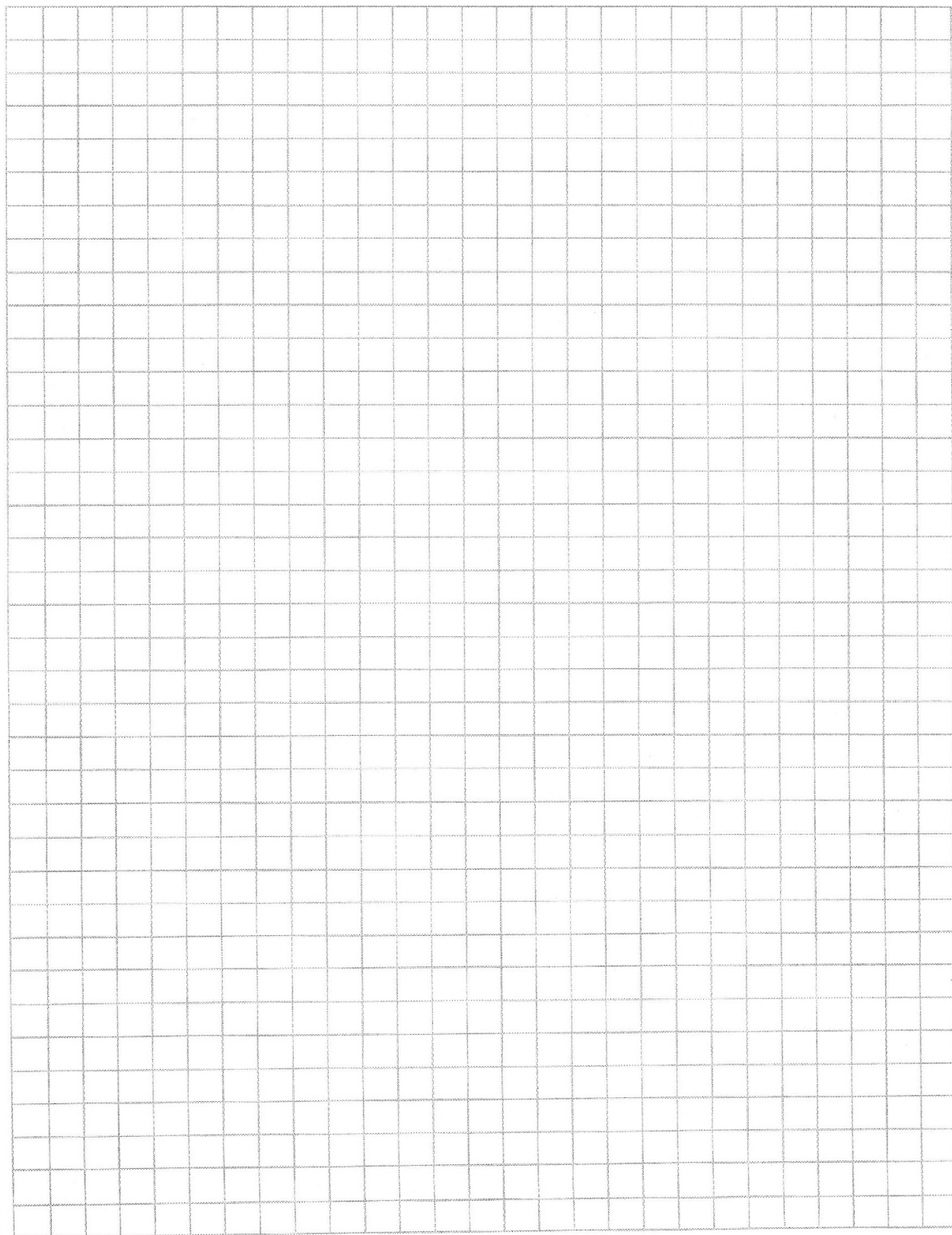
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$xy = 4z + z^2; \quad xy + 4z + 16 = (z + 4)^2$$

$$(x + 4)^2 + (y + 4)^2 + (z + 4)^2 = xy + yz + zx + 4z + 4y + 4x + 48$$

$$yz - xy = 4(x - z) + z^2 - z^2$$

$$-y(x - z) = 4(x - z) + (x - z)(x + z)$$

$$(x - z)(4 + x + z + y) = 0$$

$$\Rightarrow x = z$$

$$z - 4 \neq x + y + z$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 16 = xy + yz + zx$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = -16$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 8(xy + yz + zx) + 48$$

$$x^2 = 4x + x^2$$

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$$z = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 16$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 - 2(xy + yz + zx)$$

$$2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx) = 32$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 16$$

$$3(x^2 + y^2 + z^2) = 48$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16$$

2.

$$9^3(60-7)^3 \approx 10^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$24999 = 10^5$$

$$897$$

$$897$$

$$897$$

$$897$$

$$897$$

$$897$$

$$999 \dots 9 \approx \left(1000 \dots 0 - 1 \right)^3 = 1000 \dots 0^3 - 3 \cdot 1000 \dots 0^2 + 3 \cdot 1000 \dots 0 - 1 =$$

$$= 1000 \dots 0 - 3000 \dots 0 + 3000 \dots 0 - 1 =$$

$$= 999 \dots 9 \approx 1000 \dots 0 - 1 = 999 \dots 9$$