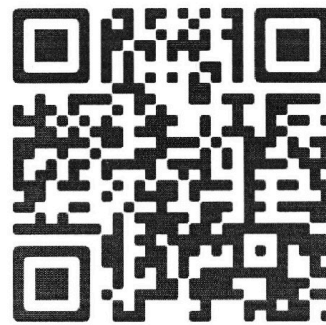




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 & (1) \\ yz = 3x + x^2 & (2) \\ zx = 3y + y^2 & (3) \end{cases}$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$z \geq 0$$

$$A = (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 - ?$$

$$(1) - (2) : y(x-z) = 3(z-x) + (z-x)(z+x)$$

$$0 = 3(z-x) + (z-x)(z+x) + y(z-x)$$

$$0 = (z-x)(3+z+x+y)$$

$$\begin{cases} z = x \\ 3+z+x+y = 0 \end{cases}$$

1 случай:

$$(*) 3+x+y+z = 0$$

$$(1) + (2) + (3) \Rightarrow xy + yz + zx = 3(x+y+z) + x^2 + y^2 + z^2$$

$$\begin{cases} 3(xy + yz + zx) = (x+y+z)^2 + 3(x+y+z) \\ 3(xy + yz + zx) = (x+y+z) \cdot (x+y+z+3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow xy + yz + zx = 0$$

$$\Rightarrow 0 = 3(x+y+z) + x^2 + y^2 + z^2 \quad | \quad + (3x+3y+3z) + 27$$

$$3(x+y+z) + 27 = (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$$

$$\text{из } (*) \Rightarrow x+y+z = -3$$

$$\Rightarrow \text{левая часть последнего равенства} = 18$$

$$\Rightarrow \text{в 1) случае } A = 18.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1 (продолжение)

2 случая

$$\boxed{z=x} \Rightarrow \text{можно аналогично } (2)-(3) \Rightarrow$$

$$z(y-x) = 3(x-y) + x^2 - y^2 \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ 3+y+x+z=0 \end{cases}$$

$$\text{Но если } y=x \Rightarrow x=y=z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{тогда (1): } x^2 = 3x + x^2 \Rightarrow x=0 \quad (\text{X})$$

(Противоречие с условием $x \neq 0$)

$$\Rightarrow z \neq x \text{ и } 3+y+x+z=0$$

тогда система переписывается так:

$$\begin{cases} xy = 3x + x^2 & \text{также } 3+y+x+z=0 \Rightarrow \\ x^2 = 3y + y^2 & \Rightarrow 3+y+2x=0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow y = -3-2x \end{cases}$$

$$x^2 = 3(-3-2x) + (-3-2x)^2$$

$$(x+3)^2 = (3+2x)^2 \Rightarrow 0 = (2x+3-x-3)(2x+3+x+3)$$

$$0 = (x)(3x+6)$$

$$0 = x(x+2) \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow \boxed{x = -2}$$

$$\Rightarrow z = -2 \Rightarrow$$

$$3+(-2)+(-2)+y=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow A = 1+1+16=18$$

В обоих случаях орг. зн. $\Rightarrow$ Ответ: 18



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 2

Заметим, что $n = 10^{40000} - 1$ (43 условия)

$$\Rightarrow n^3 = (10^{40000} - 1)^3 = \underbrace{10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000}}_A + \underbrace{3 \cdot 10^{40000} - 1}_B$$

$$= A + B$$

число A выглядит так:

~~80000~~

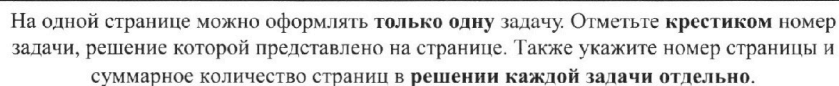
$$\begin{array}{c} 99 \dots 97 \underbrace{00 \dots 0}_1 \\ \hline 35555 \text{ штук.} \quad 80000 \text{ штук.} \end{array}$$

число B выглядит так:

$$\begin{array}{c} 299 \dots 9 \\ \hline 1 \quad 40000 \\ \text{штуки} \end{array} \Rightarrow A + B \text{ выглядит так:}$$
$$\begin{array}{c} 99 \dots 9 \quad 7 \underbrace{00 \dots 0}_1 \quad 2 \quad 99 \dots 9 \\ \hline 35555 \quad 1 \quad 35555 \quad 1 \quad 40000 \end{array} \Rightarrow$$

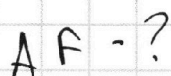
$$\Rightarrow \text{коп-во ребром} = 35555 + 40000 = 75555$$

Ответ: 75555



СТРАНИЦА

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AC = 10$$

A B - - c

$$B_e = 5$$

Решение:

Положим $\epsilon = \delta \Rightarrow$ заметим, что $\epsilon CDF =$

$$= 90 - 8 \text{ (ACDF)} \Rightarrow \text{AVDF} = 90 - (90 - 8) = 8$$

$\Rightarrow \angle DAF = 90^\circ - \alpha \Rightarrow$ положим опяс.

OKP Δ ADF $\Leftrightarrow$ $2m_0 w_1 \geq m_k < CDF \leq DAF =$

$290 - \delta \Rightarrow$ CD касается ω_1
(св-во секущей чк-с), (1)

$$\Rightarrow \cancel{AC} \quad CD^2 = CF \cdot AC \Rightarrow CD^2 = CF \cdot 10,$$

моуа мк BDEA - вписан-ник $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle FDC = \angle BAE \approx 50^\circ \Rightarrow \angle ABE = \angle ABE =$$

$= \delta \Rightarrow$ в $\triangle ABE$ (он пр-ный, тк AB диаметр)

w) $\cos \alpha = \frac{5}{6} \Rightarrow \text{manga } b \Delta ABC : \cos \alpha = \frac{5}{6}$

$$\Rightarrow \frac{DC}{AC} = \frac{DC}{10} = \frac{5}{6} \Rightarrow DC = \frac{25}{3}, \text{ положим } AF = x$$

погра в силу (1) $\Rightarrow \frac{625}{9} = (10-x) \cdot 10$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

(продолжение.)

$$\frac{625}{9} = (10 - x) \cdot 10 \Rightarrow 625 = 90 \cdot (10 - x)$$

$$125 = 18(10 - x) \Rightarrow \frac{125}{18} = 10 - x$$

$$x = \frac{180}{18} - \frac{125}{18} = \frac{55}{18} \Rightarrow AF = \frac{55}{18}$$

Ответ: $AF = \frac{55}{18}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

и

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Предположим ведущий взял равно
n коробок и в какие-то при положил
по шарiku. $\Rightarrow$ посчитаем вероятность

того, что ~~игрок~~ игрок выиграет, p_1
если ему можно выбрать только 5 коро-
бок $\Rightarrow C_n^5$ - вариантов выбрать

5 коробок C_{n-3}^2 исходов в которых
он взял все при шарика (так он
3 коробки транил на шарик и еще
2 коробки выбирает из $n-3$) $\Rightarrow$

$$p_1 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} \Rightarrow \text{аналогично, считаем}$$

когда ему позволено взять 6 коробок (p_2)

$$\Rightarrow p_2 = \frac{C_{n-3}^3}{C_n^6} ; \text{ Это условие от нас хотят}$$

$$\Rightarrow \frac{C_{n-3}^3}{C_n^6} \cdot \frac{C_n^6}{C_{n-3}^2} = \frac{p_2}{p_1} = ?$$

$$= \frac{(n-3)! \cdot n!}{(n-6)! \cdot 3! \cdot (n-3)! \cdot 5! \cdot n! \cdot (n-3)!} = \frac{6! \cdot 2!}{3! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 2}{6} = 2 ; \text{ Ответ: } 2 \text{ раза.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

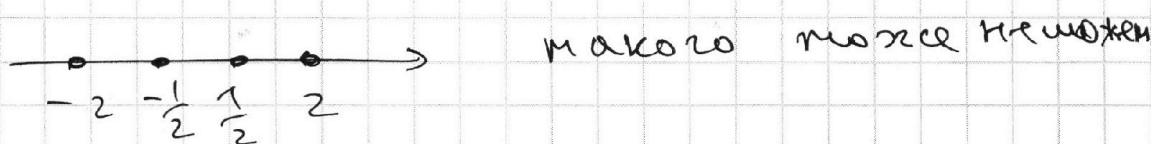
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5 (продолжение)

2 случай:

$$a=1 \Rightarrow (1) x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$$

$$(2) 4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = \pm \frac{1}{2}$$



Быть между соседними членами прогр. 2 и -2 (линейн и нелинейн) есть еще третий и восьмой член.
(арифм прогр либо монотонно возр либо монотонно убывает не мож.) $\Rightarrow$ 3 случая:

$$a=4$$

$$D_1 = 144 + 4 = 148 = 37 \cdot 4$$

$$x_{1,2} = 6 \pm \sqrt{37}$$

$$1) x^2 - 12x + 7 = 0$$

$$2) 4x^2 - 48x - 14 = 0 \rightarrow D_2 = 144 + 7 \cdot 127 \cdot 4 =$$

$$4x^2 - 48x - 14 \cdot 254 = 0$$

$$= 3700 \Rightarrow x_{3,4} = 6 \pm 5\sqrt{37}$$

$$6 - 5\sqrt{37} = a_3$$

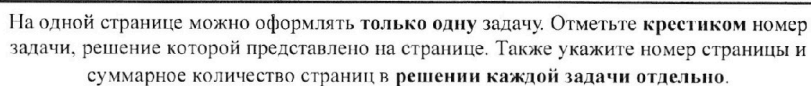
$$6 - \sqrt{37} = a_5$$

$$6 + \sqrt{37} = a_6$$

$$6 + 5\sqrt{37} = a_8$$

x -матр прогр. ~~$6 \pm \sqrt{37}$~~
Нетрудно убедиться,
что $d = 2\sqrt{37}$ и корни
расположились в виде
арифм прогр. как и нам
нужно $\Rightarrow$

Ответ: $a=4$



7

СТРАНИЦА
4 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

W 5

 $a - ?$

$$(1) x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0;$$

$$(2) 4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

Если такой параметр существует
 $\Rightarrow$ можем указать из кв. трехчленов
 должно быть 2 разных корня, причем
 очевидно, что если у первого трехчлена
 корни это $\pm \sqrt{a}$ бо́льшей симметрии проуз, а
 у второго это $\pm \sqrt{b}$ бо́льшей $\Rightarrow$ сумма
 корней первого ~~трехчлена~~ трехчлена =
 = сумме корней второго (мк проуз.
 не пост. и она имеет вид $b + \alpha k = ak$,
 где $\alpha \neq 0$, в какое-то ^{на заданное} число k - номер ее члена
 $\Rightarrow$ По теореме Виета сумма корней у первого трехчл.
 $\neq \cancel{a^2} \cancel{a^2} = a^2 - a$ у второго $\frac{a^3 - a^2}{4}$ (при
 условии, что оба дискриминанта > 0)

$$u^2 - u = \frac{a^3 - a^2}{4} \Rightarrow a^3 - 5a^2 + a = 0 \Rightarrow a(a-1)(a-4) = 0$$

1 случай: $a=0 \Rightarrow$ 1) $x^2-5=0 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{5}$
2) $x^2-4=0 \Rightarrow x_{3,4}=\pm 1$

Но разность между корнями первого ур-а
 модулю $= 2\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$, а у ~~второго~~ разность
 между корнями равна 2 при этом число
 равно модулю $4|\Delta|$ (где Δ макс прогн)
 $\Rightarrow K \notin \mathbb{Q}$, но тогда $\Delta \in \mathbb{Q}$ и $\Delta \notin \mathbb{Q} \Rightarrow$ такого
 не бывает



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6

$$\left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3$$

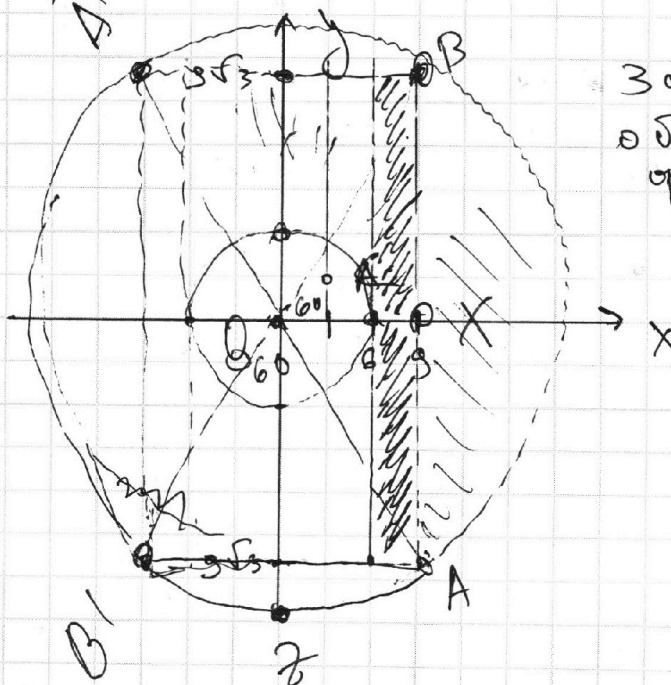
$|a| + |b| \geq |a+b|$ (1) Воспользуемся следую-
 $|a| + |b| \geq |a-b|$ (2) щими св-вами при
работе с модулями

если пара (x, y) удов. нер-ву $\Rightarrow$

$$\Rightarrow |2x - 15| \leq 3 \quad (\text{в силу (1)})$$

$$\Rightarrow -3 \leq 2x - 15 \leq 3 \Rightarrow 6 \leq x \leq 9$$

$$\left| \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3 \Rightarrow -9\sqrt{3} \leq y \leq 9\sqrt{3}$$



Закрашенная
область это
фигура Φ



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6 (продолжение)

Отметим точки А и В на графике
тогда при повороте на угол
 π против часовой стрелки
будем считать часть окружности
радиуса OB ~~соед.~~ ~~в~~ $OB^2 = 9^2 + (3\sqrt{3})^2 =$
 $= 9^2 + 27 = 81 + 27 = 108 \Rightarrow OB = 9\sqrt{2}$ ~~тогда~~ примем
поворот $B \rightarrow B'$; $A \rightarrow A'$ и тогда не
запомним только окружность радиуса
6 в качестве (радиуса OC) также
не забудем сектор AB' (меньший снизу
на рисунке); площадь окр = $\pi \cdot 18^2$ (всей)
площадь маленькой окр = $\pi \cdot 36$
площадь сектора: заметим, что в $\triangle OBX$
катет $OX = 3$, а гип $= 18 \Rightarrow \angle OBX = 30^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle B'OA = 60^\circ \Rightarrow$ площадь сектора $B'OA =$
 $= \frac{\pi \cdot 18^2}{6} = \pi \cdot 3 \cdot 18 = \pi \cdot 54 \Rightarrow$

$$S(\varphi) = 18^2 \cdot \pi - 36\pi - 54\pi = \pi(324 - 36 - 54) =$$

$$= \pi(234) = \pi \cdot 234$$

Ответ: $234 \cdot \pi$

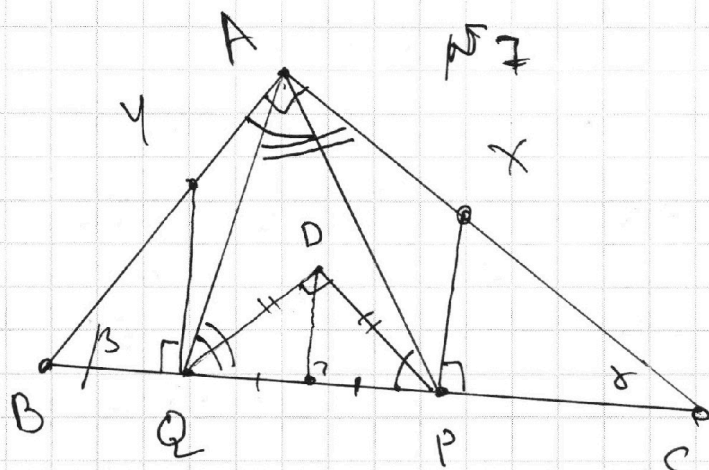


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle DCB = 20^\circ$$

$$AB = BP$$

$$AQ = CQ$$

$$DQ = DP$$

$$\angle QDP = 90^\circ$$

$$\angle BAC = 90^\circ$$

$$\angle DBC = ?$$

Решение:

$$\text{Положим } \angle B = \beta; \angle C = \delta \Rightarrow \beta + \delta = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle QAC = 90^\circ - \frac{\delta}{2} \text{ (так как } QAC - \text{л/с)}$$

$$\angle BAP = 90^\circ - \frac{\beta}{2} \text{ (так как } BAP - \text{л/с)} \Rightarrow \angle QAP =$$

$$= 180^\circ - \beta/2 - \delta/2 - 90^\circ = 90^\circ - \frac{\beta + \delta}{2} = 45^\circ$$

Заметим, что D лежит на сср перек QP

и $\angle QDP = 90^\circ = 2 \cdot 45^\circ$, то есть в $\triangle QAP$ угол $\angle QDP$ в 2 раза больше угла $\angle QAP$

и лежит на сср. перек к стороне $\Rightarrow D$ — центр опис. окр $\triangle QDP$; восстановим из P и из Q перпендикуляры к BC $\Rightarrow$ го пересечения с AC

и AB соотв. $\Rightarrow$ так $\angle QAP = \angle AQP = 90^\circ - \frac{\delta}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle YQA = \frac{\delta}{2}, \text{ аналогично } APX = \frac{\beta}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{также } \angle BAQ = 90^\circ - (90^\circ - \frac{\delta}{2}) = \frac{\delta}{2} \text{ и } \angle CAP =$$

$$= \frac{\beta}{2} \Rightarrow Q - \text{точки } BAXP \text{ и } SAYQ \text{ вмс.}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N7 (продолж.)

причем $m_k \angle XAP = \angle XPA$ и $BAXP$ впис

$\Rightarrow \angle ABX = \angle PDX \Rightarrow BX$ биссектр $\angle ABC$

но так $\triangle ABP$ - $\triangle$ $\Rightarrow BX$ еще и высота
и медиана $\Rightarrow BX$ - середина AP

$\Rightarrow BX$ проходит через центр впис окр

$\triangle ABP$ (точку D), аналогично CH про-

ходит через $D \Rightarrow D$ - это точка

которая лежит на $\angle$ биссектрисах

$\triangle ABC \Rightarrow D$ - центр впис окр

$$\Rightarrow \angle DBC = \frac{180^\circ - 30^\circ - 20^\circ}{2} = \frac{90^\circ - 40^\circ}{2} =$$

$$= 25^\circ \quad \text{Ответ: } \angle DBC = 25^\circ$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 \cdot 3 + 6x + 6y + 6z$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3(x + y + z) =$$

$$= xy + yz + zx$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 27 + 6(xy + yz + zx)$$

$$(x \geq y \geq z)$$

$$(x+y+z)^2 + 3(x+y+z) = 3(xy + yz + zx)$$

$$(x+y+z)(x+y+z+3) = (xy + yz + zx) \cdot 3$$

$$xy - z + 1 = \left(\frac{z}{2} + 1\right)^2$$

$$xy + yz + zx = 0$$

$$xy + 3z + 9 = z^2 + 6z + 9 = (z+3)^2$$

~~212~~

$$z^2 - yz - zx = x^2 + y^2 + z^2 + 1$$

$$z(z - y - x)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 6y + 6z + 9 \cdot 3 =$$

$$\frac{27}{24}$$

$$x^2 + 3z + z^2$$

$$x^2 + 3x = xz$$

$$xy - yz = 3z - 3x + z^2 - x^2$$

$$y(x - z) = -3(x - z) + (x - z)(x + z)$$

$$y(x - z) + 3(x - z) + (x - z)(x + z) = 0$$

$$(x - z)(y + 3 + x + z) = 0$$

$$\therefore x = z = y \quad (W) \quad x^2 = 3x + x^2$$

$$x = y$$

$$3z + z^2 + 3x = xz$$

$$x^2 = 3z + z^2$$

$$xz = 3x + x^2$$

$$xz - 3x = 3z + z^2$$

$$x(z - 3) = z(3 + z)$$

$$xz = z^2 + 3z + 3x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2(y-x) = 3(x-y) + (x-y)(x+y)$$

$$0 = (x-y)(3+x+y+z)$$

$$(1) \quad (3+x+y+z=0) \quad | \cdot 6 \quad 6(x+y+z) = -18$$

$$x^2+y^2+z^2+6(x+y+z)+27 = ?$$

$$-18 \quad x^2+y^2+z^2+y =$$

$$x=y=z$$

$$x=y=z$$

$$18+6(x+y+z)=0$$

$$-x^2 \cdot y$$

$$x^2+y^2+z^2+6(x+y+z)+27 = (x+y+z)^2$$

$$0 = 3+x+y+z \quad | \cdot 3 \quad 3x+3y+3z = -9$$

$$3+x+y+z = -9$$

$$0 = 3+x+y+z$$

$$0 = 3+x+y+z$$

$$x=y=z$$

$$x=y=z$$

$$(x+y+z)(x-y) = 0$$

$$0 = 3(2-x)(2+y) + (2-x)(2+y) = 0$$

$$y(x-2) + z(x-2) = 3(2-x)^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1313 - 13}{n}$$

$$\frac{C_{n-3}^3}{C_n^3}$$

$$\frac{C_n^3}{C_{n-3}^2} \leftarrow \text{уверенно}$$

— вероятность выпадения стороны —

$$\frac{C_n^3}{C_n^2} = \frac{n}{6} = \frac{2}{3} C_{n-3}^2 = \frac{(n-3)!}{3! (n-6)!} = \frac{(n-3)!}{2! (n-5)!} = \frac{n-5}{3} \cdot \frac{2! (n-5)!}{2! (n-5)!} = \frac{n-5}{3}$$

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$

$$\frac{C_{n-3}^3}{C_n^3} : \frac{C_{n-3}^2}{C_n^2} = \frac{C_n^5}{C_n^6} \cdot \frac{C_{n-3}^2}{C_{n-3}^3} = \frac{n!}{(n-5)! \cdot 5!} \cdot \frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!} = \frac{n!}{(n-6)! \cdot 6!}$$

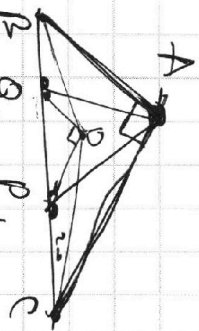
$$\frac{C_n^5}{C_n^6} \cdot \frac{C_{n-3}^2}{C_{n-3}^3} = \frac{n!}{(n-5)! \cdot 5!} \cdot \frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!} = \frac{n!}{(n-6)! \cdot 6!}$$

$$1 - \frac{1}{5n-15}$$

$$0 = (n-5)(n-4) \cdot 2 \rightarrow a^3 - 5a^2 + 4a = 0$$

$$a(a^2 - 5a + 4) = 0 \rightarrow a^3 - 5a^2 + 4a = 0 \rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0 \rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0$$

$$\frac{C_n^3}{C_{n-3}^3} = \frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!} = \frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!}$$



$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

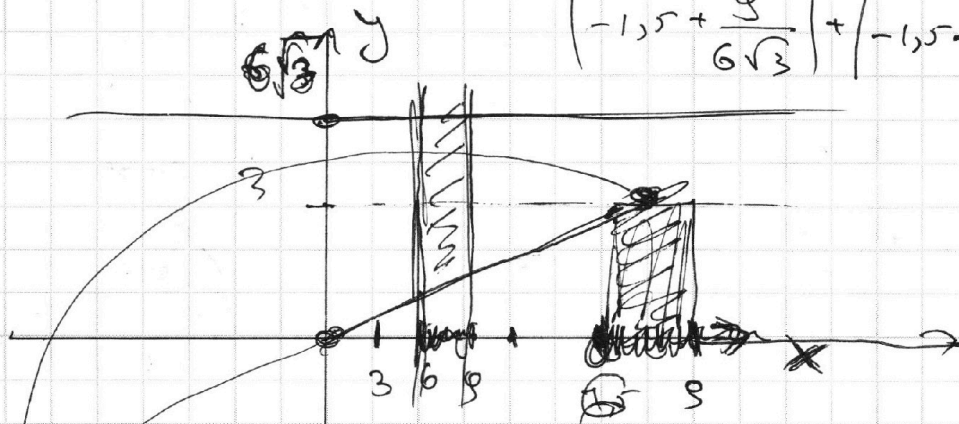
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left| x - 7,5 + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - 7,5 - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3$$

$$\left| -1,5 + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| -1,5 - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right|$$



$$-3 \leq 2x - 15 \leq 3$$

$$12 \leq 2x \leq 18$$

$$6 \leq x \leq 9$$

$$\textcircled{7} \quad 2x - 15 \leq 3$$

$$3 > 2x - 15 > 0$$

$$18 > 2x$$

$$2x - 15 > 0$$

$$2x > 15$$

$$5 > x > 7,5$$

$$\textcircled{8}$$

$$x =$$

$$a - 2 > 0$$

$$\textcircled{9}$$

$$|2x - 15| \leq 3$$

$$\textcircled{10}$$

$$x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0$$

$$x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \geq 0$$

$$2x - 15 \geq 0$$

$$x \geq 7,5$$

$$|x - 6,5| \leq 1$$

$$|x - 7,5 + 1|$$

$$|x - 6,5| + |x - 8,5| \leq 3$$

$$|a| + |a - 2| \leq 3$$

$$\textcircled{11}$$

$$\textcircled{12}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6 \leq x \leq 9$$

$$y = 0$$

$$2 = |x - 7,5| \leq \frac{|a-b|}{|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{|a|+|b|}$$

$$|x - 7,5| \leq 1,5 \quad \left| \frac{2y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3$$

$$-6\sqrt{3} \leq x - 7,5 \leq 6\sqrt{3} \quad |y| \leq \frac{6\sqrt{3} \cdot 3}{2}$$

$$y = 6\sqrt{3}$$

$$\left| 6 - 7,5 + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| 6 - 7,5 - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right|$$
$$\left| \frac{y}{6\sqrt{3}} - 1,5 \right| + \left| -1,5 - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right|$$

нужно показать, что $\frac{2y}{6\sqrt{3}} \leq 3$

сверху и снизу назовем $-9\sqrt{3} \leq y \leq 9\sqrt{3}$

$$\frac{1}{2}$$

$$2x = 9$$

$$y \leq 9\sqrt{3}$$

$$\frac{y}{5} \leq \frac{9\sqrt{3}}{5}$$

$$6 +$$

$$6 +$$

$$x$$

$$6 - \frac{15}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}$$

$$k \leq \frac{3}{2}$$

$$\left| x - \frac{15}{2} + k \right| + \left| x - \frac{15}{2} - k \right|$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3$$

~~3~~

$$3 + x + y + z = 0$$

~~х у z~~

$$2x + y + z = 1$$

$$x - 2y + z = -2$$

$$x + y + z = 2$$

$$4 + 1 + 1 = 6 = 18$$

$$x - 2y + z = -2$$

$$0 = (x + 3 - x - 3) (3x + 6)$$

$$3 - 4 + z = 0$$

$$x - 2y + z = 4$$

$$x^2 = -6x - 9 + (2x + 3)^2$$

$$x^2 = -3(2x + 3) + (2x + 3)^2$$

$$2 \cdot (x + 3)^2 + (x + 3)^2 = 2x^2 + 2x + 12x + 6z - 2$$

$$3 + 2x + z = 0$$

$$3 + x + y + z = 0$$

найдя

$$\begin{cases} x^2 = 3z + z^2 \\ xz = 3x + x^2 \end{cases}$$

$$x = y$$

$$x = y$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = x^2 \\ y^2 = 3x + x^2 \\ x^2 = 3z + z^2 \end{cases}$$

~~(3, 3)~~

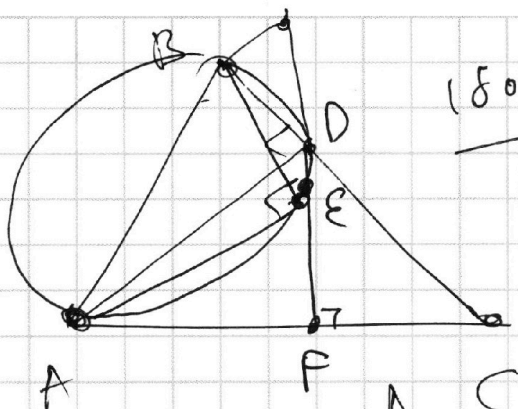


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

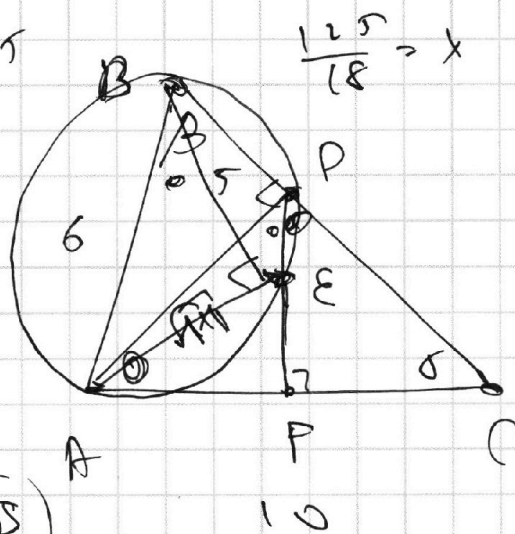
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

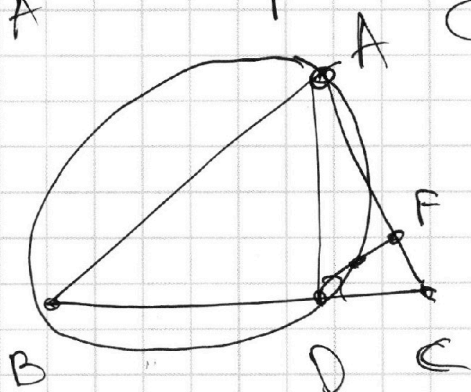
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{150 - 125}{18}$$



$$\frac{125}{18} = x$$



$$\frac{55}{18}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$AE = \sqrt{5}$$

если найдем $\cos \alpha$ по формуле

$$\frac{PC}{10} = \frac{\sin 50^\circ}{\cos \alpha}$$

↑

$$PC = 10 \cdot \cos \alpha$$

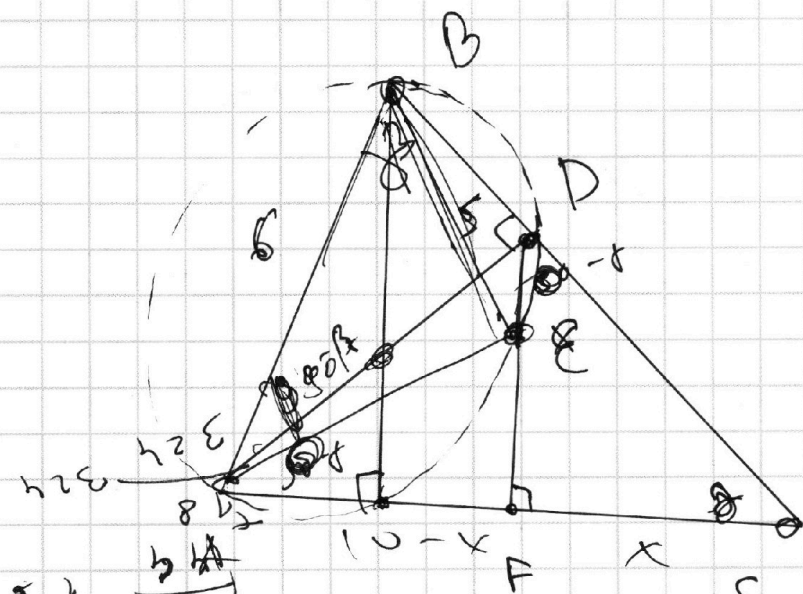
$$\cos \alpha = \frac{5}{6}$$

$$DC = \frac{50}{6} = \left(\frac{25}{3}\right)$$

$$\frac{625}{9} = x \cdot 10$$

$$125 = 2x \cdot 3$$

$$125 = 6x$$



$$\begin{array}{r} 52 \\ \times 2 \\ \hline 104 \\ 104 \\ \hline 208 \end{array}$$

$$PC^2 = 8x \cdot 10$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$

$$-x_1 + x_2$$

$$D > 0$$

$$(a^2 - a)^2 - 4(a - 5)$$

~~4a^2~~

$$2a^4 - a^6 + 2a^2 - 4$$

$$a^4(2 - a^2) + 2(a^2 - 2) = (a^2 - 2)(2 - a^4)$$

$$x^2 - \frac{(a^3 - a^2)}{4}x + \frac{(a^2 - 2)(2 - a^4)}{4} = 0$$

$$a^3 - a^2$$

$$\frac{a^3 - a^2}{4} = a^2 - a \quad | \cdot 4$$

$$a^3 - a^2 = 4a^2 - 4a$$

$$a^3 = 5a^2 - 4a$$

$$a(a^2 - 5a + 4) = 0$$

$$a(a - 1)(a - 4) = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = 4 \end{cases}$$

$$a = 0$$

$$x^2 - 5 = 0$$

$$4x^2 - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$$

$$x_{1,2} = \pm 1$$

$$a = 1$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$4x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$x^2 - (16 - 4)x + 4 - 5 = 0$$

$$4x^2 - (4^3 - 4^2)x +$$

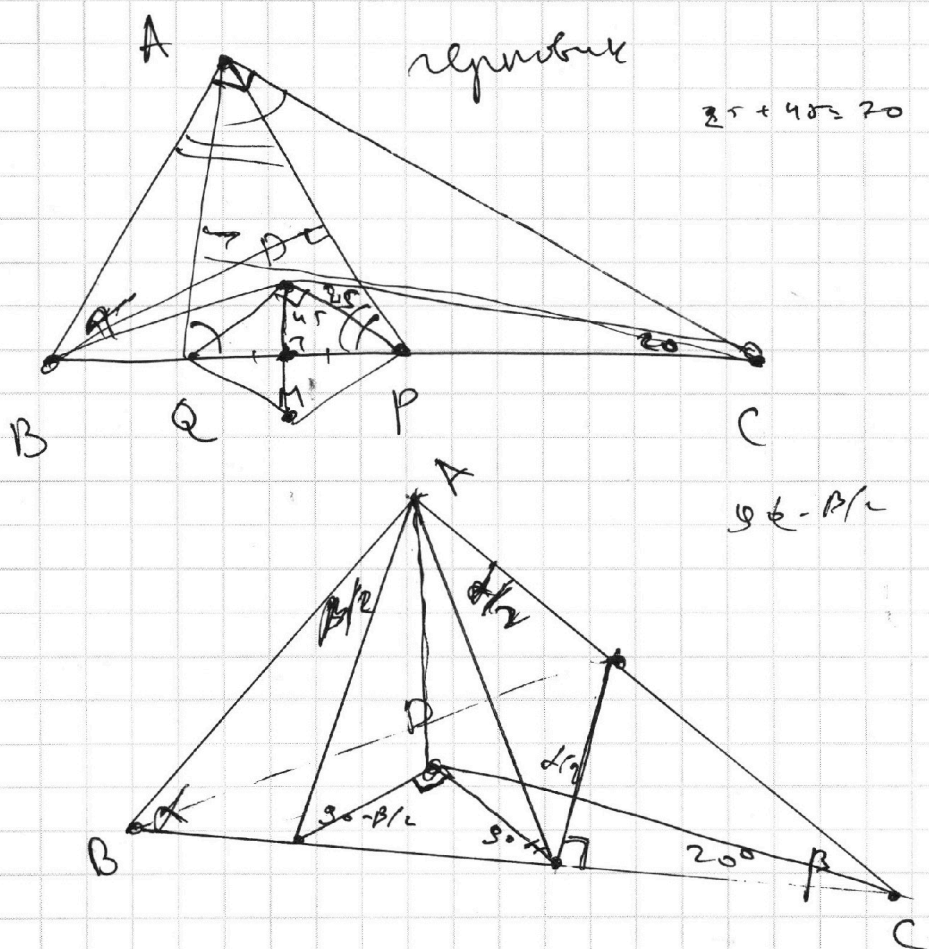
$$2 \cdot 4^4 + 2$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$-2 - \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 2$$

$$a + 3 \sqrt{a + 5}$$

$$a + 8 \sqrt{a}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~250~~ $(16-2)(2-4) = 11$

$x^2 - 4 = 0$ (1)

~~254~~ $4x^2 - 1 = 0$ (2)

$254 \overline{) 127}$ $4x^2 - 1 = 0$ $254 \overline{) 127}$

$14 \cdot (2 - 250) = 14 \cdot 254$

$x^2 - 12x - 1 = 0$

$4x^2 - 48x + 14 \cdot 254 = 0$

~~$x^2 - 12x - 1 = 0$~~

$x^2 - 12x - 7 \cdot 127 = 0$

$144 - 4 \cdot (-1) = 148$

$x_1 = \frac{12 + \sqrt{148}}{2} = \frac{12 + 2\sqrt{37}}{2} = 6 + \sqrt{37}$

$x_2 = 18 - 6 - \sqrt{37}$

$144 + 4 \cdot 7 \cdot 127$

$144 + 28 \cdot 127 = 254$

$\sqrt{37}$

$6 + \sqrt{37}$; $6 - \sqrt{37}$

$6 + 10\sqrt{37}$; $6 - 10\sqrt{37}$

$a_6 - a_5 = 2\sqrt{37}$