



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если известно 2 перемещения об., то пусть они

$x = y = t$, тогда

$$t^2 = 3z + z^2 \quad t \neq 0 \Rightarrow z = 3 + t$$

$$zt = 3t + t^2 \quad t^2 = 9 + 3t + 9 + t^2 + 6t \Rightarrow t = -2$$

$$z = 1 \Rightarrow x = y = -2 ; z = 1$$

$$\Rightarrow (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = \underline{\underline{18}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 99999 \dots 99 \\ 99999 \dots 99 \end{array}$$

$$n = 10^{40000} - 1$$

$$n^3 = 10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} + 3 \cdot 10^{40000} - 1$$

$$10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} = (10^{40000} - 3) \cdot 10^{80000} = (n - 2) \cdot 10^{80000}$$

$$\Rightarrow \overbrace{999 \dots 99700 \dots 00}^{39999} \overbrace{\dots 00}^{80000}$$

$$3 \cdot 10^{40000} - 1 = n + 2 \cdot 10^{40000}$$

пойдет. ну ищем до конца

на 39999

$$3 \cdot 10^{40000} - 1 = \overbrace{2999 \dots 99}^{40000}$$

$$n^3 = (10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000}) + (3 \cdot 10^{40000} - 1) = \overbrace{99 \dots 99700 \dots 00}^{39999} + \overbrace{299 \dots 99}^{40000}$$

$$= \overbrace{99 \dots 99700 \dots 00}^{39999} \overbrace{299 \dots 99}^{40000}$$

$$\Rightarrow \text{"9"}: 39999 + 40000 = \underline{\underline{79999}}$$

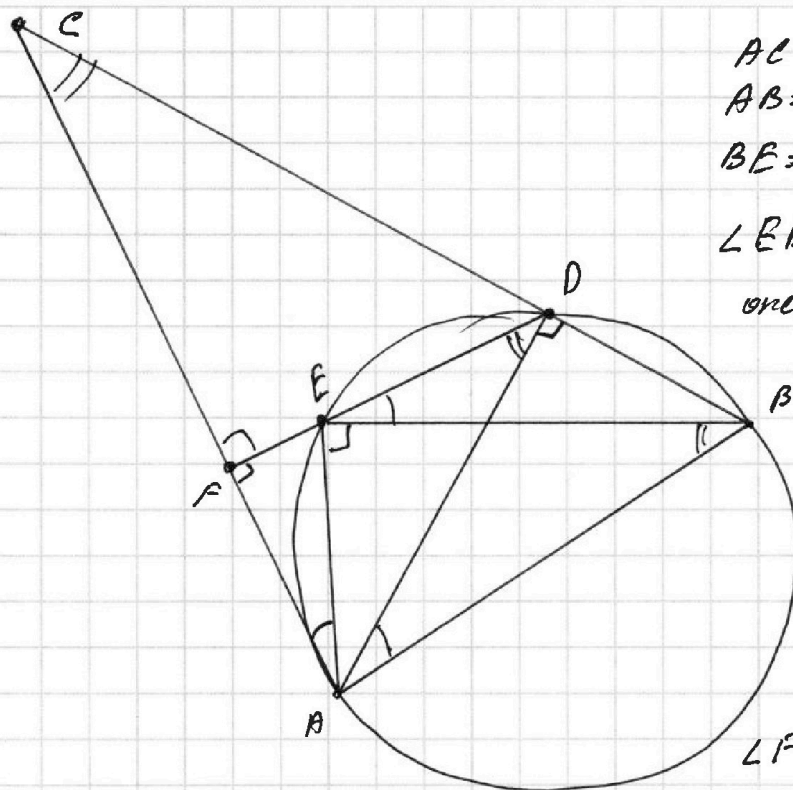


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AC = 10$$

$$AB = 6$$

$$BE = 5$$

$\angle EDA = \angle EBA$, т.к. они
опер. на одну дугу EA

в $\angle AEB = \angle ADB = 90^\circ$, т.к. они
оба опер. на диаметр.

$\angle DAB = \angle DEB$, т.к.
они оба опер. на дугу DB.

$$\angle FEA = 180^\circ - 90^\circ - \angle DEB$$

$$\angle FAB = 180^\circ - 90^\circ - \angle FEA$$

$$\Rightarrow \angle FAE = \angle DEB = \angle DAB. \Rightarrow \triangle FAE \sim \triangle DAB \text{ по двум углам}$$

$$\Rightarrow \frac{AF}{AE} = \frac{AD}{AB}; \triangle AEB \sim \triangle AFD \text{ по двум углам}$$

$$\Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AB} \quad \triangle AFD \sim \triangle AEB \Rightarrow \angle FDC = 180^\circ - 90^\circ - \angle FDA$$

$$\angle ACB = 180^\circ - 90^\circ - \angle FDC \Rightarrow \angle ACB = \angle ADF = \angle ABE$$

$$\Rightarrow \triangle CDA \sim \triangle DFA \text{ по двум углам.} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AF}{AD}$$

$$AD = \sqrt{AF \cdot AC} \quad AF = \frac{AE}{AB} \cdot \sqrt{AF \cdot AC} \Rightarrow \sqrt{AF}$$

$$\Rightarrow AF = \frac{AB^2}{AB^2} \cdot AC \quad \text{по т. Пифагора т.к. } \angle BEA = 90^\circ$$

$$AB^2 = AE^2 + EB^2 \Rightarrow AE^2 = AB^2 - BE^2 \Rightarrow AF = \frac{AB^2 - BE^2}{AB^2} \cdot AC =$$

$$= \frac{6^2 - 5^2}{6^2} \cdot 10 = \frac{110}{36} = \frac{55}{18} = 3 \frac{1}{18}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть было N шаров

тогда всего вариантов выбора 5 шаров. у нас 2 из N — C_N^5 , но в 3. из них шарик 27

кол-во вар, когда игрок выигр. в I сум, это

когда он. выигр. 3 шар. с шар. и 2 любые, из ост.

$N-3$ 27 C_{N-3}^2 27 вероят. в I сум $\varphi_1 = \frac{C_{N-3}^2}{C_N^5}$ 27

во II вар (когда назнач. от 6 шар.) всего вар. отгр.

кар. C_N^6 ; что бы он. выиграл он. должен выигр.

3 шар. с шар. и из ост. $N-3$ люб. 3. 27 кол-во

вар, когда он. выигр. C_{N-3}^3 27 $\varphi_2 = \frac{C_{N-3}^3}{C_N^6}$

$$\Rightarrow \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{C_{N-3}^3 \cdot C_N^5}{C_{N-3}^2 \cdot C_N^6} = \frac{(N-3)!}{3! \cdot (N-6)!} \cdot \frac{N!}{5! \cdot (N-5)!} \cdot \frac{C_N^6}{C_N^5} = \frac{(N-3)!}{2! \cdot (N-5)!} \cdot \frac{N!}{6! \cdot (N-6)!} = \frac{2! \cdot 6!}{3! \cdot 5!}$$

$$= \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow \text{в 2 раза.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 4 из 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть φ - I член прогрессии, тогда по м. а.в.
 корни уравн. φ - шаг прогрессии

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \begin{aligned} X_1 - \text{I член прогрессии} & \quad X_1 = \varphi + 4\varphi \\ X_2 - \text{VI член прогрессии} & \quad X_2 = \varphi + 5\varphi \\ X_3 - \text{III член прогрессии} & \quad X_3 = \varphi + 2\varphi \\ X_4 - \text{IV член прогрессии} & \quad X_4 = \varphi + 7\varphi \end{aligned} \end{aligned}$$

$$X_1 + X_2 = X_3 + X_4$$

$$\begin{array}{l|l} X_1 \text{ и } X_2 \text{ корни уравн.} & X_3 \text{ и } X_4 \text{ корни уравн.} \\ X^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0 & 4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^2 - a^6 - 4 = 0 \end{array}$$

по м. Виета

$$X_1 + X_2 = a^2 - a$$

по м. Виета

$$X_3 + X_4 = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4} \quad 4a(a - 1) = a^2(a - 1)$$

$$(a - 1)(a^2 - 4a) = 0 \quad \Rightarrow \quad a(a - 1)(a - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad a \in \{0; 1; 4\}; \quad (\text{что бы сумма } = 0)$$

$$\text{если } a = 0, \text{ то I уравн: } x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{5}$$

$$\text{II уравн: } 4x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_{3,4} = \pm 1$$

$$\Rightarrow X_1 + X_2 = X_3 + X_4 = 0 \Rightarrow a = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
5 ИЗ 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если $\alpha=1$, то I уравн: $x^2 - 4 = 0; x^2 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$

II уравн: $4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x_{3,4} = \pm 0,5$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = 2 - 2 = x_3 + x_4 = 0,5 - 0,5 = 0 \Rightarrow \alpha = 1$

Если $\alpha=4$, то I уравн: $x^2 - 12x - 1 = 0 \quad D = 144 + 4 = 148$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{148}}{2}$$

II уравн: $4x^2 - 48x - 3556 = 0$ По формуле $D' = 48^2 + 16 \cdot 3556$

$$x_{3,4} = \frac{48 \pm \sqrt{D'}}{8} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{12 + \sqrt{148} + 12 - \sqrt{148}}{2} \quad x_3 + x_4 =$$

$$= \frac{48 + \sqrt{D'} + 48 - \sqrt{D'}}{8} = 12 \Rightarrow \alpha = 4$$

$\Rightarrow \alpha \in \{0; 1; 4\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
7 ИЗ 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{если } \left(x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right) \geq 0, \text{ то } \left(x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right) \leq 0, \text{ то}$$

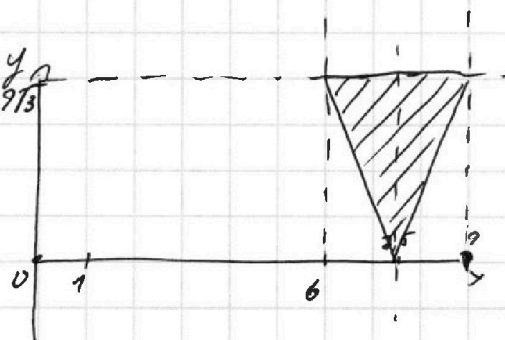
$$y \geq 45\sqrt{3} - 6\sqrt{3}x$$

$$y \geq 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3}$$

макс.

$$x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} - x + \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 3$$

$$y \leq 9\sqrt{3} \Rightarrow \text{на графике. Это:}$$



$$\text{если } \left(x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right) \geq 0 \text{ и } \left(x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right) \geq 0, \text{ то}$$

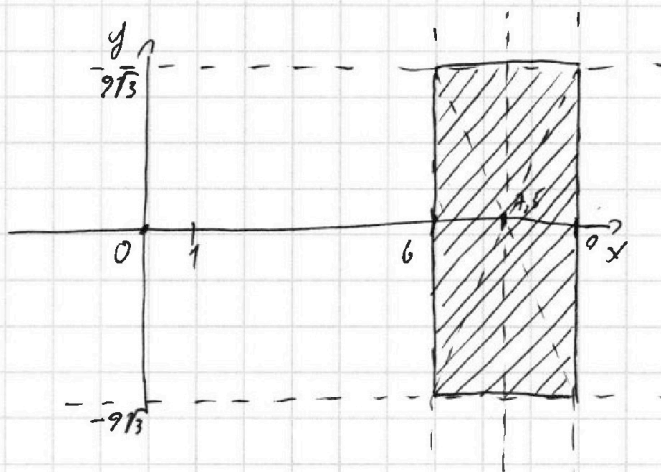
$$y \geq 45\sqrt{3} - 6\sqrt{3}x$$

$$\text{макс.: } x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} + x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 3$$

$$y \leq 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3}$$

$$2x - 15 \leq 3 \Rightarrow x \leq 9$$

$\Rightarrow$ на графике: все эти условия вместе выв. макс.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
6 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3$$

если $\left(x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right) \leq 0$ и $\left(x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right) \leq 0$, то

$$y \geq 6\sqrt{3} \cdot x - 45\sqrt{3}$$

$$12\sqrt{3}x - 90\sqrt{3} \leq 0$$

$$y \leq 45\sqrt{3} - 6\sqrt{3} \cdot x$$

$$x \leq \frac{15}{2}$$

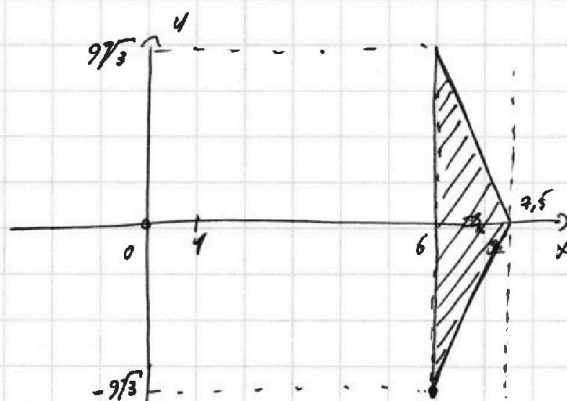
$$-x + \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} - x + \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 3$$

$$15 - 2x \leq 3$$

$$x \geq 6$$

$$\Rightarrow 6 \leq x \leq 7.5$$

$\Rightarrow$ на графике, это:



если $\left(x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right) \leq 0$, а $\left(x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right) \geq 0$, то

$$y \leq 45\sqrt{3} - 6\sqrt{3}x$$

$$y \leq 6\sqrt{3}x - 45\sqrt{3}$$

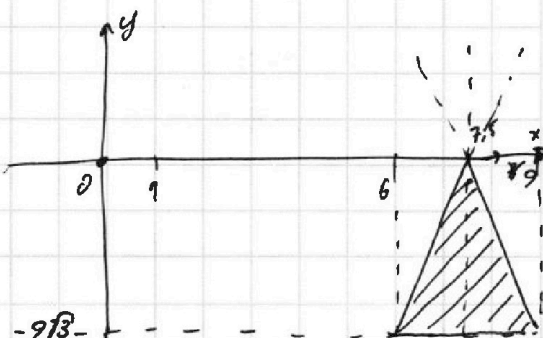
$$-\frac{y}{6\sqrt{3}} \geq x - \frac{15}{2}$$

$$-x + \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} + x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \leq 3$$

$$y \geq -9\sqrt{3}$$

$$2y \leq 0 \Rightarrow y \leq 0$$

$\Rightarrow$ на графике, это значит:





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

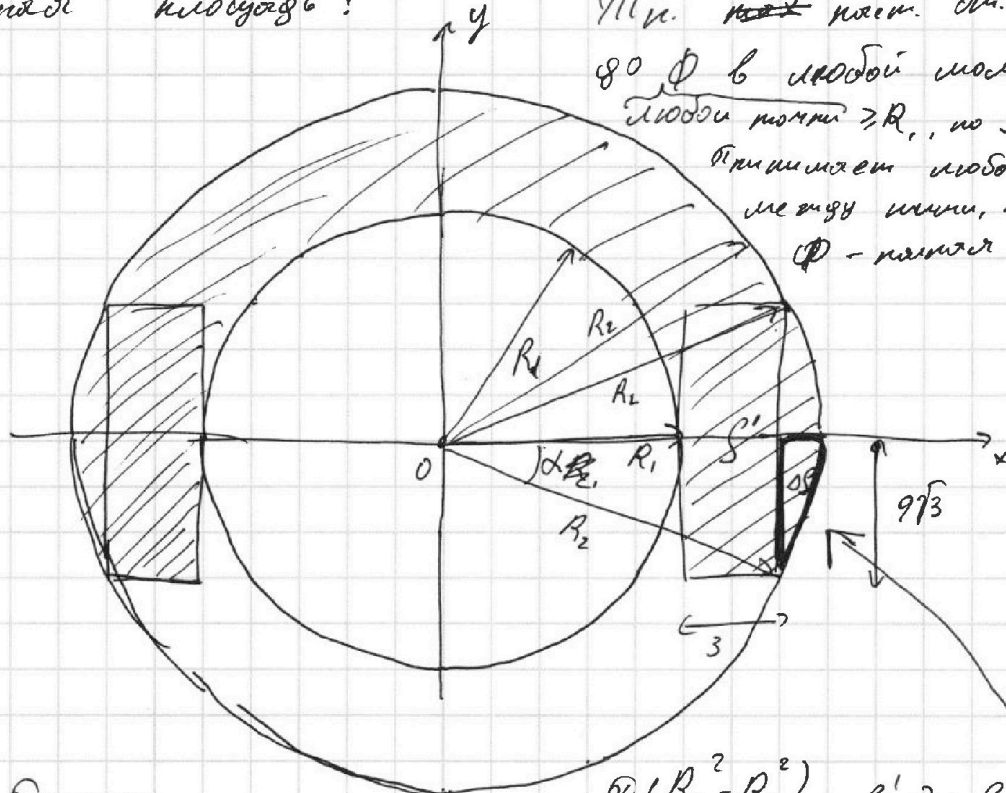
СТРАНИЦА
8 ИЗ 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

При повороте плоской фигуры замечается

малая площадь:

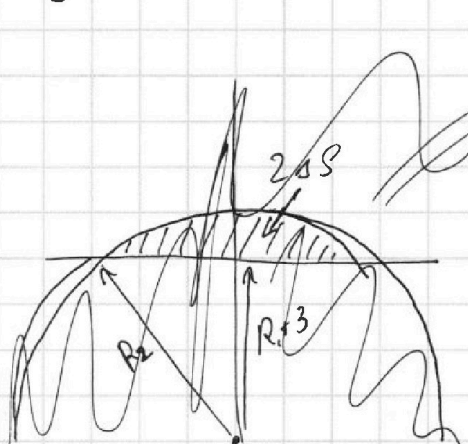
При ~~каждом~~ повороте от центра
80° в любой момент
любая точка $\geq R_1$, но $\leq R_2$ и
принимает любое значение
между ними, т.е.
 Φ - площадь фигуры



$\Rightarrow$ площадь совм. фигур $S = \frac{\pi(R_2^2 - R_1^2)}{2} + S' + \Delta S$

$S' = 3 \cdot 18\sqrt{3} = 54\sqrt{3}$

ΔS - площадь



уравн. кривой: $y = \sqrt{R_2^2 - x^2} - (R_1 + 3)$

$\Delta S = \frac{9\sqrt{3}(R_1 + 3)}{2} = \frac{\pi R_2^2 - 360\alpha}{360}$

$R_2 = \sqrt{9^2 + 3 \cdot 9^2} = 18$

$R_1 = \sqrt{3} \cdot 6$

$\sin \alpha = \frac{9\sqrt{3}}{R_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

$\Delta S = \frac{\pi \cdot 18^2 - 360 \cdot 60}{360} - \frac{9\sqrt{3} \cdot 9}{2} = 54\pi - \frac{81\sqrt{3}}{2}$

$S = \frac{\pi(18^2 - 6^2)}{2} + 54\sqrt{3} + 108\pi - 81\sqrt{3} = 252\pi - 27\sqrt{3} = 252\pi - 27\sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & x \geq y \geq z \quad |x| \leq |y| \leq |z| \quad \begin{array}{r} 512 \\ 7 \\ \hline 3584 \\ 28 \\ \hline 270 \end{array} \quad 3556 \\
 & xy = 3z + z^2 \quad x, y < 0 \quad z > 0 \\
 & yz = 3x + x^2 \quad x < y \quad |x| > y \quad z < |x| \\
 & yz \leq x^2 \quad \begin{array}{r} 2 \cdot 4^4 + 32 = 4^6 - 4 \\ 2^9 - 2^{12} = 2^9 \cdot 2 \end{array} \quad yz = 3x + x^2 \\
 & xy + 3x + 3y + 9 = 3z + 3y + 3x + z^2 + 9 \quad |y| > 2 \\
 & (x+3)(y+3) = (z+3)^2 + 3y + 3x - 3z \quad \begin{array}{l} 0 = 3(3-y)(y+1) \\ 0 = (y-3)(y+1) \cdot 3 \end{array} \\
 & \quad \quad \quad z^2 + (y-3)z + y^2 - 3y = 0 \\
 & (yz + 3x + 9) + (xz + 3y + 9) + (xy + 3z + 9) \quad (y-3)y \\
 & \quad \quad \quad z = \frac{y-3 \pm \sqrt{3(3-y)(y+1)}}{2} \\
 & yz + 1.5z + 1.5y + 2.25 = (y+1.5)(z+1.5) \\
 & (x+1.5)(y+1.5) + (x+1.5)(z+1.5) + (y+1.5)(z+1.5) + 6.25 \cdot 3 \\
 & 3y^2 + y^3 = 3z^2 + z^3 \quad K = \frac{3y + y^2}{z} \quad \begin{array}{r} 144 \\ 288 \\ \hline 106 \\ 252 \end{array} \\
 & yz = 3x + x^2 \quad 3(y-2)(y+z) = 2^3 - y^3 = (2-y)(z^2 + zy + y^2) \\
 & yz^3 = 2 \quad 3(y+z) = z^2 + yz + y^2 \\
 & (z-y)(z^2 + zy + y^2) \quad z^2 + \frac{yz}{2} + 32 = -y^2 - \frac{yz}{2} + 3y \\
 & \quad \quad \quad 2^3 + 2^2y + 2y^2 - yz^2 - 2y^2 - y^3 \\
 & xt = 3t^2 + t^2 \quad x = 3 + t \quad x = 1 \quad 2(2 + \frac{y}{2} + 3) = \\
 & t^2 = 3x + x^2 \quad t^2 = 9 + 3t + t^2 + 6t + 9 \quad = -y(y + \frac{z}{2} - 3) \\
 & kt = 9t^2 - 18 \quad t = -2
 \end{aligned}$$