



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 13



1. [5 баллов] На дуге полукруга с диаметром MN и центром O взята точка K . Построен треугольник ABC такой, что его вершина A лежит на отрезке OK , вершина B — на отрезке ON , вершина C — на дуге KN . Найдите отношение площади сектора $МОК$ к площади полукруга, если известно, что $AC = BC = OM$ и $\angle ACB = 72^\circ$.

2. [4 балла] Найдите все натуральные a и b такие, что

$$\begin{cases} \min(a; b) = 7|a - b|, \\ 7 \cdot \max(a, b) = 8(\text{НОД}(a; b))^2 - 64. \end{cases}$$

3. [4 балла] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие неравенству

$$\sqrt{y+3-10x} + \frac{1}{\sqrt{10x-1-y}} > y^2 + 12y.$$

4. [3 балла] Петя загадал такие вещественные числа x, y, z , что выражения

$$\frac{x(y-z)}{y(z-x)} \quad \text{и} \quad \frac{2y(z-x)}{z(y-x)}$$

принимают одно и то же значение A . Найдите все возможные значения A , если известно, что их не менее двух.

5. [5 баллов] Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AB , а H — ортогональная проекция точки D на AB . Диагональ AC пересекает отрезок DH в точке X . Найдите CD , если $DH = 20$, $AX = 15$, $CX = 36$.
6. [5 баллов] Решите уравнение $\sqrt[4]{8x+1} = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{9x-1}$.
7. [5 баллов] Сколькими способами из натуральных чисел от 2002 до 2025 можно выбрать 6 чисел так, чтобы среди выбранных чисел нашлось 3 числа, дающих одинаковые остатки от деления на 8?

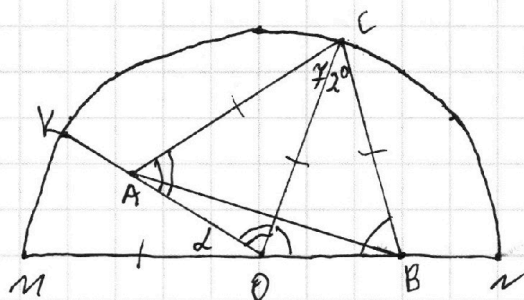


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: полуокр. $(O; d=MN)$; $K \in U_{MN}$;
 $A \in OK$; $B \in ON$; $C \in UKN$; $AC=BC=ON$;
 $\angle ACB = 72^\circ$

$$\frac{S_{\text{МОК}}}{S_{\text{МОН}}} = ?$$

Реш: 1) Пусть $\angle MOK = \alpha \Rightarrow \angle KON = 180^\circ - \alpha$

2) $MN = d \Rightarrow OM = ON = r \Rightarrow AC = BC = r$

3) Д. н. сег. $C \in O$; O - центр $\Rightarrow OC = r \Rightarrow AC = BC = OC \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ACO$ и $\triangle BCO$ - равнобедренные $\Rightarrow \angle ACO = \angle CAO$; $\angle CBO = \angle COB$

$\Rightarrow \angle ACO + \angle CBO = \angle AOB = 180^\circ - \alpha$

4) В любом 4-нике сумма углов равна 360° $\Rightarrow$

$\Rightarrow 180^\circ - \alpha + 180^\circ - \alpha + \angle ACB = 360^\circ$;

$2\alpha = \angle ACB$; $2\alpha = 72^\circ$; $\alpha = 36^\circ \Rightarrow \angle MOK = 36^\circ$

$$5) S_{\text{МОК}} = \frac{\pi r^2 \cdot \angle \text{МОК}}{360^\circ}$$

$$S_{\text{МОН}} = \frac{\pi r^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{S_{\text{МОК}}}{S_{\text{МОН}}} &= \frac{\pi r^2 \cdot \angle \text{МОК} \cdot 2}{360^\circ \cdot \pi r^2} = \frac{\angle \text{МОК}}{180^\circ} = \\ &= \frac{36^\circ}{180^\circ} = \frac{1}{5} = 0,2 \end{aligned}$$

Ответ: 0,2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b \in \mathbb{N}; a; b = ?$$

$$\begin{cases} \min(a; b) = 7|a-b| \\ 7 \cdot \max(a; b) = 8(\gcd(a; b))^2 - 64 \end{cases}$$

~~Решение~~

Заметим, что если a и b поменять местами, то равенства сохраниваются, поэтому все пары $(a; b)$ при $a > b$ будут соответствовать парам $(b; a)$ при $b < a$

1. $a = b$;

$$\min(a; b) \in \mathbb{N}; 7|a-b| = 0 \Rightarrow \min(a; b) \neq 7|a-b| \Rightarrow \text{таких } a \text{ и } b \text{ нет.}$$

2. $a > b$

$$\gcd(a; b) = \gcd(a-b; b)$$

$$\min(a; b) = 7|a-b|$$

$$\begin{aligned} b = 7a - 7b; & \Rightarrow b = a - b \Rightarrow \gcd(a; b) = a - b \\ 8b = 7a; & a = \frac{8}{7}b \end{aligned} \quad \left| \Rightarrow \gcd(a; b) = \frac{1}{7}b \right.$$

$$7 \max(a; b) = 8(\gcd(a; b))^2 - 64$$

$$7a = 8 \cdot \left(\frac{1}{7}b\right)^2 - 64$$

$$8b = 8\left(\frac{1}{49}b^2 - 8\right); \quad b^2 - 49 - 49 \cdot 8 = 0 \quad | \cdot 49;$$

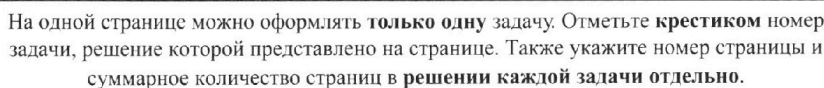
$$b^2 - 49 - 49 \cdot 8 = 0$$

$$\begin{aligned} D &= 49 \cdot 49 + 4 \cdot 49 \cdot 8 = 49 \cdot (49 + 32) = \\ &= 49 \cdot 81 = 7 \cdot 63^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} b = \frac{49+63}{2} = 56 \\ b = \frac{49-63}{2} = -7 \end{cases} \Rightarrow b = 56 \Rightarrow a = \frac{56 \cdot 8}{7} = 64$$

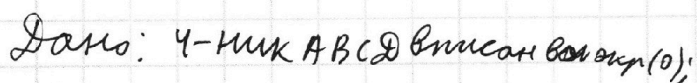
$\Rightarrow$ при $a < b$ получим пару $a = 56; b = 64$

$$\text{ответ: } \begin{cases} a = 56; b = 64 \\ a = 64; b = 56 \end{cases}$$



СТРАНИЦА
2 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



AB — диаметр; $H \in AB$; $2OH \perp AB$;

$$D \cap AC = X; |X| = 20; |AX| = 15;$$
$$Cx = 36$$
$$CQ = 7$$

Дем: 1) Д. н. Д. н. $\cap$ окр⁽⁰⁾ в м. Д. н.

~~Colg. #14~~

$$\text{ZD}_2 \perp AB = H; AB - \text{grundriss} \Rightarrow \text{ZH} = H_2,$$

2) $\pi_{\text{yemb}} \times H = x \mid \Rightarrow \mathbb{D}_7 H = 20 + x \mid \Rightarrow H \mathbb{D}_7 = 20 + 2x$

$$3) A \subset \mathcal{D}, \mathcal{D} = X$$

AC-Kongra

~~ДК~~ ДД₇-нога

$$1. CX \cdot XA = 2X \cdot X2;$$

$$36 \cdot 15 = 20 \cdot (20 + 2x)$$

$$20 + 2x = 9 \cdot 3 = 27.$$

$$2x = 7, x = \frac{3,5}{1} \Rightarrow HX = 3,5; H_2 = 23,5$$

4) $\angle CXD = \angle HXA$ (Bspm)

5) $\Delta HXA; \angle H = 90^\circ$ б) $\cos \angle HXA = \frac{HX}{XA} = \frac{3,5}{15} = \frac{7}{30} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos \angle C \times D = \frac{7}{30}$$

6) $\triangle C X D$; no. T. ~~Ke~~ $\therefore CD^2 = CX^2 + DX^2 - 2 \cdot CX \cdot DX \cdot \cos 40^\circ$

$$12^2 = 36^2 + 20^2 - 2 \cdot 36 \cdot 20 \cdot \frac{7}{30} = 1296 + 400 - 2 \cdot 12 \cdot 2 \cdot 7 =$$

$$= 1896 - 336 = 1360$$

$$CQ = \sqrt{7360} = 4\sqrt{85}$$

Answer: $4\sqrt{85}$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

от 2022 до 2025; всего чисел 24

6 чисел, 3 из которых имеют одинаковые остатки при делении на 8

остатки на 8:

0: 2008; 2016; 2024

1: 2009; 2017; 2025

2: 2002; 2010; 2018

⋮

7: 2007; 2015; 2023

везде по 3 числа.

Возьмем 1-ую группу и любые 3 числа из оставшихся

9 групп так, чтобы эти 3 числа не принадлежали ни одной группе, ~~а также~~

$$C_{21}^3 - 7 = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17}{6} - 7 = 1323$$

Если брать другую группу, получим только те случаи

$$1323 \cdot 8 = 10584$$

Поскольку можем рассмотреть кол-во случаев, когда будут выбраны 2 группы по 3 числа с одинаковыми остатками: ~~C_{21}^2~~ $C_8^2 = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$

$$\text{Всего: } 10584 + 28 = 10612$$

Ответ: 10612

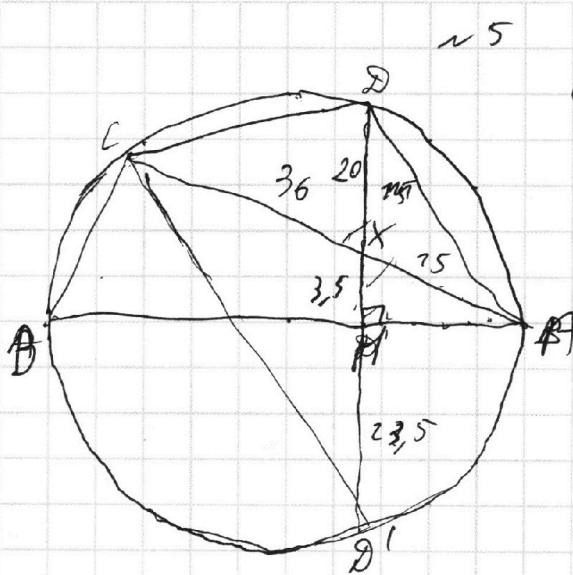


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} & \sim 5 \quad 1360 \div 5 = 272, \quad 1360 \div 4 = 340, \quad \sqrt{1360} = 2\sqrt{340} = 4\sqrt{85} \\ & (20 + ?)^2 = 10216 \quad 340 \div 85 = 4\sqrt{85} \\ & \lambda H = k, \quad HD = 20 + k, \quad HM = 20 + 2k \\ & 36 \cdot 15 = 20(20 + 2k) \\ & 9 \cdot 3 = 20 + 2k \\ & 7 = 2k, \quad k = 3,5 \Rightarrow DH = HM = 23,5 \\ & \cos \angle H A = \frac{3,5}{7,5} = \frac{7}{15} = 23,5 \\ & (20 + 400 + \dots) \end{aligned}$$

$$\sqrt[4]{8k+1} = \sqrt[4]{k} + \sqrt[4]{9k-1}, \quad k \geq \frac{1}{9}$$

$$8k+1 = k + 4\sqrt[4]{k^3(9k-1)} + 6\sqrt[4]{k(9k-1)} + 4\sqrt[4]{k(9k-1)^3} + 9k-1$$

от 2002 до 2025 ~ 7 6 чисел ~~по~~, 3 из них ~~нельзя~~.
ошибка на 8: ~~одно из~~ ~~ошибка~~ ~~ошибка~~

0: 2008; 2016; 2024

1: 2009; 2017; 2025

2: 2002; 2010; 2018

...

...

7: 2007; 2015; 2023

без разл. чисел.

$$7+6+5+\dots+1 = 28$$

$$\begin{aligned} & \frac{29 \cdot 28}{2 \cdot 38} = \frac{21 \cdot 12}{3! \cdot 18!} \cdot 12 + \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 2}{5} = 194 + 28 = \\ & = 7980 - 14648 = 7864 \\ & C_{21}^3 C_{13}^2 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{y+3-10x} + \frac{1}{\sqrt{10x-1-2y}} > y^2 + 12y \quad \begin{matrix} x, y \in \mathbb{Z} \\ (x, y) = ? \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 10x < y+3 \\ 10x > -y-1 \end{cases} \quad \begin{matrix} -y-1 < y+3 \\ 10y > -4; y > -0.4 \end{matrix}$$

$y > 0$

$$\begin{aligned} xy - xz &= Ayz - Axy; \\ xy(A+1) &= xz - Ayz \\ &= z(Ay+x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ayz - Axz &= 2yz - 2xy; \\ yz(A-2) &= x(Az - 2y) \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b = (\log(a; b))^2 - 8; \quad a + 8 = (\log(a; b))^2$$

$$7a = 7 \cdot \frac{8}{7} b = 8b$$

$$b + 8 > 14$$

$$b : 7 \cdot 1 = 18 > 0$$

$$a : 8 \cdot 1 = 2 > 7$$

$$\begin{cases} 7a + 64 = (\log(a; b))^2 - 8 \\ b + 8 = (\log(a; b))^2 \end{cases}$$

$$\log 224 = 7.32$$

$$(28; 32); (32; 28)$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ 288 \\ - 64 \\ \hline 224 \end{array} \quad \frac{7}{32}$$

$$\log(a; b) = k$$

$$56; \log(a; b) = 8; a = 64; (56; 64); (64; 56)$$

$$\log(a; b) = a - b = \frac{1}{7} b$$

$$6 + b = a^2 - 2ab + b^2; \quad b^2 + \frac{64}{49} b^2 - 2 \cdot \frac{16}{7} b^2 - b^2 + b - 8 = 0$$

$$(49 + 64 - 112) b^2 - 49b - 392 = 0$$

$$b + 8 = \frac{1}{49} b^2 \quad b^2 - 49b - 392 = 0$$

$$D = 49^2 + 4 \cdot 49 \cdot 8 = 49 \cdot (49 + 32) = 49 \cdot 81 = (21 \cdot 3)^2$$

$$\begin{cases} b = \frac{49 + 63}{2} = 56 \Rightarrow a = 64 \\ b = \frac{49 - 63}{2} = -7 \text{ - не в.} \end{cases}$$

$$\sim 4 \quad y + x; y + 0; y - z + x; z \neq 0$$

$$\frac{x(y - z)}{y(z - x)} = \frac{2y(z - x)}{z(y - x)} = A; A = ?$$

$$zx(y^2 - xy - yz + xz) = 2y^2(z^2 - 2xz + x^2)$$

$$y^2 z x - x^2 z y - z^2 x y + x^2 z^2 = 2y^2 z^2 + 2y^2 x^2 - 2x z y^2$$

$$7. \max_{\beta} g(\alpha; \beta) = 7 - \frac{8}{7} \beta = 8\beta = 70; \quad 8\beta = 8(120 \log(\alpha; \beta) - 8); \quad \beta = 8(120 \log(\alpha; \beta) - 8)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

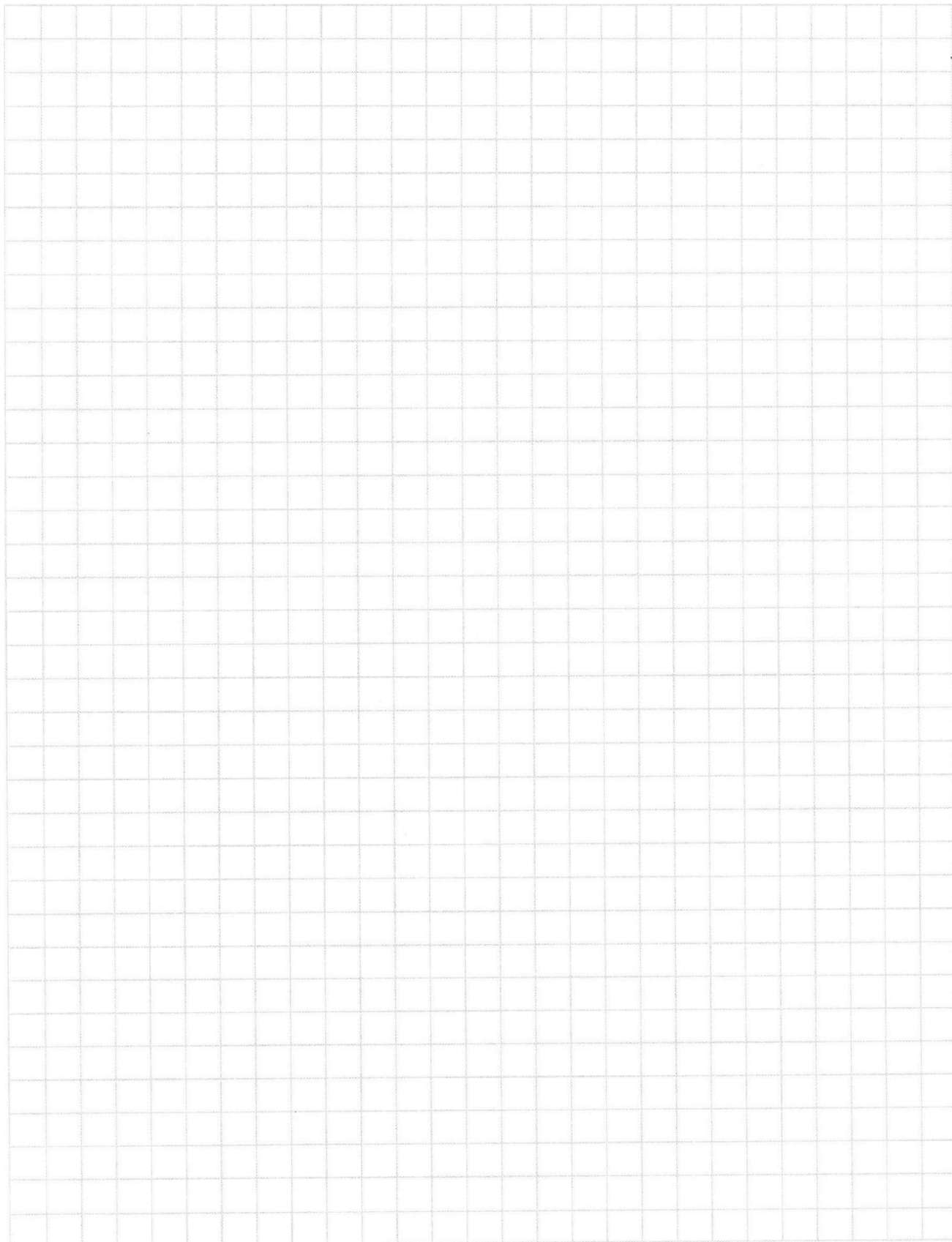
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

