



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 14



- ✓1. [5 баллов] На дуге полукруга с диаметром MN и центром O взята точка K . Построен треугольник ABC такой, что его вершина A лежит на отрезке OK , вершина B — на отрезке ON , вершина C — на дуге KN . Найдите отношение площади сектора $МОК$ к площади полукруга, если известно, что $AC = BC = OM$ и $\angle ACB = 108^\circ$.

- ✓2. [4 балла] Найдите все натуральные a и b такие, что

$$\begin{cases} 2 \cdot \max(a; b) = 13|a - b|, \\ 8 \cdot \min(a; b) = 11(\text{НОД}(a; b))^2 - 99. \end{cases}$$

- ✓3. [4 балла] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие неравенству

$$\sqrt{x + 4 - 6y} - \frac{1}{\sqrt{6y - 2 - x}} > x^2 + 10x.$$

- ✓4. [3 балла] Петя загадал такие вещественные числа x, y, z , что выражения

$$\frac{4x(z - y)}{y(z - x)} \quad \text{и} \quad \frac{3y(z - x)}{4z(y - x)}$$

принимают одно и то же значение A . Найдите все возможные значения A , если известно, что их не менее двух.

- ✓5. [5 баллов] Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AB , а H — ортогональная проекция точки D на AB . Диагональ AC пересекает отрезок DH в точке X . Найдите CD , если $DX = 2$, $AX = 3$, $CX = 4$.
- ✓6. [5 баллов] Решите уравнение $\sqrt[4]{x+1} = 2\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{81x-1}$.
- ✓7. [5 баллов] Сколькими способами из натуральных чисел от 2025 до 2045 можно выбрать 6 чисел так, чтобы среди выбранных чисел нашлось 3 числа, дающих одинаковые остатки от деления на 7?



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

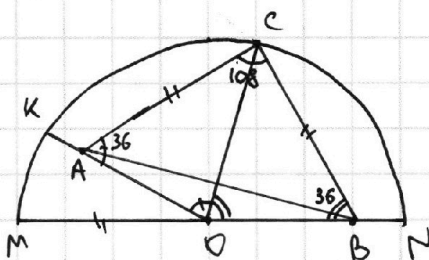
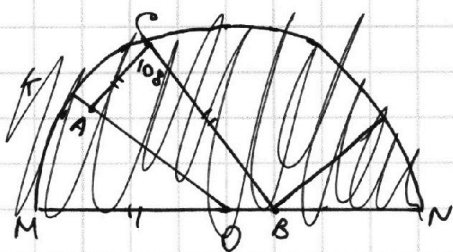
1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 3



Пусть радиус полуокружности - R

MN - диаметр $\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow OM = ON = OB = OA = R \\ TO - \text{центр} \end{array} \right.$

Площадь полуокружности: $S_{\pi} = \frac{1}{2} \pi R^2$

Соединим TO и TC : $OC = R$

$\Rightarrow OC = OA \Rightarrow \triangle OAC$ - равнобедр. $\Rightarrow \angle CAO = \angle COA$

$OB = OC \Rightarrow \triangle OCB$ - равнобедр. $\Rightarrow \angle COB = \angle CBO$

$\angle ACB + \angle CAO + \angle COA + \angle COB + \angle CBO = 2\angle AOB + \angle ACB = 360^\circ \Rightarrow \angle AOB = \frac{360^\circ - \angle ACB}{2} =$

$= 180^\circ - \frac{\angle ACB}{2} = 180^\circ - 54^\circ = 126^\circ$

$\angle KOM = 180^\circ - \angle KON = 54^\circ$

$S_{\text{сек}} = \frac{\angle KOM}{360^\circ} \cdot \pi R^2 = \frac{54^\circ}{360^\circ} \cdot \pi R^2 = \frac{3}{20} \pi R^2$

$\frac{S_{\text{сек}}}{S_{\pi}} = \frac{\frac{3}{20} \pi R^2}{\frac{1}{2} \pi R^2} = \frac{3}{10}$

ОТВЕТ: 3:10



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☒3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~?

$$\begin{cases} 2 \max(a, b) = 13|a - b| \\ f \min(a, b) = 11(\text{НОД}(a, b))^2 - 99 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1) a > b &\Rightarrow \max(a, b) = a \\ \min(a, b) &= b \\ |a - b| &= a - b \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2a = 13(a - b) & (1) \\ fb = 11(a, b)^2 - 99 & (2) \end{cases}$$

$$(1) : 2a = 13a - 13b$$

$$13b = 11a$$

$$\Rightarrow b : 11 \\ a : 13$$

$$\text{Пусть } b = 11n \Rightarrow 13b = 13 \cdot 11n = 11a \Rightarrow a = 13n \\ (n \in \mathbb{N})$$

$$fbn = 11(13n, 13n)^2 - 99$$

$$fn = (13n, 13n)^2 - 9 = ((13, 11)n)^2 - 9$$

$$(11, 13) \nmid (13n, 13n) \nmid (13n, 13n) \Rightarrow (11, 13) \nmid 1 \Rightarrow fn = n^2 - 9$$

$$fn = n^2 - 9 \Rightarrow n^2 - fn - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n \neq 1 \notin \mathbb{N} \Rightarrow \text{не подходит} \\ n = 9 \Rightarrow a = 117 \\ b = 99 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2) a < b &\Rightarrow \max(a, b) = b \\ \min(a, b) &= a \\ |a - b| &= b - a \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 2b = 13(b-a) & (1) \\ 8a = 11(a+b)^2 - 99 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Из (1): } 2b = 13b - 13a$$

$$13a = 11b \Rightarrow a:13 \Rightarrow b=13n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{В } 13a = 11 \cdot 13n \Rightarrow a=11n$$

$$8n = 11(11n, 13n)^2 - 99$$

$$8n = (11n, 13n) - 99$$

$$(11a, 13a) = 11 \cdot n^2 - 9$$

$$(11, 13) = 1 \Rightarrow (11n, 13n) = (n, n) = 1$$

$$8n = n^2 - 9$$

$$n^2 - 8n - 9 = 0$$

$$n = -1 \notin \mathbb{N} \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$n = 9 \Rightarrow a = 99$$

$$b = 117$$

$$\text{Ответ: } (a, b) = (99, 117) \text{ или } (a, b) = (117, 99)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
5 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ОТВЕТ: $(-9, -3), (-3, 0)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3) \sqrt{x+4-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y-2-x}} < 0 \Rightarrow x^2 + 10x \leq 0 \text{ (т.к. положительное не может быть меньше отрицательного)} \Rightarrow x \in (-10, 0), x \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$$

$$1) x = -3: \sqrt{3-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y-1}} > 3-10 = -9 \quad | \cdot \sqrt{6y-1} > 0$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3-6y \geq 0 \Rightarrow y \leq \frac{1}{2} \\ 6y-1 > 0 \Rightarrow y > \frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow y \in (\frac{1}{6}; \frac{1}{2}) \Rightarrow \text{нет таких } y \in \mathbb{Z}$$

$$2) x = -2: \sqrt{2-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y}} < 4+20 = 24-16$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 6y > 0 \Rightarrow y > 0 \\ 2-6y \geq 0 \Rightarrow y \leq \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow y \in (0; \frac{1}{3}] \Rightarrow \text{нет таких } y \in \mathbb{Z}$$

$$3) x = -3: \sqrt{1-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y+1}} > +9+30 = 39-21$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 1-6y \geq 0 \Rightarrow y \leq \frac{1}{6} \\ 6y+1 > 0 \Rightarrow y > -\frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow y \in (-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}) \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{x+4-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y-2-x}} = 0 - \text{не подходит}$$

$$4) x = -4: \sqrt{-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y+2}} < 16+40 = 56-24$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} -6y \geq 0 \Rightarrow y \leq 0 \\ 6y+2 > 0 \Rightarrow y > -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow y \in (-\frac{1}{3}; 0] \Rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+4-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y-2-x}} = \sqrt{0} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} < -24 - \text{не правдо} \\ \Rightarrow \text{не подходит}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5) x = -5: \sqrt{-1-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y+3}} > 25-50 = -25$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} -1-6y \geq 0 \Rightarrow y \leq -\frac{1}{6} \\ 6y+3 > 0 \Rightarrow y > -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y \in (-\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}] \Rightarrow \text{нет таких } y \in \mathbb{Z}$$

~~$$\sqrt{-1-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y+3}} > 25-50 = -25$$~~

$$6) x = -6: \sqrt{-2-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y+4}} > 36-60 = -24$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} -2-6y \geq 0 \Rightarrow y \leq -\frac{1}{3} \\ 6y+4 > 0 \Rightarrow y > -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow y \in (-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}] \Rightarrow \text{нет таких } y \in \mathbb{Z}$$

$$7) x = -7: \sqrt{-3-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y+5}} > 49-70 = -21$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} -3-6y \geq 0 \Rightarrow y \leq -\frac{1}{2} \\ 6y+5 > 0 \Rightarrow y > -\frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow y \in (-\frac{5}{6}; -\frac{1}{2}] \Rightarrow \text{нет таких } y \in \mathbb{Z}$$

$$8) x = -8: \sqrt{-4-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y+6}} > 64-80 = -16$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} -4-6y \geq 0 \Rightarrow y \leq -\frac{2}{3} \\ 6y+6 > 0 \Rightarrow y > -1 \end{cases} \Rightarrow y \in (-1; -\frac{2}{3}] \Rightarrow \text{нет таких } y \in \mathbb{Z}$$

$$9) x = -9: \sqrt{-5-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y+7}} > +81-90 = -9$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} -5-6y \geq 0 \Rightarrow y \leq -\frac{5}{6} \\ 6y+7 > 0 \Rightarrow y > -\frac{7}{6} \end{cases} \Rightarrow y \in (-\frac{7}{6}; -\frac{5}{6}] \Rightarrow y = -1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+4-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y-2-x}} = 0 \Rightarrow \text{не логично}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{(t+4)(-t-2)} \geq 1$$

$$-(t+4)(-t-2) = 1$$

$$-t^2 - 6t - 8 = 1$$

$$t^2 + 6t + 9 = 0$$

$$(t+3)^2 = 0 \Rightarrow t = -3 \Rightarrow x = 6y - 3$$

$$x^2 + 10x < 0 \Rightarrow x(x+10) < 0$$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ -10 \quad 0 \end{array} \xrightarrow{x}$$

$$x \in (-10; 0), x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$$

$$x = -9: -9 = 6y - 3 \Rightarrow 6y = -6 \Rightarrow y = -1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{подходит}$$

$$x = -8: -8 = 6y - 3 \Rightarrow 6y = -5 \Rightarrow y = -\frac{5}{6} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$x = -7: -7 = 6y - 3 \Rightarrow 6y = -4 \Rightarrow y = -\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$x = -6: -6 = 6y - 3 \Rightarrow 6y = -3 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$x = -5: -5 = 6y - 3 \Rightarrow 6y = -2 \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$x = -4: -4 = 6y - 3 \Rightarrow 6y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{6} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$x = -3: -3 = 6y - 3 \Rightarrow y = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{подходит}$$

$$x = -2: -2 = 6y - 3 \Rightarrow 6y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{6} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$x = -1: -1 = 6y - 3 \Rightarrow 6y = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{не подходит}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

1 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sim 6^3$

$$\sqrt{x+4-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y-2-x}} > x^2+10x$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+4-6y \geq 0 \Rightarrow 6y \leq x+4 \\ 6y-2-x > 0 \Rightarrow 6y > x+2 \end{cases}$$

$$1) \sqrt{x+4-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y-2-x}} \geq 0$$

$$\text{Пусть } x-6y=t$$

$$\sqrt{t+4} - \frac{1}{\sqrt{-t-2}} > 0 \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} t \geq -4 \\ t < -2 \end{cases} \Rightarrow t \in [-4; -2)$$

$$\sqrt{t+4} > \frac{1}{\sqrt{-t-2}} \quad | \cdot \sqrt{-t-2} > 0$$

$$\sqrt{(-t-2)(t+4)} > 1$$

$$\sqrt{-t^2-2t-4t-8} > 1$$

$$-t^2-6t-8 > 1$$

$$t^2+6t+9 < 0$$

$$(t+3)^2 < 0 \Rightarrow \text{нет таких } t \Rightarrow \text{такого быть не может}$$

$$2) \sqrt{x+4-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y-2-x}} = 0$$

$$\text{Пусть } x-6y=t \Rightarrow \sqrt{t+4} - \frac{1}{\sqrt{-t-2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{t+4} = \frac{1}{\sqrt{-t-2}} \quad | \cdot \sqrt{-t-2} \neq 0$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \geq -4 \\ x < -2 \end{cases} \Rightarrow x \in [-4; -2)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~4

$$A = \frac{4x(z-y)}{y(z-x)} = \frac{3y(z-x)}{4z(y-x)}$$

ОДЗ: $z \neq y \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$

$$16xz(z-y)(y-x) = 3y^2(z-x)^2$$

$$16xz(yz - xz - y^2 + xy) = 3y^2(z^2 - 2zx + x^2)$$

$$16xyz^2 - 16x^2z^2 - 16xy^2z + 16x^2yz = 3y^2z^2 - 6xy^2z + 3x^2y^2$$

$$16xyz^2 - 16x^2z^2 - 10xy^2z + 16x^2yz - 3y^2z^2 - 3x^2y^2 = 0$$

Пусть $\begin{cases} xy = a \\ yz = b \\ xz = c \end{cases} \Rightarrow A = \frac{4(c-a)}{b-a} = \frac{3(b-a)}{4(b-c)} \Rightarrow \frac{b-a}{b-c} = \frac{4}{3}A$

$$16xz \cdot yz - 16(xz)^2 - 10xy \cdot yz + 16xy \cdot xz - 3(yz)^2 - 3(xy)^2 = 0$$

$$16bc - 16c^2 - 10ab + 16ac - 3b^2 - 3a^2 = 0$$

$$-8c^2 + 2 \cdot 2 \cdot 2c \cdot 2b - 8b^2 - 8c^2 + 2 \cdot 2 \cdot 2c \cdot 2a - 8a^2 - 10ab + 5b^2 + 5a^2 = 0$$

$$-2(2c-2b)^2 - 2(2c-2a)^2 + 5(a-b)^2 = 0$$

$$8(c-b)^2 + 8(c-a)^2 = 5(a-b)^2 \quad | \cdot \frac{2}{(b-a)^2}$$

$$8\left(\frac{xz-yz}{b-a}\right)^2 + 8\left(\frac{xz-xy}{b-a}\right)^2 = 5\left(\frac{a-yz}{b-a}\right)^2$$

$$8z^2\left(\frac{x-y}{b-a}\right)^2 + 8x^2\left(\frac{z-y}{b-a}\right)^2 = 8y^2\left(\frac{x-z}{b-a}\right)^2$$

$$8 \frac{(c-b)^2}{(b-a)^2} + 8 \frac{(c-a)^2}{(b-a)^2} = 10$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~16~~ $\left(\frac{3}{4A}\right)^2 + A^2 = 10$

$x \neq y \neq z \neq 0$
 $\frac{9}{A^2} - 10 + A^2 = 0 \quad | \cdot A^2 \neq 0$

$A^4 - 10A^2 + 9 = 0$

$A^2 = 1 \Rightarrow A = \pm 1$

$A^2 = 9 \Rightarrow A = \pm 3$

~~Пример:~~
 ~~$A = 1: x=6, y=8, z=3 \Rightarrow A = \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{8 \cdot 3} = 1 = \frac{3 \cdot 8 \cdot 3}{4 \cdot 9 \cdot 2}$~~
 ~~$A = -1: x=6, y=8, z=3 \Rightarrow A = \frac{-4 \cdot 6 \cdot 8}{8 \cdot 3} = -1 = \frac{3 \cdot 8 \cdot 3}{4 \cdot 9 \cdot 2}$~~

~~27~~ ~~100~~

~~ОТВЕТ: $A = \pm 1$ и $A = \pm 3$~~

Пример для $A = 1$

$x = 6$

$y = 8, z = 3: A = \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{8 \cdot 3} = 1 = \frac{3 \cdot 8 \cdot 3}{4 \cdot 9 \cdot 2}$

Пример для $A = 3$

$x = 11$

$y = 176, z = -4$

$A = \frac{44 \cdot (-180)}{176 \cdot 15} = 3 = \frac{3 \cdot 176 \cdot (-15)}{4 \cdot (-4) \cdot 165} = 3$

Покажем, что:

$A \neq 1$

$A \neq 3$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Докажем, что $A \neq -3$. Допустим, что это не так

$$A = \frac{4x(z-y)}{y(z-x)} = -3$$

$$4xz - 4xy = 3yx - 3yz$$

$$4xz + 3yz = 7yx \quad (1)$$

$$A = \frac{3y(z-x)}{4z(y-x)} = -3$$

$$3yz - 3xy = 12xz - 12yz$$

$$15yz = 12xz + 3xy$$

$$5yz = 4xz + xy \Rightarrow xy = 5yz - 4xz \quad (2)$$

Подставим (2) в (1): ~~4xz + 3yz~~ $4xz + 3yz = 35yz - 28xz$

$$32xz = 32yz$$

$$x = \frac{19}{16}y \quad (3)$$

Подставим (3) в (1): $\frac{19}{16}yz + 3yz = \frac{133}{16}y^2$

$$76z + 48z = 133y$$

$$z = \frac{133}{124}y$$

$$A = \frac{4 \cdot \frac{19}{16}y \left(\frac{133}{124}y - y \right)}{y \left(\frac{133}{24}y - \frac{19}{16}y \right)} = \frac{\frac{19}{4} \cdot \frac{9}{124}}{\frac{266-57}{48}} = \frac{\frac{19 \cdot 9}{496}}{\frac{209}{48}} = \frac{19 \cdot 9 \cdot 48}{496 \cdot 209} = \frac{19 \cdot 9 \cdot 6}{62 \cdot 209} \neq -3$$

$\Rightarrow A \neq -3$

ОТВЕТ: $A = 1$ или $A = 3$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Докажем, что $A \neq -1$. Пусть это не так

$$A = \frac{4x(z-y)}{y(z-x)} = -1$$

$$4xz - 4xy = xy - yz$$

$$4xz + yz = 3xy$$

$$A = \frac{3y(z-x)}{4z(y-x)} = -1$$

$$3yz - 3xy = 4xz - 4yz$$

$$7yz = 3xy + 4xz = 4xz + yz + 4xz$$

$$6yz = 8xz$$

$$y = \frac{4}{3}x$$

$$4xz + \frac{4}{3}xz = 4x^2$$

$$3z + 4z = 3x$$

$$4z = 3x \Rightarrow z = \frac{3}{4}x$$

$$x=12, y=16, z=9$$

$$A = \frac{\cancel{4 \cdot 12 \cdot (-7)}}{\cancel{16 \cdot (-3)}} \cdot \frac{4x(\frac{3}{4}x - \frac{4}{3}x)}{\frac{4}{3}xy(\frac{3}{4}x - x)} = \frac{-\frac{7}{12} \cdot 4x^2}{-\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3}x^2} = \frac{-\frac{7}{3}}{-\frac{1}{3}} = 7x - 1$$

$\Rightarrow$ не подходит



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

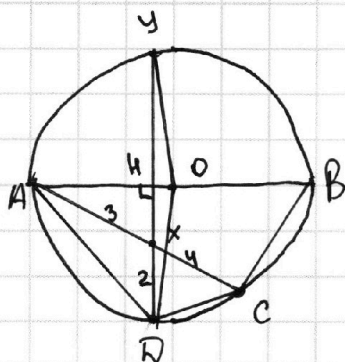
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~5



Продлим HD до пересечения с окружностью.
Получим $\tau\gamma$

TO - центр окружности

Рассмотрим $\triangle O\gamma H$ и $\triangle ODH$ - прямоугольные:

1) $\gamma O = OD$ (как радиусы)
2) OH - общая
 $\Rightarrow \triangle O\gamma H = \triangle ODH$ (по гипотенузе и катету)

$\Rightarrow \gamma H = HD$

Пусть $HX = a \Rightarrow HD = 2+a \Rightarrow \gamma H = 2a \Rightarrow \gamma H = 2+a+a = 2+2a$

$\gamma D \perp AC = \tau x$
 $\gamma D, AD$ - хорды $\Rightarrow \gamma H \cdot HD = AH \cdot HC$
 $(2+2a)2 = 4 \cdot 3$

$$4(1+a) = 4 \cdot 3$$

$$a+1=3$$

$$a=2 \Rightarrow HX=2$$

$\triangle AHX$ - прямоугольный $\rightarrow \cos \angle HXA = \frac{HX}{AX} = \frac{2}{3}$

$\angle DXC = \angle HXA$ (как вертикальные) $\Rightarrow \cos \angle DXC = \cos \angle HXA = \frac{2}{3}$

по т. косинусов для $\triangle DXC$: $DC^2 = DX^2 + XC^2 - 2DX \cdot XC \cdot \cos \angle DXC =$

$$= 4 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} = 20 - \frac{32}{3} = \frac{28}{3} = \frac{4}{9} \cdot 21 \Rightarrow DC = \frac{2}{3} \sqrt{21}$$

ОТВЕТ: $CD = \frac{2}{3} \sqrt{21}$



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 42

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{33}{8} = \frac{22a^3 + 6a^2c + 4ac^2}{5a^3 + 3a^2c - ac^2 + c^3}$$

$$165a^3 + 99a^2c - 33ac^2 + 33c^3 = 176a^3 + 48a^2c + 32ac^2$$

$$1) a \neq 0 \text{ и } c \neq 0$$

$$9) 11a^3 - 51a^2c + 65ac^2 - 33c^3 = 0 \quad | : a^3$$

$$\frac{11}{t^3} - \frac{51}{t^2} + \frac{65}{t} - 33 = 0 \quad | \cdot t^3$$

$$\text{Пусть } \frac{c}{a} = t$$

$$\frac{11}{t} - 51 + 65t - 33t^2 = 0 \quad | \cdot -t \neq 0$$

$$33t^3 - 65t^2 + 11t - 51 = 0$$

По формуле Кардана получаем, что

$$f(t) = 33t^3 - 65t^2 + 11t - 51 \Rightarrow f'(t) = 99t^2 - 130t + 11 \Rightarrow \frac{65 \pm \sqrt{5314}}{99}$$

$$\text{Найдем экстремумы } \Rightarrow f'(t) = 0 \Rightarrow 99t^2 - 130t + 11 = 0 \Rightarrow t = \frac{65 \pm \sqrt{5314}}{99}$$

$$\text{При } t < \frac{65 - \sqrt{5314}}{99} \text{ и } t > \frac{65 + \sqrt{5314}}{99} : f'(t) > 0 \Rightarrow f(t) \text{ возрастает}$$

$$2) a = 0 \Rightarrow x = -1 \notin \mathbb{R} \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$3) c = 0 \Rightarrow x = 0 \notin \mathbb{R} \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$\text{При } t \in \left(\frac{65 - \sqrt{5314}}{99}, \frac{65 + \sqrt{5314}}{99} \right)$$

$f(t)$ убывает

Т.к. $a > 0$ и $c > 0$, то $t > 0$

Подставим значения t , при которых произв. $= 0 \Rightarrow$ обе точки $\Rightarrow$ график возрастает:

$\Rightarrow$ корни меньше 0

$\Rightarrow$ нет таких $t \rightarrow$ нет таких a и $c \rightarrow$ нет таких x

Ответ: нет корней



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 6

$$\sqrt[4]{x+1} = 2\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{81x-1}$$

$$\text{Пусть } \sqrt[4]{x+1} = \sqrt[4]{16x} + \sqrt[4]{81x-1}$$

$$\text{Пусть } \begin{cases} a = \sqrt[4]{x+1} \\ b = \sqrt[4]{16x} \\ c = \sqrt[4]{81x-1} \end{cases} \begin{cases} a^4 - 1 = x+1-1 = x = \frac{b^4}{16} \\ 5b^4 + a^4 = 81x+1 = 81x+1 = c^4+2 \end{cases}$$

$$a = b+c \Rightarrow b = a-c \Rightarrow b^4 = (a-c)^4 \quad (3)$$

$$16(a^4-1) = b^4 \quad (1)$$

$$5b^4 + a^4 = c^4 + 2 \quad (2)$$

$$(1) \rightarrow (2): 80a^4 - 80 + a^4 = c^4 + 2$$

$$81a^4 - 82 = c^4 \Rightarrow 81a^4 - c^4 = 82 = (9a^2+c^2)(9a^2-c^2) = (9a^2+c^2) \cdot (3a+c)(3a-c) \quad (4)$$

$$(3) \rightarrow (1): 16(a^4-1) = (a-c)^4$$

$$16a^4 - (a-c)^4 = 2^4$$

$$3a((2a)^2 + (a-c)^2)((2a)^2 - (a-c)^2) = 2^4 = 16$$

$$((2a)^2 + (a-c)^2)(3a-c)(a+c) = 16$$

$$(5a^2 - 2ac + c^2)(3a+c)(3a-c) = 16 \quad (5)$$

$$\frac{(4)}{(5)}: \frac{82}{16} = \frac{41}{8} = \frac{(9a^2+c^2)(3a+c)}{(5a^2-2ac+c^2)(a+c)} = \frac{27a^3+9a^2c+3ac^2+c^3}{5a^3+5a^2c-7a^2c-7ac^2+ac^2+c^3} =$$

$$= \frac{27a^3+9a^2c+3ac^2+c^3}{5a^3+3a^2c-ac^2+c^3} = 1 + \frac{22a^3+6a^2c+4ac^2}{5a^3+3a^2c-ac^2+c^3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 7
Разобьем числа от 2025 до 2045 на группы:

1) числа $\equiv 0 \pmod 7$: 2030, 2037, 2044

2) числа $\equiv 1 \pmod 7$: 2031, 2038, 2045

3) числа $\equiv 2 \pmod 7$: 2025, 2032, 2039

4) числа $\equiv 3 \pmod 7$: 2026, 2033, 2040

5) числа $\equiv 4 \pmod 7$: 2027, 2034, 2041

6) числа $\equiv 5 \pmod 7$: 2028, 2035, 2042

7) числа $\equiv 6 \pmod 7$: 2029, 2036, 2043

$\Rightarrow$ В каждой группе ровно 3 числа $\Rightarrow$ Среди 6 чисел должна быть хотя бы 1 группа

Решение каждой группы

8) Среди 6 чисел 1 полная группа и 3 числа из разных 3 групп:

~~и наоборот~~ выбрать одну полную группу - 7 вариантов

1 число - $21 - 3 = 18$ вариантов (подходят все числа, кроме тех, что уже выбрали)

2 число - $21 - 3 - 3 = 15$ вариантов (подходят все, кроме тех, что в 1 группе и той группе, где 1 число)

3 число - $21 - 3 - 3 = 12$ вариантов (подходят все, кроме тех, что в 1 группе и тех групп, где 1 и 2 числа)

$\Rightarrow$ всего $7 \cdot 18 \cdot 15 \cdot 12$ вариантов



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

② Среди 6 чисел одна полная группа, 2 числа из одной другой группы и 3 числа из 11 группы

Выборить одну полную группу - 7 вариантов

Выборить 2 числа из одной группы - ~~3~~ 3 варианта

(это тоже самое, что и выбрать оставшееся число)

Выборить группу, из которой возьмем 2 этих числа : 6 вариантов

Выборить 3 число - $5 \cdot 3 = 15$ вариантов / 5 групп по 3 варианта в каждой)

$\Rightarrow$ Всего : $7 \cdot (3 \cdot 6) \cdot 15$ вариантов

③ Выборить 2 группы:

Выборить I - 7 вариантов

Выборить II - 6 вариантов

$\Rightarrow$ Всего 7·6 вариантов

$\Rightarrow 7 \cdot 18 \cdot 15 \cdot 12 + 7 \cdot 18 \cdot 15 + 7 \cdot 6 = 7 \cdot 18 \cdot 15 \cdot (12+1) + 7 \cdot 6 = 7 \cdot 18 \cdot 15 \cdot 13 + 7 \cdot 6 = 24612$
- общее число вариантов

Ответ: 24612 вариантов



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \frac{4x(z-y)}{y(z-x)} = 3$$

$$4xz - 4xy = 3yz - 3yx$$

$$4xz = 3yz + yx$$

$$A = \frac{3y(z-x)}{4z(y-x)} = 3$$

$$3yz - 3xy = 12yz - 12xz$$

$$12xz = 9yz + 3xy$$

$$4xz = 3yz + xy$$

$$\frac{16}{15}$$

3.

$$x=1, y=16$$

$$\frac{4(z-y)}{4(z-x)} = 3$$

$$z-y = 12z - 12x$$

$$z - 16 = 12z - 12$$

$$x=1 \quad 3y(z-1) = 4z(y-1)$$

$$yz - y = 4yz - 4z$$

$$11z = -4$$

$$z = -\frac{4}{11}$$

$$\frac{11}{176} - 4$$

$$\frac{44}{176} - \frac{4}{11}$$

$$\frac{44 \cdot (-180)}{176 - 15} = \frac{4 \cdot 180}{16 \cdot 15} = \frac{180}{90} = 2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$\sqrt[4]{x+1} = 2\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{81x-1}$$

Пусть $\sqrt[4]{x+1} = a \geq 0$

$$\sqrt[4]{x} = b \geq 0$$

$$\sqrt[4]{81x-1} = c \geq 0$$

$$\begin{cases} a^4 = b^4 + 1 & (1) \\ a = 2b + c & (2) \\ 81b^4 - 1 = c^4 & (3) \end{cases}$$

~~Прогнозируем (2) < b(4): (2b+c)^4 = b^4 + 1~~

$$(4b^3 + 4bc + c^3) = b^4 + 1$$

$$16b^4 + 16b^2c^2 + c^4 = b^4 + 1$$

$$(1) + (3): 81b^4 - 1 + b^4 + 1 = a^4 + c^4$$

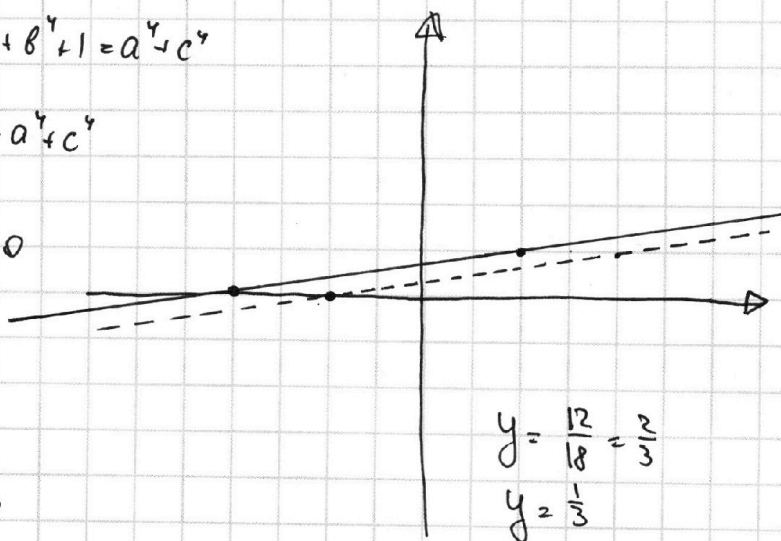
$$82b^4 = a^4 + c^4$$

$$\sqrt{4-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y-2}} \geq 0$$

$$4-6y \geq \frac{1}{6y-2}$$

$$-36y^2 + 24y + 12y - 8 \geq 0$$

$$36y^2 - 36y + 8 \leq 0 \Rightarrow 9y^2 - 9y + 2 \leq 0 \quad 81 - 9 \cdot 8 = 9$$



$$y = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}$$



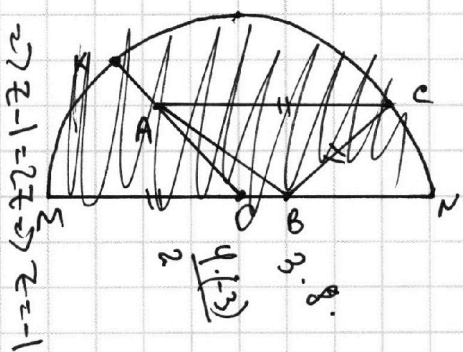
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 2 \\ \frac{4 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} &= \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x &= 6 \\ y &= 8 \\ z &= 6 \end{aligned}$$

$$6yz = 8zx$$

$$6yz = 4xz + 4xz + yz$$

$$6yz = 4xz + 3xy$$

$$6xz + yz = 3xy$$

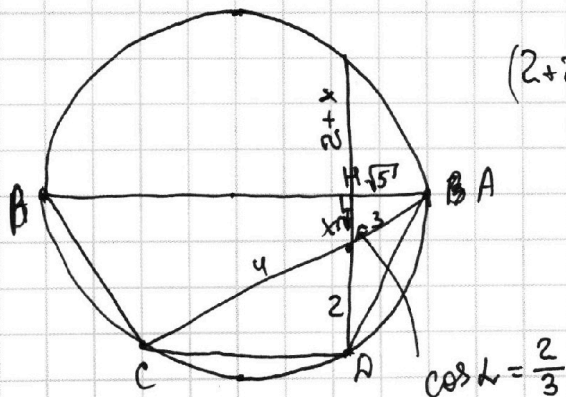
$$4xz - 4xy = 8y - yz$$

$$\frac{4 \cdot 6(8-8)}{8(8-6)}$$

$$\frac{4 \cdot 6(7.5-8)}{8 \cdot 7.5-6}$$

$$(2+2x)z = 4 \cdot 3$$

$$\begin{aligned} (1+x) &= 3 \\ x &= 2 \end{aligned}$$



$$\cos \angle = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} CA &= \sqrt{6+4-4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{20}{3}} \\ &= \sqrt{20 - \frac{32}{3}} = \sqrt{\frac{28}{3}} = \sqrt{\frac{28}{3}} \end{aligned}$$

$$3yz - 3yx = 4xz - 4yz$$

$$4xz - 3yz = 3yz + yx$$

$$4xz - 4xy = 3yz - 3yx$$

$$yz - yx = 4zy - 4zx$$

$$\frac{33}{824} - \frac{65}{8} - \frac{11}{3} + 51$$

$$7 \cdot 6(45 \cdot 13 + 1)$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 45 \\ \hline 65 \\ 52 \\ \hline 585 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4586 \\ \times 42 \\ \hline 1172 \\ 2344 \\ \hline 24612 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2025 \quad | \quad 7 \\ \underline{14} \\ 62 \\ \underline{62} \\ 65 \\ \underline{63} \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2030 \\ \underline{14} \\ 63 \\ \underline{63} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{4 \cdot 6(x-8)}{8(x-6)} &= \frac{4 \cdot 6(18-3x)}{8(18-3x)} \\ &= \frac{4 \cdot 6 \cdot 3(6-x)}{8 \cdot 3(6-x)} \\ &= \frac{4 \cdot 6}{8} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☒

2
☒

3
☒

4
☒

5
☒

6
☒

7
☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~898~~ ~~3 4225 + 1089 = 5314~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

