



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 13



1. [5 баллов] На дуге полукруга с диаметром MN и центром O взята точка K . Построен треугольник ABC такой, что его вершина A лежит на отрезке OK , вершина B — на отрезке ON , вершина C — на дуге KN . Найдите отношение площади сектора $МОК$ к площади полукруга, если известно, что $AC = BC = OM$ и $\angle ACB = 72^\circ$.

2. [4 балла] Найдите все натуральные a и b такие, что

$$\begin{cases} \min(a; b) = 7|a - b|, \\ 7 \cdot \max(a, b) = 8(\text{НОД}(a; b))^2 - 64. \end{cases}$$

3. [4 балла] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие неравенству

$$\sqrt{y+3-10x} + \frac{1}{\sqrt{10x-1-y}} > y^2 + 12y.$$

4. [3 балла] Петя загадал такие вещественные числа x, y, z , что выражения

$$\frac{x(y-z)}{y(z-x)} \quad \text{и} \quad \frac{2y(z-x)}{z(y-x)}$$

принимают одно и то же значение A . Найдите все возможные значения A , если известно, что их не менее двух.

5. [5 баллов] Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AB , а H — ортогональная проекция точки D на AB . Диагональ AC пересекает отрезок DH в точке X . Найдите CD , если $DX = 20$, $AX = 15$, $CX = 36$.
6. [5 баллов] Решите уравнение $\sqrt[3]{8x+1} = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{9x-1}$.
7. [5 баллов] Сколькими способами из натуральных чисел от 2 002 до 2 025 можно выбрать 6 чисел так, чтобы среди выбранных чисел нашлось 3 числа, дающих одинаковые остатки от деления на 8?

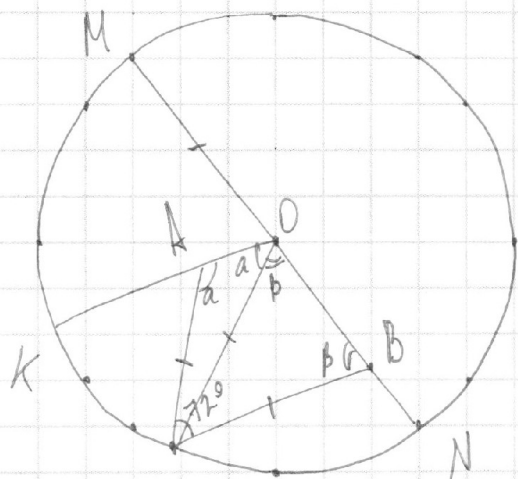


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Т.к. O - центр полуокружности, то O лежит на середине отрезка $MN \Rightarrow OM = ON = \text{радиус}$.

Аналогично CO - радиус;

Обозначим радиус полуокружности как R
 $\Rightarrow AC = BC = OM = ON = R$

(C лежит на дуге $MN \Rightarrow OC$ - радиус)

$\triangle CAO$ равнобедренный, как и $\triangle OCB$ (т.к.

$AC = OC, OC = BC$)

$\Rightarrow \angle CAO = \angle AOC \stackrel{\text{a}}{=} \alpha$, а $\angle COB = \angle OBC \stackrel{\text{b}}{=} \beta$.

$\Rightarrow \angle ACO = 180^\circ - 2\alpha$, $\angle OCB = 180^\circ - 2\beta$

$\Rightarrow 180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\beta = 72^\circ$

$\Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 360^\circ - 72^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$

$\Rightarrow$ Попробуем $\angle KON \equiv \angle AOB = \alpha + \beta = 144^\circ$

$\Rightarrow$ Т.к. $\angle MON = 100^\circ$ (дуга MN) $\Rightarrow \angle MOK = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$.

$\Rightarrow S_{\text{МОК}} = \frac{S_{\text{круж}} \cdot 36^\circ}{360^\circ} = \frac{S_{\text{круж}}}{10}$

$S_{\text{полуокруж}} = \frac{S_{\text{круж}} \cdot 180^\circ}{360^\circ} = \frac{S_{\text{круж}}}{2}$

$\Rightarrow \frac{S_{\text{МОК}}}{S_{\text{полуокруж}}} = \frac{\frac{S_{\text{круж}}}{10}}{\frac{S_{\text{круж}}}{2}} = \frac{2}{10} = 0,2$

Значит искомое отношение равно $0,2$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a \leq b$. (В силу симметрии выражений для a и b это неважно, это больше a или b , но предположим, что b)

$$\Rightarrow \begin{cases} a = a_1 \cdot \text{НОД}(a, b) \\ b = b_1 \cdot \text{НОД}(a, b) \end{cases} \quad \text{НОД}(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} c \quad c \in \mathbb{N}, \text{ а также } a_1 \text{ и } b_1 \text{ взаимнопросты.}$$

Имея начальную систему, подставим туда полученные равенства:

$$\begin{cases} \min(a, b) = 7|a - b| \\ 7 \cdot \max(a, b) = b(\text{НОД}(a, b))^2 - 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7|a - b| \\ 7b = bc^2 - 64 \end{cases}$$

Т.к. $b > a \Rightarrow |a - b| = b - a$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 7(b - a) \\ 7b = bc^2 - 64 \end{cases} \quad \text{Теперь подставим вместо } a \text{ и } b \text{ значения } a_1 c \text{ и } b_1 c:$$

$$\begin{cases} a_1 c = 7(b_1 - a_1)c \\ 7b_1 c = bc^2 - 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 7b_1 - 7a_1 \\ 7b_1 c = bc^2 - 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7b_1 = 8a_1 \\ bc^2 - 7b_1 c - 64 = 0 \end{cases}$$

Т.к. ранее мы написали, что a_1 и b_1 взаимнопросты $\Rightarrow$

$$b_1 = \frac{8a_1}{7} \Rightarrow b_1 = 8, a_1 = 7 - \text{это единственный вариант для } a_1 \text{ и } b_1$$

$$\Rightarrow bc^2 - 56c - 64 = 0 \quad / : 8 \Rightarrow c^2 - 7c - 8 = 0$$

$$D = 49 + 32 \Rightarrow \text{Т.к. } c \text{ не может быть } \geq 0, \text{ то}$$

$$c = \frac{7 + \sqrt{49 + 32}}{2} = 8 \Rightarrow a = 7 \cdot 8 = 56 \quad b = 8 \cdot 8 = 64$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

В кратце рассмотрим, почему, если $a \geq b$, ответ получится для симметричности:

$$\begin{cases} b = 7|a-b| & (\text{Так } a \geq b, \text{ то } |a-b| = a-b) \\ 7a = b^2 - b^4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b, c = 7(a-b) & \Rightarrow b_1 = 7a_1 \Rightarrow a_1 = b_1, b_1 = 7. \\ 7a_1 - c = b^2 - b^4 \Rightarrow 9c^2 - 56c - 64 = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$c^2 - 7c - 8 = 0$$

$$D = 7^2 + 32 \Rightarrow \text{Так } c \geq 0, \text{ то } c = \frac{7 + \sqrt{7^2 + 32}}{2} = 8$$

$$\Rightarrow a = 64, b = 56$$

Получили симметричные ответ:

Все возможные пары (a, b) : ~~$(56, 64)$~~ ; $(64, 56)$; $(56, 64)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Запишем уравнение и несколько условий для его выполнения:

$$\sqrt{y+3-10x} + \frac{1}{\sqrt{10x-1-y}} > y^2+12y$$

$$\begin{cases} y+3-10x \geq 0 & (1) \\ 10x-1-y > 0 & (2) \end{cases}$$

Из (1) и (2) выразим y :

$$\begin{cases} y \geq 10x-3 \\ y < 10x-1 \end{cases}$$

Т.к. $x, y \in \mathbb{Z}$, то y может равняться либо $10x-3$, либо $10x-2$.

$$10x-3 \leq y < 10x-1$$

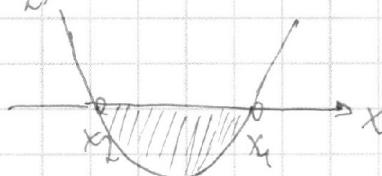
1) Рассмотрим вариант, когда $y = 10x-3$, подставим y в первоначальное выражение:

$$\sqrt{10x-3+3-10x} + \frac{1}{\sqrt{10x-1-10x+3}} \neq 10x^2-60x+9+120x-36$$

$$100x^2+60x-\left(25+\frac{12}{2}\right) \neq 0 \quad (\text{Решим данное квадратное уравнение})$$

$$D = 60^2 + 4 \cdot 100 \cdot \left(25 + \frac{12}{2}\right) = 3600 + 10000 + 200\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-60 + \sqrt{D}}{200} \\ x_2 = \frac{-60 - \sqrt{D}}{200} \end{cases}$$



$$\Rightarrow x \in \left(\frac{-60 + \sqrt{3600 + 200\sqrt{2}}}{200}; \right.$$

$$\left. \frac{-60 + \sqrt{3600 + 200\sqrt{2}}}{200} \right), x \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Очевидно, что т.к. $y = 10x - 3$, то при $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$, соответственно каждому x соответствует какой-то единственный y . (у столько же, сколько и x).
(x, y) пар будет столько, сколько решений x .

Аналогично построим во второй, когда $y = 10x - 2$:

$$\sqrt{40x - 2 + 5 - 10x} + \frac{1}{\sqrt{10x - 1 - 10x + 2}} > 100x^2 - 40x + 4 + 120x - 24$$

$$1 + 1 > 100x^2 + 80x - 20$$

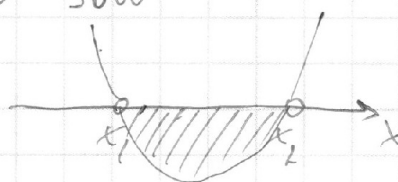
$$100x^2 + 80x - 22 < 0 \quad / : 2$$

$$50x^2 + 40x - 11 < 0 \quad (\text{решим квадратное уравнение})$$

$$D = 1600 + 220 \cdot 11 = 1600 + 2420 = 4020$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-40 - \sqrt{4020}}{100}$$

$$x_2 = \frac{-40 + \sqrt{4020}}{100}$$



$$\Rightarrow x \in \left(\frac{-40 - \sqrt{4020}}{100}, \frac{-40 + \sqrt{4020}}{100} \right); x \in \mathbb{Z}$$

Тут точно также т.к. $y = 10x - 2$, где каждому x есть только 1 y , значит пар (x, y) будет столько, сколько удовлетворяет x решению.

значит в итоге пар получится в сумме где x всего систем столько, сколько в сумме удовлетворяет x (1-й и 2-й уравнения).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$13600 + 200\sqrt{2} \approx 13600 + 141 \cdot 200 = 13600 + 282 = 13882.$$

Найти границу значений x для 1-го случая:

$$\sqrt{2100} < \sqrt{13882} < \sqrt{14400} \Rightarrow 110 < \sqrt{13882} < 120$$

$$\Rightarrow x_{\min} = \frac{-60 + 60}{200} = 0.$$

$$x_{\max} = \frac{-60 + 60}{200} = 0$$

В 1-м случае удовлетворяет только

$x = 0$ (1 случай для $x \Rightarrow 1$ пара (x, y))

Найти границу значений x для 2-го случая:

$$\sqrt{3600} < \sqrt{3600} < \sqrt{4900} \Rightarrow 60 < \sqrt{3600} < 70$$

(В обоих случаях или ^{округляем} ~~расчетное~~ ^{расчетное} значение до десятков, т.к. -40 или -60).
Она больше

$$\Rightarrow x_{\min} = \frac{-40 - 60}{100} = -1$$

$$x_{\max} = \frac{-40 + 40}{100} = 0$$

Во 2-м случае удовлетворяет 2

x ($x = 0$ и $x = -1$) $\Rightarrow$

для 2-го случая 2 пары (x, y)

$\Rightarrow$ Всего получается $1 + 2 = 3$ пары (x, y) :

$(0, -3); (0, -2); (-1, -12).$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt[4]{8x+1} = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{8x-1}$$

$$\sqrt[4]{8x+1} - \sqrt[4]{8x-1} = \sqrt[4]{x} \quad \text{Возводим в квадрат}$$

$$\sqrt{8x+1} + \sqrt{8x-1} = 2\sqrt{(8x-1)(8x+1)} = \sqrt{x}$$

$$\sqrt{8x-1} - 2\sqrt{(8x-1)(8x+1)} = \sqrt{x} - \sqrt{8x+1} \quad \text{Возводим в квадрат}$$

$$8x-1 + 4\sqrt{(8x-1)(8x+1)} = 2$$

$$\sqrt[4]{8x+1} = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{8x-1}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

У задачи [2002; 2025] всего можно взять 24 различных числа

$24 : 8 = 3 \Rightarrow$ Так всего 3 остатков при делении на 8 можно быть, то

можно взять максимум 3 числа, дающих одинаковые остатки на 8.

2002; 2010; 2018 - 2

2003; 2011; 2019 - 3

2004; 2012; 2020 - 4

2005; 2013; 2021 - 5

2006; 2014; 2022 - 6

2007; 2015; 2023 - 7

2008; 2016; 2024 - 0

2009; 2017; 2025 - 1

Здесь 1-й случай с остатком 2, мне

его пропустить (способом вычисления для 3-х чисел,

далее у 1-го числа или 2, далее у

2-го числа мы выбираем 4-е число, у

3-го числа выбираем 5-е число, у 4-го числа

5-е. Пусть мы рассуждаем так: у каждого

остатком 2 $\Rightarrow N = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 24 \cdot 20 \cdot 19 =$
 кол-во перестановок $= 6!$

$\Rightarrow N = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 24 \cdot 20 \cdot 19}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{7 \cdot 19}{10} =$

$$= \frac{70 + 63}{10} = \frac{133}{10} = 13,3$$

Приведем более пример, когда можно взять 3 числа, дающих одинаковые остатки при делении на 8.

Представим ситуацию, то нам нужен число, дающее при делении на 8 остаток

2, тогда мы должны взять эти три числа и еще можем выбрать 3

числа у 2 оставшихся, процесс в таком порядке не верно $\Rightarrow$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Вариант 1 вариант 7 имеет числа с остатком 2 и $\frac{71 \cdot 20 \cdot 19}{3!}$ способов взять

оставшиеся числа (C_4^3). Но также видно, что среди этих чисел есть способ, где мы взяли еще 3 числа с одинаковым остатком на 3, к примеру 3. Тогда мы должны будем учитывать эту комбинацию.

Но тогда всего способов для варианта 1 с остатком 2 будет

$$\frac{71 \cdot 20 \cdot 19}{3 \cdot 2} = 70 \cdot 19 = (70 + 63)10 = 1330.$$

Но там будет 1 вариант с остатком 3, 1 с остатком 4 и с еще 3 числами

так далее, но если будет 7 повторяющихся вариантов.

Но так мы еще должны учесть то, что для остатка 3, 4 ..., где также будет по 7 повторяющихся вариантов, но способа получить неповторяющиеся общее кол-во вариантов: $(1330 - 7) \cdot 3$ и останется для каждого варианта

по 7 повторяющихся способов: 78, но тут каждый способ повторится 2 раза

(к примеру остатки 111 и 533 или 333 и 111 в любой последовательности)

⇒ нужно взять и добавить к общему числу неповторяющихся способов половину

$$\begin{aligned} \text{от повторяющихся} &\Rightarrow (1330 - 7) \cdot 3 + \frac{7 \cdot 8}{2} = (1330 - 7) \cdot 3 + 28 = 1323 \cdot 3 + 28 = \\ &= 3969 + 28 = 10612 - \text{таким образом всего способов взять 6 чисел,} \end{aligned}$$

таких, что среди них имели одинаковые остатки от деления на 3.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

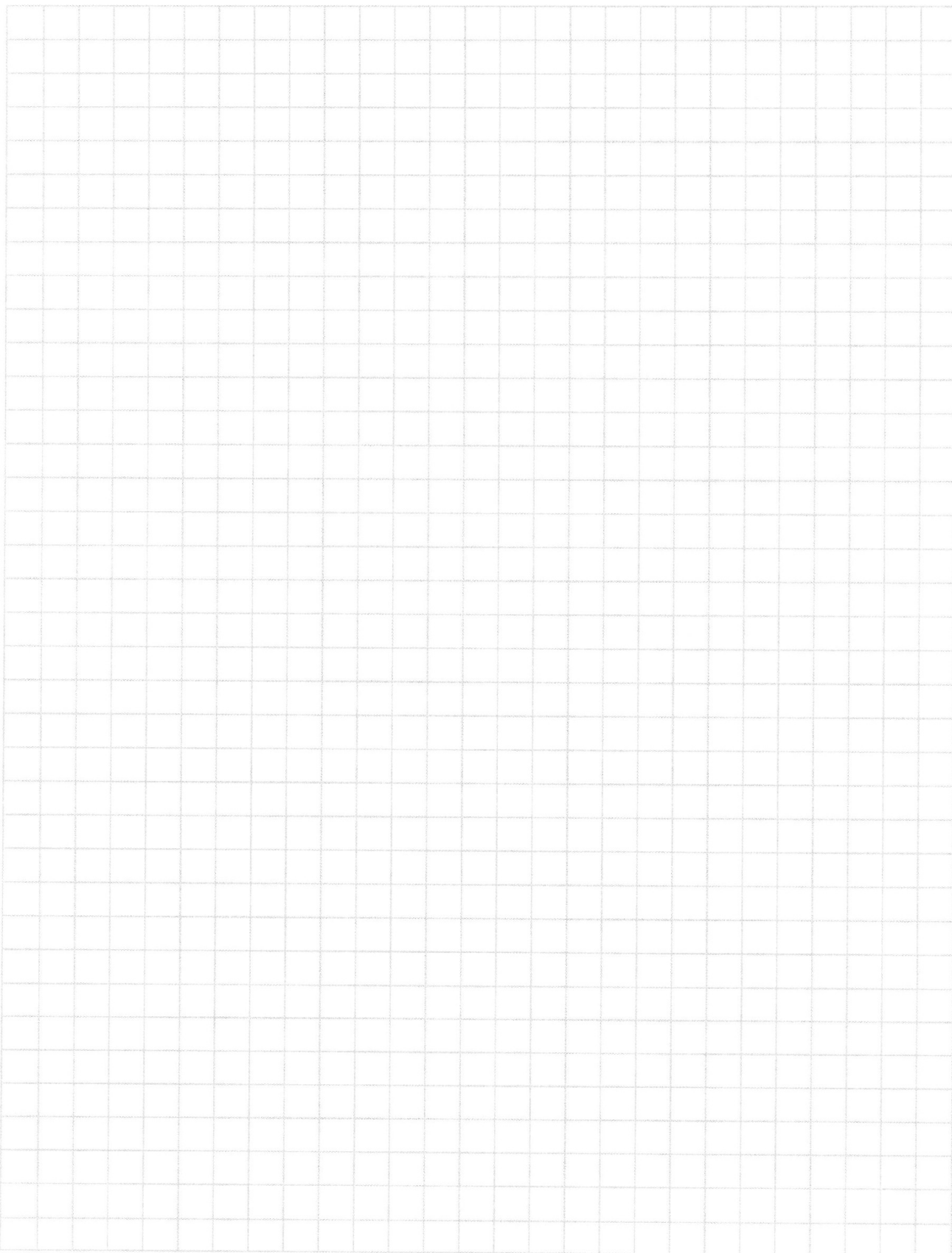
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

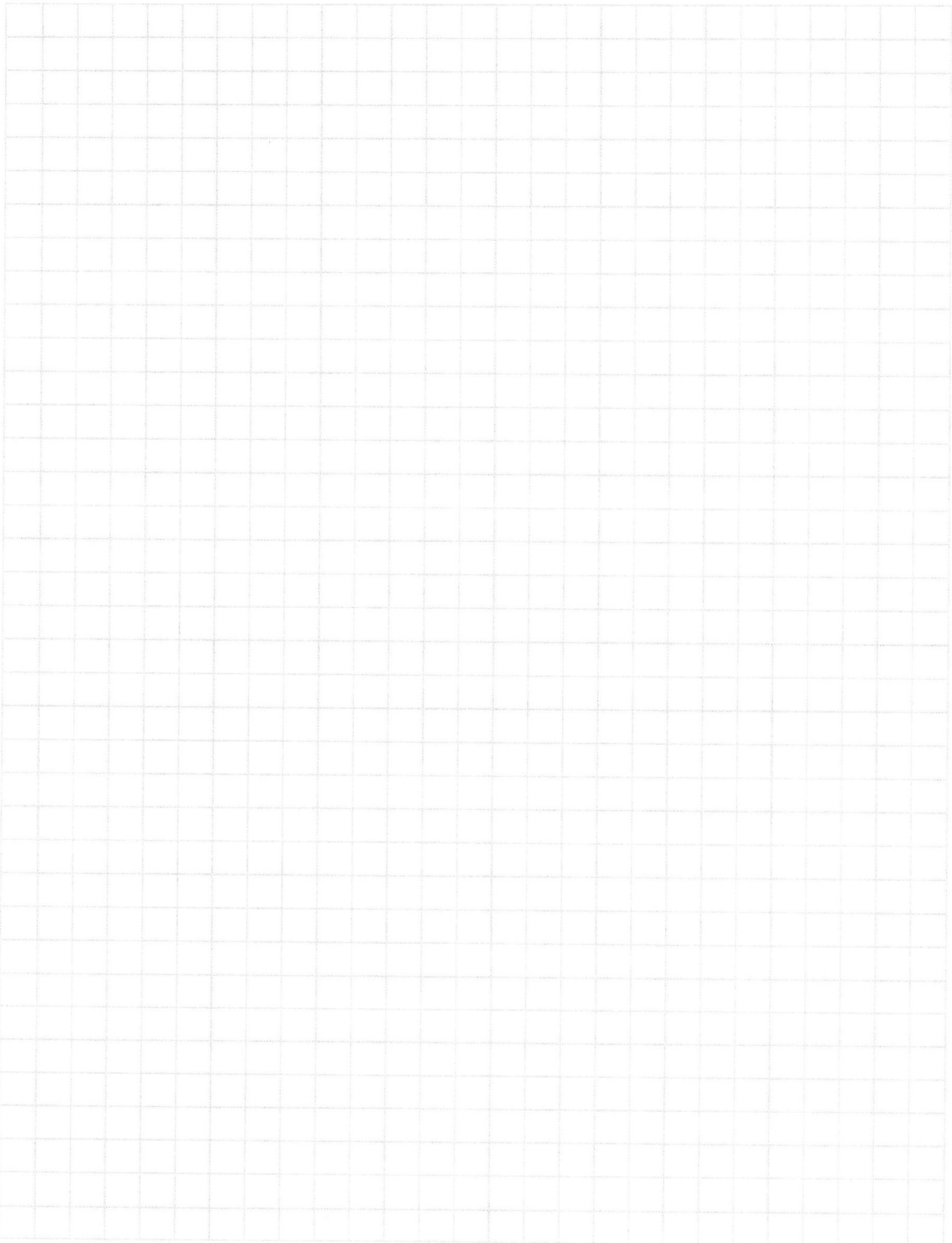
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2a + (100 - 2a) + (100 - 2b) = 72$$

$$300 - 2a - 2b = 72$$

$$a + b = \frac{288}{2} = 144$$

$$\sqrt{y+3-10x} + \frac{1}{\sqrt{10x-1-y}} > y^2 + 12y$$

Т.к. $\sqrt{a} \geq 0$, то $\sqrt{y+3-10x} \geq 0$, $\frac{1}{\sqrt{10x-1-y}}$

Т.к. в $\sqrt{10x-1-y}$ находится 1 радикал, то $10x-1-y \neq 0$
 Кроме того 10

$$\begin{cases} y+3-10x \geq 0 & y \geq 10x-3 \\ 10x-1-y > 0 & y < 10x-1 \end{cases}$$

$$10x-3 \leq y < 10x-1$$

$$\Rightarrow y \in \{10x-3; 10x-2\}$$

$$\begin{cases} y^2 + 12y < \sqrt{y+3-10x} + \frac{1}{\sqrt{10x-1-y}} \end{cases}$$

$$\sqrt{y-10x+3} \text{ и } \sqrt{(10x-y)-1}$$

$$0 \neq x \quad 2 \neq x \quad 1 \neq x$$

$$0 \neq z \quad 0 \neq h$$

$$y = \frac{(x-h)z}{(x-z)h} = \frac{(x-h)z}{(z-h)x}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 7a = 8a \\ c = \frac{7b + \sqrt{49b^2 + 64 \cdot 32}}{16} \end{cases}$$

Решение

Т.к. мы знаем, что a, b — целые числа, а c — натуральное, то a, b — натуральные, c — целое.

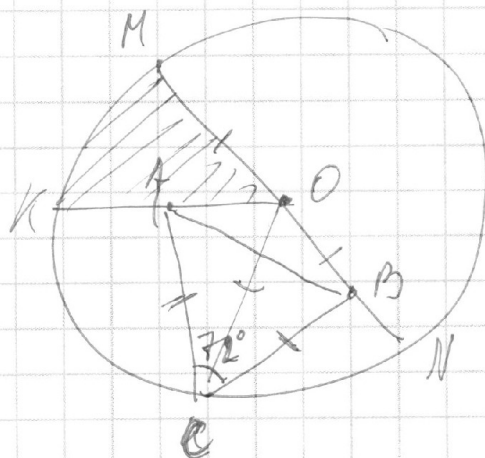
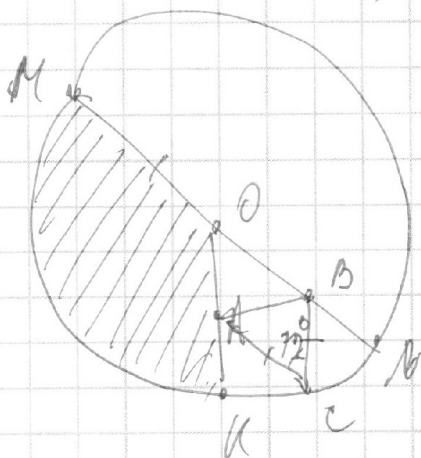
$$\rightarrow b = \frac{8a}{7}$$

$\rightarrow a = 7, b = 8$, то сумма квадратов:

$$\rightarrow c = \frac{7 \cdot 8 + \sqrt{49 \cdot 64 + 64 \cdot 32}}{16}$$

$$= \frac{7 \cdot 8 + 8\sqrt{49 + 32}}{16} = \frac{7 \cdot 8 + 8 \cdot 9}{16} = \frac{8(7 + 9)}{16} = 8$$

$$\Rightarrow a = 56, b = 64.$$



$$\cancel{76 + \sqrt{996^2 + 14 \cdot 32}} \quad \quad \quad \cancel{76 + \sqrt{996^2 + 32 \cdot 60}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Но по условию из решения 1 всегда будет > 0~~

~~$$7(a-b) = 8c^2 - 64 - 49(a-b)$$~~

~~$$\Rightarrow 8c^2 - 64 - 56(a-b) = 0$$~~

~~Вспомогательное $a = a_1 \cdot c, b = b_1 \cdot c \Rightarrow a-b = (a_1-b_1)c$~~

~~$$\Rightarrow 8c^2 - 56(a_1-b_1)c - 64 = 0$$~~

~~$$D = 56^2(a_1-b_1)^2 + 4 \cdot 8 \cdot 64 > 0$$~~

~~Значит c имеет 2 варианта ответа, но для конкретных~~

~~a и b — единственные $\Rightarrow$~~

Будем считать $b \geq a$:

$$\min(a, b) = a, \max(a, b) = b$$

$$\text{Аналогично } a = a_1 \cdot \text{НОД}(a, b)$$

$$b = b_1 \cdot \text{НОД}(a, b) \quad \left. \begin{array}{l} \text{НОД}(a, b) \\ = c \\ \neq 0 \end{array} \right\}$$

$\rightarrow$ Подставим полученные величины в каждую систему:

$$\begin{cases} a = 7(a-b) \\ 7 \cdot b = 8c^2 - 64 \end{cases}$$

$$|a-b| = [\text{т.к. } b \geq a] = b-a \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = 7(b-a) & (1) \\ 7b = 8c^2 - 64 & (2) \end{cases}$$

Должно быть 1) не 7 и тогда ~~у нас~~ $\neq 0$ $\Rightarrow$ 2.0

$$\begin{cases} 7a = 49(b-a) \\ 7b = 8c^2 - 64 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 7(b-a) = 8c^2 - 64 - 49(b-a) \\ 8c^2 - 56(b-a) - 64 = 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Также заменим b -ая $(b_1 - a_1) \cdot c$:

$$bc^2 - 56(b_1 - a_1)c - 64 \geq 0 \quad / : 8$$

$$c^2 - 7(b_1 - a_1)c - 8 \geq 0$$

$$D = 49(b_1 - a_1)^2 + 32 > 0$$

Т.к. мы берем конкретные числа a и b , то для них должен быть единственный $c > 0$, т.е. мы берем только 1 корень, который является положительным (хотя предположили 1 ^{положит} ~~предположили~~).

$$c = \frac{7(b_1 - a_1) + \sqrt{49(b_1 - a_1)^2 + 32}}{2}$$

~~$$\text{так } \sqrt{49(b_1 - a_1)^2 + 32} \geq 32$$~~

величина, что $b_1 - a_1 > 0$.

$\Rightarrow$ сравним $7(b_1 - a_1)$ и $\sqrt{49(b_1 - a_1)^2 + 32}$:

$$\sqrt{49(b_1 - a_1)^2} < \sqrt{49(b_1 - a_1)^2 + 32}$$

Очевидно, что 1 больше 1 $\Rightarrow$ всегда будет больше отриц. корень

$\Rightarrow$ необходимо будет только положительный

$$c = \frac{7(b_1 - a_1) + \sqrt{49(b_1 - a_1)^2 + 32}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a \geq b$
 $\Rightarrow \min(a, b) = b ; \max(a, b) = a$

Предположим, что
$$\left. \begin{aligned} a &= a_1 \cdot \text{НОД}(a, b) \\ b &= b_1 \cdot \text{НОД}(a, b) \end{aligned} \right\} \text{НОД}(a, b) = c.$$

Таким образом a_1 и b_1 не имеют общих делителей кроме 1.

$$\left\{ \begin{aligned} b &= 7|a-b| & (1) \\ 7 \cdot a &= 49c^2 - 64 & (2) \end{aligned} \right\} \text{Решим (1) на 7:}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} 7b &= 49|a-b| & (1) \\ 7a &= 49c^2 - 64 & (2) \end{aligned} \right\} (1) \text{ подставим в (2):}$$

$$\Rightarrow 7(a-b) = 49|a-b| + 49c^2 - 64$$

$$a > b \Rightarrow |a-b| = a-b$$

$$\Rightarrow 7(a-b) + 49c^2 - 64 = 0$$

$$a-b \geq 0, c^2 > 0 \Rightarrow$$

$$21(a-b) + 49c^2 - 32 = 0 \quad (\text{или получим некоторые ограничения на } a \text{ и } b.)$$

$$\text{Предположим } a = a_1 \cdot c, b = b_1 \cdot c,$$

$$49c^2 + 21(a_1 - b_1)c - 32 = 0$$

$$D = 21^2(a_1 - b_1)^2 + 32 \cdot 4 \cdot 49 > 0$$

$$c = (b_1 - a_1)21 \pm \sqrt{D}$$

Т.к. для конкретных a и b мы имеем единственную величину a_1, b_1 , $c \geq 1$ может иметь единственное решение $\Rightarrow D$ должен быть равен 0.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{x(y-z)}{y(z-x)} = A = \frac{2y(z-x)}{z(y-x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \neq x, z \neq x$$

$$zx(y-z)/(y-x) = 2y^2(z-x)^2$$

$$zx(y^2 - yx - zy + xz) = 2y^2(z^2 - 2xz + x^2)$$

$$zx y^2 - yx^2 - z^2 xy + x^2 z^2 = 2y^2 z^2 - 4xyz + 2x^2 y^2$$

$$(1) \min(a, b) = 7(a-b)$$

$$(2) 7 \cdot \max(a, b) = 8(\gcd(a, b))^2 - 64$$

$$(1) a = a_1 \cdot \gcd(a, b)$$

$$(2) b = b_1 \cdot \gcd(a, b)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = a_1 \cdot \gcd(a, b) \\ b = b_1 \cdot \gcd(a, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a - b = (a_1 - b_1) \cdot \gcd(a, b) \\ \gcd(a, b) = c \end{array}$$

$$\Rightarrow \min(a, b) \cdot 7 \max(a, b) = 56(a_1 - b_1) \gcd(a, b)^3$$

$$(1) \cdot (2) \Rightarrow 7ab = 7(a_1 - b_1) \gcd(a, b) \cdot (8 \gcd(a, b)^2 - 64)$$

$$b_1 a_1 \gcd(a, b)^3 = (a_1 - b_1) \gcd(a, b)^3 - (a_1 - b_1) \gcd(a, b) \cdot 64$$

Пусть a является больше $b \Rightarrow$

$$a_1 b_1 c^2 = 8(a_1 - b_1) c^3 - (a_1 - b_1) c \cdot 64$$

$$a_1 b_1 c^2 = 8(a_1 - b_1) c^3 - (a_1 - b_1) c \cdot 8 \quad c \neq 0$$

$$a_1 b_1 c = 8(a_1 - b_1)(c^2 - 8) \quad \text{Требуется, что } 8 \mid c^2 - 8$$

$c = \gcd(a, b) \Rightarrow a_1$ и b_1 не имеют общих делителей.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

