



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 14



1. [5 баллов] На дуге полукруга с диаметром MN и центром O взята точка K . Построен треугольник ABC такой, что его вершина A лежит на отрезке OK , вершина B — на отрезке ON , вершина C — на дуге KN . Найдите отношение площади сектора $МОК$ к площади полукруга, если известно, что $AC = BC = OM$ и $\angle ACB = 108^\circ$.
2. [4 балла] Найдите все натуральные a и b такие, что

$$\begin{cases} 2 \cdot \max(a; b) = 13|a - b|, \\ 8 \cdot \min(a; b) = 11(\text{НОД}(a; b))^2 - 99. \end{cases}$$

3. [4 балла] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие неравенству

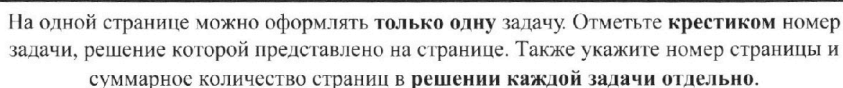
$$\sqrt{x+4-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y-2-x}} > x^2 + 10x.$$

4. [3 балла] Петя загадал такие вещественные числа x, y, z , что выражения

$$\frac{4x(z-y)}{y(z-x)} \quad \text{и} \quad \frac{3y(z-x)}{4z(y-x)}$$

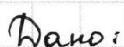
принимают одно и то же значение A . Найдите все возможные значения A , если известно, что их не менее двух.

5. [5 баллов] Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AB , а H — ортогональная проекция точки D на AB . Диагональ AC пересекает отрезок DH в точке X . Найдите CD , если $DH = 2$, $AH = 3$, $CX = 4$.
6. [5 баллов] Решите уравнение $\sqrt[4]{x+1} = 2\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{81x-1}$.
7. [5 баллов] Сколькими способами из натуральных чисел от 2025 до 2045 можно выбрать 6 чисел так, чтобы среди выбранных чисел нашлось 3 числа, дающих одинаковые остатки от деления на 7?



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!**



nonnegative (0; $K - MD$); MN-guarantee
 $K \in \text{nonneg.}$

$$A \in OK; B \in ON; C \in KN$$
$$AC = BC' = OM$$
$$\angle ACB = 108^\circ$$

S (MOK) 7

Shomyu.

1. Т.к. MO - радиус конуса, то $AC \perp CB \perp R$

2. D/n : coeq $10^0, 10^1, \dots, 10^9$ $\Rightarrow$ $OCB - \mu; OC = \mu; \Delta ACO - \mu; OC = AC$

3. Пусть $\angle OBC = \alpha$, тогда $\angle BOC = 2\alpha$, т.к. $\Delta OCB - \text{ис.}$

$$\Rightarrow \angle OCB = 180^\circ - \angle OBC - \angle BOC = 180^\circ - 2d$$
$$4. \angle ACD = \angle ACB - \angle DCB = 108^\circ - 180^\circ + 2\alpha = 2\alpha - 72^\circ$$

5. $\angle ACO = 54^\circ$ $\angle CAO = \angle COA = \frac{180^\circ - \angle ACO}{2} = 126^\circ - \alpha$

$$6. \angle AOB = \angle COA + \angle BOC = 126^\circ - d + d = 126^\circ$$

7. Т.к. $\angle AOB$ и $\angle AOM$ - смежные, то

$$\angle AOM = 180^\circ - \angle AOB = 54^\circ$$
$$8. \frac{S(\text{MOK})}{S_{\text{normyler}}} = \frac{AOK}{MON} = \frac{54}{180} = 0,3$$

Объём: 0,3



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 2. \max(a; b) = 13(a - b) \\ 8. \min(a; b) = 11(\text{НОД}(a; b))^2 - 99 \end{cases} \quad \sqrt{2}$$

Пусть $a \geq b$ (ситуация $b > a$ будет рассмотрена аналогично, только в решении на место a вставит b и наоборот)

$$\begin{cases} 2a = 13(a - b) \\ 8b = 11(\text{НОД}(a; b))^2 - 99 \\ a = 13b/11 \\ 8b = 11(\text{НОД}(a; b))^2 - 99 \quad (1) \end{cases}$$

Рассмотрим $\text{НОД}(a; b)$

$$\text{НОД}(a; b) = (b; \frac{13b}{11})$$

$$\text{Пусть } k = b/11, \text{ тогда } \text{НОД}(b; \frac{13b}{11}) = \text{НОД}(11k; 13k), k \in \mathbb{N}$$

$$\text{По т. Евклида } \text{НОД}(11k; 13k) = k, \text{ т.е. } b/11$$

$$8b = 11 \cdot \left(\frac{b}{11}\right)^2 - 99 \quad | \cdot 11$$

$$b^2 - 88b - 99 \cdot 11 = 0 \quad \Delta > 0$$

$$\text{По т. Виета } \begin{cases} b = -11 \\ b = 99 \end{cases} \text{ — не подходит по цел, т.к. } b \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow$$

$$b = 99$$

Тогда:

$$\begin{cases} a = 13b/11 \\ b = 99 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 117 \\ b = 99 \end{cases}$$

! В случае $b > a$ получим $b = 117; a = 99$

Ответ: (117; 99)

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+4-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y-2-x}} \stackrel{5:3}{>} x^2 + 10x$$

Т.к. у нас есть корни четной степени, то подкоренные выражения должны быть неотрицательны. Напишем на них условие:

$$\begin{cases} x+4-6y \geq 0 \\ 6y-2-x > 0 \end{cases} \leftarrow \text{т.к. знаменатель не равен 0}$$

$$\begin{cases} x \geq 6y-4 \\ x < 6y-2 \end{cases} \Rightarrow 6y-4 \leq x < 6y-2$$

Т.к. $x \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{Z}$, то $6y-4$ — целое, тогда $x = 6y-4$, либо $x = 6y-3$, т.к. это возможные целые числа на промежутке $[6y-4; 6y-2)$.
~~($6y-5$ и $6y-2$ не входят в данный промежуток)~~
Рассмотрим оба случая:

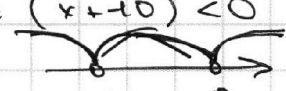
1) $x = 6y-4$

$$\sqrt{6y-4+4-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y-2-6y+4}} > x^2 + 10x$$

$$x^2 + 10x + \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$$

Заметим, что для неравенства

$$x^2 + 10x < 0$$

$$x(x+10) < 0$$


$$x \in (-10; 0)$$

В случае $x^2 + 10x + \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$ проясним смещение по оси на $\frac{\sqrt{2}}{2}$ единицы ~~вверх~~ тогда ~~мы берем~~
~~крайние значения~~ ~~чтобы определить границы~~
~~находим~~ ~~и~~ ~~и~~
 $(x = -9; 81 - 90 + \frac{\sqrt{2}}{2})$
 $x = -1; 1 - 10 + \frac{\sqrt{2}}{2}$
будет отрицательно
Мы ищем только $x \in \mathbb{Z}$, поэтому $x \in [-9; -1]$

Теперь найдем y , подходящие под условие.

Т.к. $x = 6y-4$, то $y = \frac{x+4}{6}$, т.к. $y \in \mathbb{Z}$, то $(x+4):6$,
значит $x \equiv 2 \pmod{6}$, на отрезке $[-9; -1]$ подходит
только $x = -4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Подставим это значение, чтобы найти y

~~$$y = \frac{-10 + 4}{6}$$~~

$$x = -4$$

$$y = \frac{-4 + 4}{6} = 0$$

~~$$y = \frac{-4 + 4}{6}$$~~

и

в 1-м случае, когда $x = 6y - 4$
существует пара ~~$(-10; 0)$~~ ; $(-4; 0)$,
которые соответствуют условию

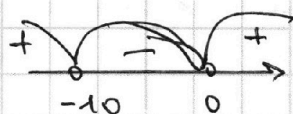
2.) $x = 6y - 3$

$$\sqrt{6y - 3 + 4 - 6y} \neq \frac{1}{\sqrt{6y - 2 - 6y + 3}} > x^2 + 10x$$

$$\sqrt{1} \neq \frac{1}{\sqrt{1}} > x^2 + 10x$$

$$x^2 + 10x < 0$$

$$x(x + 10) < 0$$



и
 $x \in (-10; 0)$, $x \in \mathbb{Z}$

Т.к. $x = 6y - 3$, то $y = \frac{x+3}{6}$, т.к. $y \in \mathbb{Z}$, то
 $x \equiv 3 \pmod{6}$, на отрезке $(-10; 0)$ таких
2 числа $x = -9$; $x = -3$.

Подставим эти значения, чтобы найти y

$$x = -9$$

$$x = -3$$

$$y = \frac{-9+3}{6} = -1$$

$$y = \frac{-3+3}{6} = 0$$

и

во втором случае ($x = 6y - 3$)

существует 2 пары, подпадающие под
условие ~~$(-10; 0)$~~ $(-9; -1)$; $(-3; 0)$

Таким образом, разобрав возможные варианты,
получим 3 пары

Ответ: $(-9; -1)$; $(-4; 0)$; $(-3; 0)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим остатки $\text{от деления на } 7$ чисел от 2025 до 2045

2025, 2032, 2039	$\equiv 2 \pmod{7}$
2026, 2033, 2040	$\equiv 3 \pmod{7}$
2027, 2034, 2041	$\equiv 4 \pmod{7}$
2028, 2035, 2042	$\equiv 5 \pmod{7}$
2029, 2036, 2043	$\equiv 6 \pmod{7}$
2030, 2037, 2044	$\equiv 0 \pmod{7}$
2031, 2038, 2045	$\equiv 1 \pmod{7}$

Можно заметить, что каждый из остатков 0-6 имеет ровно 3 числа на промежутке от 2025 до 2045. Чтобы выбрать 3 числа с одинаковым ост. есть 7 вариантов. Тогда вариантов выбора оставшихся 3-х чисел C_{18}^3 , но из этих чисел надо вычесть варианты, в которых 3 числа ~~снова имеют одинаковый остаток, т.к. по условию среди выбранных ровно 3 имеют одинаковый ост.~~ Тогда всего ~~вариантов~~ способов выбрать 6 чисел:

$$C_7^1 \cdot C_{18}^3 = 7 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 17 = 5712$$

Мы не будем ничего отнимать от C_{18}^3 , т.к. по условию не сказано, ~~ровно~~ что должно быть ровно 3 числа в наборе с одинак. ост., а найдется 3. Но посчитав $C_7^1 \cdot C_{18}^3$ ~~мы~~ ~~два~~ ~~раза~~ учли

варианты, где вторая тройка чисел имеет ~~тоже~~ одинаковый остаток при делении на 7. Всего пар троек $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$, тогда

Чтобы найти итоговое кол-во способов отнимем от 5712 21: $5712 - 21 = 5691$

Ответ: 5691



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt[4]{x+1} = 2\sqrt{x} + \sqrt[4]{81x-1}$$

$$1 \rightarrow 1^4$$

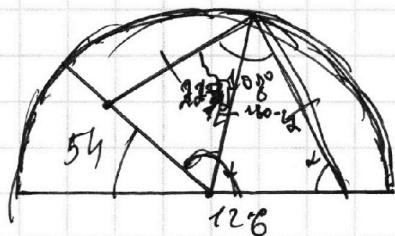
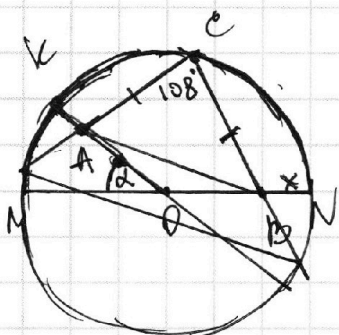
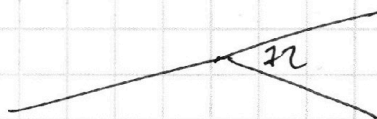
$$16 \rightarrow 2^4$$

$$81 \rightarrow 3^4$$

$$3 \quad 16$$

$$\frac{x}{180^\circ}$$

$$\frac{x(2x-x)}{12}$$



$$108$$

$$72 + 2x$$

$$2x - 72$$

$$180 - 126$$

$$108 - 180 + 2x = 2x - 72$$

$$180 + 72 - 2x$$

$$\frac{180 + 72}{2} = 90 + 36$$

$$126 + x$$

$$\frac{54}{180} = \frac{27}{90} = \frac{3}{10} = 0,3$$

$$\frac{54}{180} = \frac{27}{90} = \frac{3}{10}$$

$$\boxed{0,3}$$

$$\frac{m-n}{n}$$

$$\frac{m}{n}$$

$$\frac{m+n}{n}$$

$$\frac{4x(z-y)}{y(z-x)}$$

$$\frac{3y(z-x)}{4x(y-x)} = A$$

$$16xz(z-y)(y-x) = 3y^2(z-x)^2$$

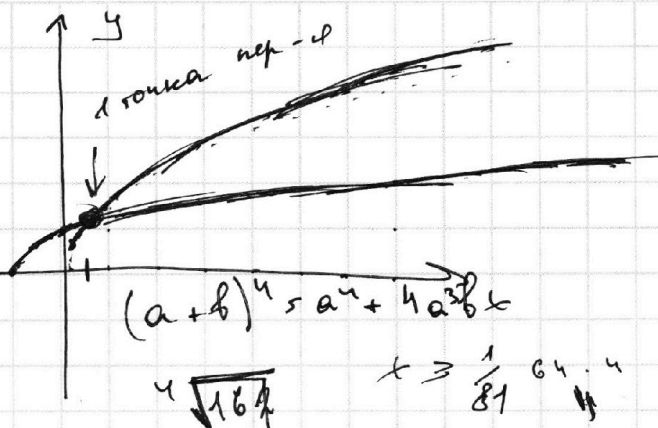
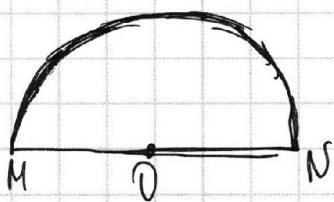


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



189

$$\sqrt[4]{x+1} = 2\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{81x-1}$$
$$\sqrt[4]{x+1} = 4\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{81x-1} + \sqrt[4]{81x^2-x}$$

$$\frac{4x(z-y)}{y(z-x)} = \frac{3y(z-x)}{4y(y-x)}$$
$$16xy(z-y)(y-x) = 3y^2(z-x)^2$$

$$\sqrt{x+4-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y-2-x}} > x^2 + 10x$$

$$[0; 2] \quad x \geq 6y-4$$
$$x < 6y-2$$

$$(6y-4)^2 + 10(6y-4) \leq x^2 + 10x \Leftrightarrow (6y-2)^2 + 10(6y-2)$$
$$(6y-4)(6y+8) \leq x(x+10) \leq (6y-2)(6y+8)$$
$$x = 6y-4$$

$$0 < \frac{1}{\sqrt{6y-2-6y+4}} > x^2 + 10x$$
$$x^2 + 10 < -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$x^2 < -10 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \text{не существует}$$

$$x = 6y-3$$
$$\sqrt{1} - \frac{1}{\sqrt{1}} > x^2 + 10x$$
$$x^2 + 10x < 0$$
$$-10 \quad 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, featuring several geometric diagrams (circles with inscribed triangles and rectangles) and algebraic calculations.

Algebraic Equations and Calculations:

- $$\frac{4x(2-y)}{y(2-x)} = \frac{3y(2-x)}{4x(y-x)}$$
$$16xz = 3y^2(2-x)^2$$
$$\frac{(x-y)(y-x)}{2\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x} + \sqrt{81x-1}$$
$$\frac{16 \cdot 17 \cdot 18}{25}$$
$$\sqrt{x+4-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y-2-x}} > x^2 + 10x$$
$$6y-4 \leq x \leq 6y-2$$
$$|1| \leq \sqrt{2}$$
$$x+4-6y = 24-k$$
$$2-6y+2-x$$
$$\sqrt{2-k} - \frac{1}{\sqrt{k}} > x^2 + 10x$$
$$k \in (0; 2]$$
$$\sqrt{(2-k)k} - 1 > x^2 + 10x$$
$$C^3 - 6$$
$$12A$$
$$17 \cdot 7 = 119$$
$$3a^2 = 28$$
$$\frac{4}{30} = \frac{a}{4}$$
$$x^2 + 21 = 242$$
$$+ 544$$
$$\underline{5712}$$
$$48$$
$$5412$$
$$\underline{21}$$
$$5691$$
$$x \cdot 16$$
$$\underline{17}$$
$$112$$
$$16$$
$$112$$
$$\underline{16}$$
$$272$$

Geometric Diagrams:

- Multiple circles with inscribed triangles and rectangles, labeled with vertices A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z.
- Diagrams showing various geometric relationships, including angles, lengths, and areas.

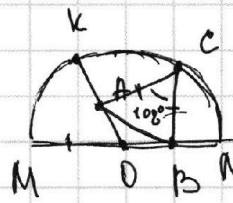
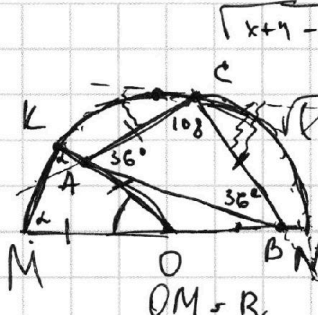


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+4-6y} - \frac{1}{\sqrt{6y-2-x}} > x^2 + 10x$$

$$(x+4-6y)(6y-2-x) > (x^2+10x)(\sqrt{6y-2-x})$$

$$x+4-6y \geq 0 \Rightarrow x \geq 6y-4$$

$$6y-2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 6y-2$$

$$\boxed{6y-4 \leq x \leq 6y-2}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot \max(a; b) = 13|a-b| \\ 8 \cdot \min(a; b) = 11(\text{НОД}(a; b))^2 - 99 \end{cases}$$

Пусть $a > b$

$$2a = 13(a-b) \Rightarrow 11a = 13b \Rightarrow a = \frac{13b}{11}$$

$$8b = 11 \cdot \left(\frac{13b}{11}\right)^2 - 99 \Rightarrow 8b = 11 \cdot \left(\frac{169b^2}{121}\right) - 99$$

$$\left(\frac{13}{11}b; b\right) = b$$

$$\frac{8b + 99}{11} = \left(\frac{13b}{11}; b\right)^2$$

$b : 11$

$$(11; 13) = b/11 \Rightarrow b = 11 \cdot 13 = 143$$

$$b \geq a \Rightarrow 143 \geq \frac{13 \cdot 143}{11} \Rightarrow 143 \geq 169 \text{ (ложно)}$$

$$2b = 13(b-a) \Rightarrow 13b - 13a = 2b \Rightarrow 11b = 13a \Rightarrow a = \frac{11b}{13}$$

$$8b = 11 \cdot \left(\frac{11b}{13}\right)^2 - 99 \Rightarrow 8b = 11 \cdot \frac{121b^2}{169} - 99$$

$$\frac{8b}{11} = \frac{b^2}{13} - 9 \Rightarrow 8b - 88b - 99 \cdot 11 = 0 \Rightarrow -80b - 1089 = 0 \Rightarrow b = -13.6125$$

$$a = \frac{13}{11} \cdot b = -15.725$$

$(13b; 11b)$

$(11; 13)$

$(11; 13 \cdot 11)$

$\frac{b}{11} = k \Rightarrow (13k; 11k)$

$a = \frac{13}{11} \cdot b = 117$

$(99; 117)$