



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Из системы мы можем сделать вывод, что $x = y = 2$, и действительно, тогда мы получаем, что $x^2 = -6x + x^2 \Leftrightarrow 6x = 0$. Тогда $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = 3(x-6)^2 = 3x^2 - 36x + 108 = 3x^2 + 108$, а раз $x \neq 0$, то это выражение больше 108.

Ответ: выражение принимает значения, большие, чем 108.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим 9^3 , 99^3 и 999^3 , 9999^3

$$9^3 = 729$$

$$99^3 = 970299$$

$$999^3 = 997002999$$

$$9999^3 = 999700029999.$$

Выявив закономерность:

$$\underbrace{9 \dots 9}_n^3 = \underbrace{9 \dots 9}_{n-1} 7 \underbrace{0 \dots 0}_{n-1} \underbrace{9 \dots 9}_n, \text{ значит всего}$$

$$\text{девяток } n-1+n = 2n-1.$$

$$\text{Значит, в числе } \underbrace{9 \dots 9}_{20001}^3 \text{ будет } 20001 \cdot 2 - 1 =$$

$$= 40001 \text{ девятка.}$$

Ответ: в десятичной записи будет

$$40001 \text{ девятка.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

7 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть было n коробок. Тогда способов выбрать наугад 5 коробок будет C_n^5 . Выигрившая тройка коробок одна, значит, количество выигривших вариантов будем считать если уберём из n коробок 3 выигрившие и выбираем по 2. Значит, способов выиграть C_{n-3}^2 , а значит вероятность выигрыша:

$$C_{n-3}^2 : C_n^5 = \frac{(n-3)!}{2!(n-5)!} : \frac{n!}{5!(n-5)!} = \frac{5!(n-3)!}{2! \cdot n!} = 60 \cdot \frac{(n-3)!}{n!}$$

Аналогично способов выбрать 9 коробок это C_n^9 , а способов выиграть, то есть C_{n-3}^6 ^{с шариками}, значит, вероятность выигрыша при новых условиях:

$$C_{n-3}^6 : C_n^9 = \frac{(n-3)!}{6!(n-9)!} : \frac{n!}{9!(n-9)!} = \frac{9!(n-3)!}{6! \cdot n!} = 504 \cdot \frac{(n-3)!}{n!}$$

Значит вероятность выигрыша увеличилась в:

$$\left(504 \cdot \frac{(n-3)!}{n!}\right) : \left(60 \cdot \frac{(n-3)!}{n!}\right) = \frac{504}{60} = 8,4 \text{ раз.}$$

Ответ: вероятность увеличилась в 8,4 раз



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим каждое из уравнений:

$$1) x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$$

$$D_1 = (4a - a^2)^2 - 4(a^2 - 6a + 4) = a^2 \cdot (4 - a)^2 - 4a^2 + 24a - 16$$

$$2) 5x^2 - (4a^2 - a^3)x - 2a^3 - 6a - 19 = 0$$

$$D_2 = (4a^2 - a^3)^2 - 20(-2a^3 - 6a - 19) = a^4 \cdot (4 - a)^2 + 40a^3 + 120a + 380$$

Не зная общности, пусть d - разность ^{и наоборот} прогрессии ^{и наоборот} и $d > 0$ (если $d < 0$, то a_5 станет a_6 , a_6 станет a_7 , а значит ничего не изменится).

Из 1 уравнения получим:

$$a_6 = \frac{4a - a^2 - \sqrt{D_1}}{2}; a_7 = \frac{4a - a^2 + \sqrt{D_1}}{2}, \text{ значит,}$$

$$d = a_7 - a_6 = \frac{4a - a^2 + \sqrt{D_1} - 4a + a^2 - \sqrt{D_1}}{2} = \sqrt{D_1}$$

Из 2 уравнения получим:

$$a_5 = \frac{4a^2 - a^3 - \sqrt{D_2}}{10}; a_8 = \frac{4a^2 - a^3 + \sqrt{D_2}}{10}, \text{ значит,}$$

$$a_8 - a_5 = 3d = \frac{4a^2 - a^3 + \sqrt{D_2} - 4a^2 + a^3 - \sqrt{D_2}}{10} = \frac{\sqrt{D_2}}{5}, \text{ значит,}$$

$$\sqrt{D_2} = 3d \cdot 5 = 15d.$$

$$\text{Пусть } x \equiv a_{6,5} = a_7 + 5, 5d$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда $a_6 = a_{6,5} - 0,5d = \frac{4a - a^2}{2} - \frac{\sqrt{D_1}}{2}$, а т.к. $\sqrt{D_1} = d$, то

$$a_{6,5} = \frac{4a - a^2}{2}$$

Аналогично $a_5 = a_{6,5} - 1,5d = \frac{4a^2 - a^3}{10} - \frac{\sqrt{D_2}}{10}$, а $\sqrt{D_2} = 15d$, то

$$a_{6,5} = \frac{4a^2 - a^3}{10}, \text{ следовательно:}$$

$$\frac{4a - a^2}{2} = \frac{4a^2 - a^3}{10}; \quad \frac{a(4-a)}{2} = \frac{a^2(4-a)}{10} \quad | \cdot \frac{10}{4-a} \quad \{ a \neq 4$$

$$5a = a^2; \quad a(a-5) = 0, \text{ значит } a_1 = 0 \text{ или } a_2 = 5.$$

Подставим $a_1 = 0$ в D_1 и D_2 :

$$D_1 = 0 \cdot 4^2 - 0 + 0 - 16 = -16, \text{ тогда } d = \sqrt{-16}, \text{ а}$$

значит его не существует т.к. -16 — отрицат.

Подставим $a_2 = 5$ в D_1 и D_2 :

$$D_1 = 5^2 \cdot (1-1)^2 - 4 \cdot 5^2 + 24 \cdot 5 - 16 = 29, \text{ значит } d = \sqrt{29}$$

$$D_2 = 5^4 \cdot (1-1)^2 + 40 \cdot 5^3 + 120 \cdot 5 + 300 = 6525, \text{ значит}$$

$$15d = \sqrt{6525} = 15\sqrt{29}, \text{ а значит } d = \sqrt{29} - \text{подхо-}$$

дит в обоих случаях.

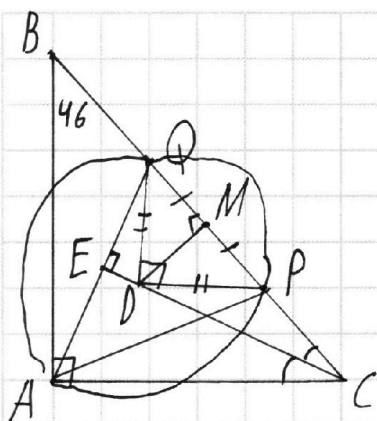
Ответ: $a = 5$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\triangle ABC$, $\angle A = 90^\circ$, $AB = BP$,
 $AC = CQ$, $DP = DQ$, $\angle PDQ = 90^\circ$, $\angle CBA = 46^\circ$.

Найти: $\angle DCB$

Решение: найдем как лежат P и Q.

Если P ближе к B, а Q ближе

к C, то $BP + PQ + CQ = BC \Rightarrow AB + AC = BC - PQ < BC$,
а такое не может быть по свойству треугол.

Значит, Q ближе к B, а P ближе к C. Раз

$DP = DQ$ по условию. $\Rightarrow D$ лежит на середине для

PQ . Возьмем точку M на PQ , что $PM = QM$, тогда

$DM \perp PQ$ как середин. $\&$ Раз $AB = BP$ и $AC = CQ \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABP$ и $\triangle ACQ$ - равнобедр. по двум сторонам,

значит, $\angle BAP = \frac{1}{2}(180 - 46) = 67^\circ$, а $\angle CAQ =$

$= \frac{1}{2}(180 - (90 - 46)) = 68^\circ$ по сумме углов треуголь-

ника. $\Rightarrow \angle PAQ = \angle BAP + \angle CAQ = (\angle BAQ + \angle PAQ) +$

$+ (\angle PAQ + \angle CAQ) = \angle BAC + \angle PAQ = 90^\circ + 68^\circ = 158^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PAQ = 158^\circ - \angle BAC = 158^\circ - 90^\circ = 68^\circ$. Рассмотрим

$\triangle PAQ$: опишем около него



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

☐

2

☐

3

☐

4

☐

5

☐

6

☐

7

☒

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Окружность с центром в точке O .

$\angle PAQ$ - вписанный и опирается на дугу PQ , значит, дуга PQ равна $45 \cdot 2 = 90^\circ$. Точка

O лежит на серпере DM , $\angle PAQ = \angle POQ = \angle PDQ$ опирается на дугу PQ и равен $90^\circ \Rightarrow \angle PDQ =$
~~- центральный~~ $\angle PDQ$ опирающийся на PQ дугу
 $= \angle POQ = 90^\circ \Rightarrow O = D \Rightarrow D$ - центр описанной

окружности $\triangle PAQ$. Проведем CE , являющуюся высотой CE в $\triangle CAQ$. П.к. $\triangle CAQ$ равнобедр., то

CE серпер $\overset{K}{\text{к}} AQ$. Но точка D тоже лежит на серпере $\overset{K}{\text{к}} AQ$ как центр описанной окружности $\Rightarrow D \in CE$, а так как CE ещё и биссектриса, то $\angle DCB = \frac{1}{2} \cdot \angle C = \frac{1}{2} \cdot (90 - 46) =$
 $= 22^\circ$ ($\angle C = 44^\circ$ по условию в прямоугол. $\triangle ABC$).

Ответ: $\angle DCB = 22^\circ$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

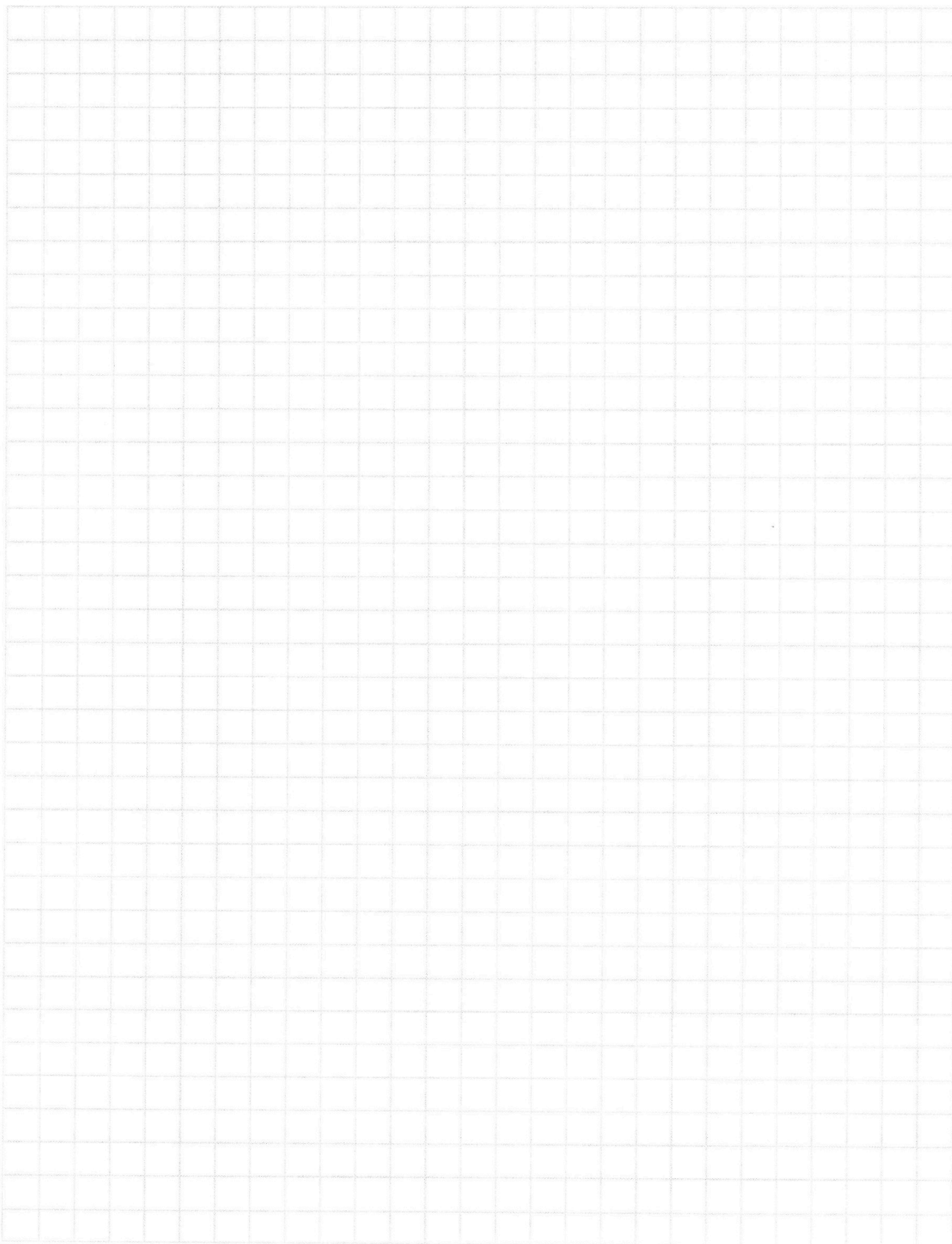
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



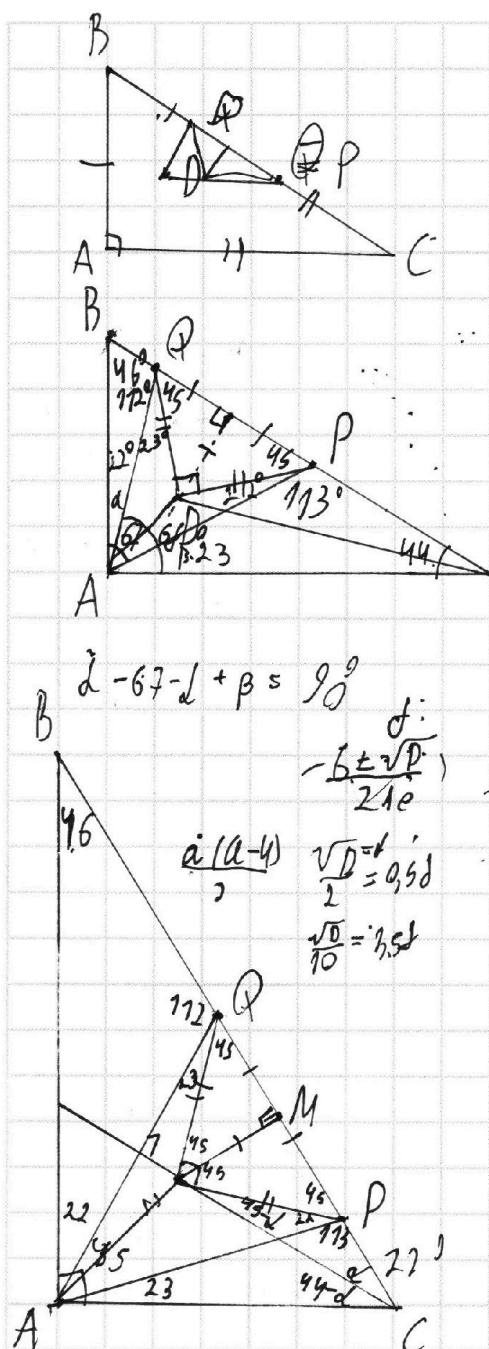


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4$$

$$D = (a^2 - 4a)^2 - 4(a^2 - 6a + 4) = a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 24a - 16$$

$$= a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 24a - 16$$

$$= a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 24a - 16$$

$$= a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 24a - 16$$

$$5x^2 - (a^2 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$$

$$a^2 \cdot (a-4)^2 - 4(a-4)(a-1) - a$$

$$a^4 - (a-4)^2 - 2(2a^3 - 6a - 15) = 75$$

$$625 - 1 - 20(250 - 30 - 15) = 75$$

$$625 - 20 \cdot 205 = 4100 - 625 = 3475 = 15^2$$

$$25 = 100 + 600 + 300 = 5525$$

$$D_1 = a^2 \cdot (a-4)^2 - 4a^2 + 24a - 16 = 1^2 \sqrt{509}$$

$$D_2 = a^4 \cdot (a-4)^2 + 40a^3 + 120a^2 + 300 = 225 \sqrt{129}$$

$$\begin{array}{ccc} 5 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x^2 - 6x + 36 \\ x^2 - 2x^2 + yz + 36 \\ xy + yz + xz + 108 \\ -12x = 24z - 2x^2 \end{array}$$

$$36 - x^2 + 24z$$

$$108 - (x+y+z)^2 + 4(xy+yz+xz)$$

$$\frac{a(a-4)}{2} = \frac{a^2(a-4)}{2}$$

$$a = \frac{a^2}{2}$$

$$2a^2 = 90a$$

$$a^2 - 5a = 0$$

$$a(a-5) = 0$$

$$a = 0, 5$$