



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В телесигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 \quad | : z & -6z^2 + z^3 = -6z^2 + z^3 = -6y^2 + y^3 \\ yz = -6x + x^2 \quad | : x & -6z^2 + z^3 = -6x^2 + x^3 \\ zx = -6y + y^2 \quad | : y & 6(x-z)(x+z) = (x-z)(x^2 + y^2 + z^2) \end{cases}$$

$x, y, z \neq 0$

$$(x-z)(x^2 + xz + z^2 - 6x - 6y) = 0$$

$$(x-z)(yz + xy + xz) = 0$$

$$\begin{cases} x = z \\ xy + yz + zx = 0 \end{cases}$$

~~1) Если $x = z$, то ан-но $y = z$, то ан-но $y = z$, то ан-но $y = z$~~

~~2) Если $x = z$, то ан-но $y = z$, то ан-но $y = z$~~

$$zy = -6z + z^2$$

$$y = -6 + z$$

$$(z-6)z = -6z + z^2$$

$$(z-6)^2 - 6(z-6) = z^2$$

$$-12z + 36 - 6z + 36 = 0$$

$$-18z = -72$$

$$\begin{cases} z = 4 \\ y = -2 \\ x = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \\ z = 4 \end{cases}$$

3) Если $x = y$, то ан-но:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$

3) Если $y = z$, то ан-но:

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \\ z = 4 \end{cases}$$

Во всех трех случаях получаем, что $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 =$

$$= 64 + 4 + 4 = 72$$

Если $xy + yz + zx = 0$, то:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}yz + xy + xz &= 0 \\z^2 + x^2 + y^2 &= 6(x + y + z) \\(x + y + z)^2 - 2(xy + yz + xz) &= 6(x + y + z) \\&= 0 \\(x + z)(x + y + z)(x + y + z - 6) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

Если $x + y + z = 0$, то:

$$\underbrace{xy + xz + yz}_{=0} = -\underbrace{6(x + y + z)}_{=0} + x^2 + y^2 + z^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad x, y, z \neq 0 \Rightarrow x, y, z \in \emptyset \text{ или } x + y + z = 0 \Rightarrow \Rightarrow x + y + z \neq 0$$

Если $x + y + z = 6$, то:

$$x + y + z + yz = -6(x + y + z) + x^2 + y^2 + z^2$$

$$36 = x^2 + y^2 + z^2$$

Если найдем такие (x, y, z) , для которых все эти условия выполняются, то:

$$\begin{aligned}\text{Тогда } (x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 - 12(x + y + z) + 3 \cdot 36 = \\&= 36 - 12 \cdot 6 + 3 \cdot 36 = 72 \Rightarrow \text{полученная сумма } 72\end{aligned}$$

Ответ: 72



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

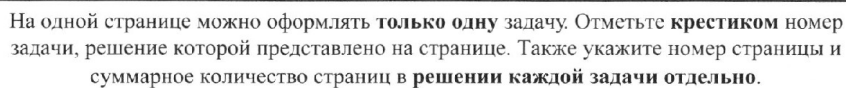
$$n = \underbrace{100 \dots 0}_{20001} - 1$$

$$n^2 = (\underbrace{100 \dots 0}_{20001} - 1)^2 = \underbrace{100 \dots 0}_{60003} - 3 \cdot \underbrace{100 \dots 0}_{40002} + 3 \cdot \underbrace{100 \dots 0}_{20001} - 1^2$$

$$= \underbrace{99 \dots 9}_{20000} \underbrace{700 \dots 0}_{40002} + 2 \underbrace{99 \dots 9}_{20001} = \underbrace{99 \dots 9}_{20000} \underbrace{700 \dots 0}_{20000} \underbrace{299 \dots 9}_{20001} \Rightarrow$$

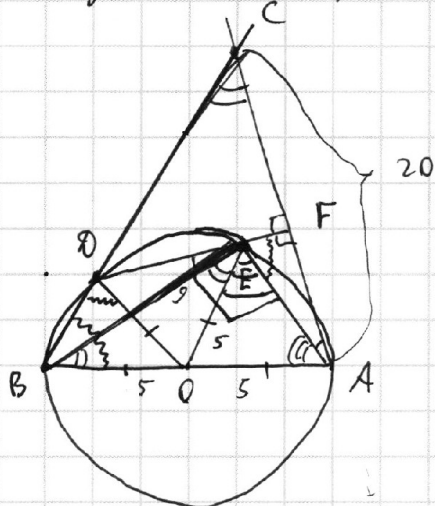
$\Rightarrow$ всего 40001 ^{OK} девяток

Ответок: 40001



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) С помощью в. в. вкл. улов, уловы в А, ~~не~~ в. оми. чет-ка,
получили мед. пов-ва улов на чертете:

$$(u, v) \in A$$

2) по т. описов майген ~~БЕО~~ ^{БЕА}

$$\frac{5}{\sin \angle BEO} = \frac{9}{\sin \angle BOE}$$

$$\frac{9}{\sin \angle FAB} = 10$$

$$\sin \angle FAB = \frac{9}{10}$$

$$\angle EAB = \arcsin \frac{2}{10}$$

$$\angle BEO = 90^\circ - \arcsin \frac{9}{10}$$

$$\angle BAC = \angle BEO = 90^\circ - \arcsin \frac{9}{10}$$

$$\text{CFS} \quad \frac{AB}{\sin \angle BCA} = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$$

$$\sin \angle ABC = \frac{10}{20} \cdot \sin (80^\circ - \arcsin \frac{9}{10})$$

AF, A E. $\sin \angle AFA = \angle AEC$

Problem: 8, 4



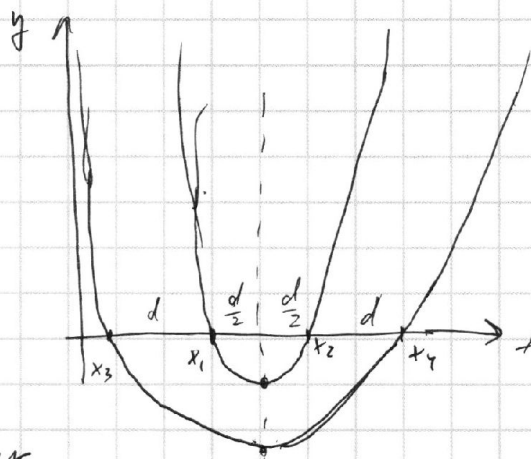
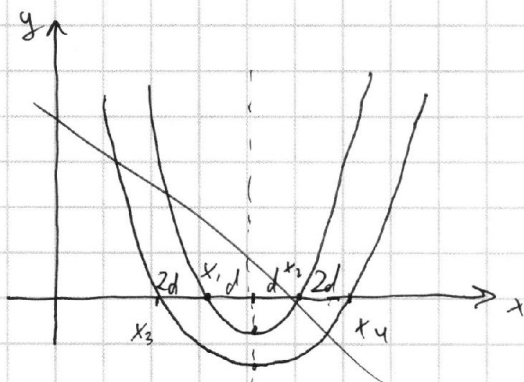
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ x_1, x_2 - корни $x_1 = a_6, x_2 = a_7$ (ан) - арифмет. прогр.
 $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ $x_3 = a_8, x_4 = a_9$ x_3, x_4 - корни



d - полн. прогрессия; по графику видно, что у этих парабол одна ось симм. $\Rightarrow$ абсциссы вершин парабол $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(a^2 - 4a)}{2} = \frac{a(a^2 - 4a)}{10} \cdot 10$$

$$a(a - 4)(a - 5) = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a = 4 \\ a = 5 \end{cases}$$

1) Если $a = 0$: $x^2 + 4 = 0$ - корней нет $\Rightarrow a = 0$ - не подк.

2) Если $a = 4$: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$

$$5x^2 - 128 - 24 - 15 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 = \frac{167}{5} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{167}}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = 4 - \text{полн.} \\ d = -2 + \frac{\sqrt{167}}{\sqrt{5}} - \text{арифм.} \end{cases} \Rightarrow d \in \emptyset \Rightarrow a = 4 - \text{не подк.}$$

3) Если $a = 5$: $x^2 - 5x - 1 = 0$

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}, x_2 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$$

$$x_3 = \frac{5 - \sqrt{25 + 4 \cdot 59}}{2}, x_4 = \frac{5 + \sqrt{25 + 4 \cdot 59}}{2}$$

$$x_3 = \frac{5 - 3\sqrt{29}}{2}, x_4 = \frac{5 + 3\sqrt{29}}{2}$$

$$x_3 = \frac{5 - 3\sqrt{29}}{2}, x_4 = \frac{5 + 3\sqrt{29}}{2}$$

$$5x^2 - 25x - 295 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 59 = 0$$

$$\Rightarrow d = x_2 - x_1 = x_4 - x_3 = \sqrt{29} \Rightarrow$$

$a = 5$ - подходит

Ответ: 5



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 \\ yz = -6x + x^2 \\ zx = -6y + y^2 \end{cases}$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 12y + 36 + z^2 - 12z + 36 =$$

$$= xy + 6z + yz + 6x + zx + 6y - 12x - 12y - 12z + 3 \cdot 36 =$$

$$= xy + yz + zx - 6z - 6x - 6y + 3 \cdot 36$$

$$- 6z^2 + z^3 = -6x^2 + x^3 = -6y^2 + y^3$$

$$z^2(z-6) = x^2(x-6) = y^2(y-6)$$

$$z^4(z-6)^2 = x^4(x-6)^2 = y^4(y-6)^2$$

$$(x-6)^2 + \frac{x^4}{z^4}(x-6)^2 + \frac{x^4}{y^4}(y-6)^2 = (x-6)^2 \left(1 + \frac{x^4}{z^4} + \frac{x^4}{y^4} \right) =$$

$$= (x-6)^2 \frac{y^4 z^4 + x^4 y^4 + x^4 z^4}{z^4 y^4}$$

$$\begin{array}{r} 19999 \dots 9 \\ 9999 \dots 9 \\ \hline 991 \end{array} \quad (100 \dots 0 - 1)^2 = \underbrace{100 \dots 0}_{40002} - 2 \cdot \underbrace{100 \dots 0}_{20001} + 1 =$$

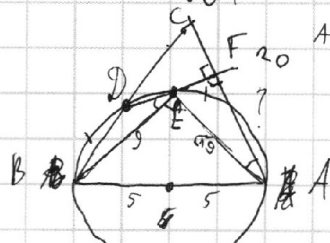
$$= \underbrace{100 \dots 0}_{20001} \cdot (\underbrace{100 \dots 0}_{20001} - 2) + 1 = 100 \dots 0$$

$$(a-b)^3 = a^3 + b^3 + (a-b)(a-b)(a-b) = a^3 - a^2b + ab^2 + (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) =$$

$$= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\underbrace{100 \dots 0}_{60003} - 3 \cdot \underbrace{100 \dots 0}_{40002} + 3 \cdot \underbrace{100 \dots 0}_{20001} - 1 = \underbrace{99 \dots 9}_{20000} \underbrace{700 \dots 0}_{1} + \underbrace{40002}$$

$$\begin{array}{r} 299 \dots 9 \\ 20001 \end{array} = \underbrace{99 \dots 9}_{20000} \underbrace{700 \dots 0}_{20000} \underbrace{2}_{20001} \underbrace{99 \dots 9}_{20001} = 740001$$



$AC = 20, AB = 10$

$$\frac{(n-3)}{n}$$

$$P_1 = \frac{C_3^n}{C_5^n} = \frac{\frac{3!}{(n-3)!} \cdot \frac{2!}{(n-1)!} \cdot \frac{1!}{(n-2)!}}{\frac{5!}{2! \cdot 3! \cdot n!}} = \frac{10 \cdot 5!}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$$

$$P_2 = \frac{C_3^n}{C_5^n} = \frac{3! \cdot (n-3)! \cdot 2!}{6! \cdot 3! \cdot n!}$$

$$\frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} \cdot C_3^3$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{9! \cdot 9! \cdot (n-3)! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4!}{6! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot (n-5)! \cdot 5!}$$

$$\frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} \cdot C_3^3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P_2 = 1 - P_1 = 1 - \frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-4)}{n-1} \cdot \frac{(n-5)}{n-2} \cdot \frac{3}{n-3} \cdot \frac{2}{(n-4)} = 20 -$$

$$P_1 = \frac{3}{n} \cdot \frac{(n-3)}{n-1} \cdot \frac{(n-4)}{n-2} \cdot \frac{(n-5)}{(n-3)(n-4)(n-5)}$$

$$\begin{array}{c} \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \dots \quad \square \\ x_1 \quad y_2 \quad z_3 \quad y_4 \quad x_5 \\ \frac{3}{n} \mid \frac{3}{n-1} \mid \frac{2}{n-2} \mid \frac{2}{n-3} \mid \frac{1}{n-4} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \frac{3}{n} \\ + \\ \frac{3}{n-1} \\ - \\ \frac{2}{n-2} \\ + \\ \frac{2}{n-3} \\ - \\ \frac{1}{n-4} \end{array}$$

$$x = \frac{a^2 - 4a \pm \sqrt{(a^2 - 4a)^2 - 4a^2 + 24a - 16}}{2}$$

$$x = \frac{a(a^2 - 4a)}{10} \pm \sqrt{\frac{a^2 - 4a}{10}}$$

$$\frac{a^2 - 4a}{2} = \frac{a(a^2 - 4a)}{10} \quad | :10$$

$$a(a-4)(a-5) = 0$$

$$\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 4 \\ a = 5 \end{array}$$

$$|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}| + |y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}| \leq 8$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0 \\ y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0 \end{array} \right.$$

$$0 \leq y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8$$

$$\begin{array}{l} x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0 \\ 5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^2 - 6a - 15 = 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a^2 - 4a \\ x_1 x_2 = a^2 - 6a + 4 \\ x_1 = a_1 + 5d \\ x_2 = a_1 + 6d \\ x_3 = a_1 + 4d \\ x_4 = a_1 + 7d \\ x_3 + x_4 = \frac{a(a^2 - 4a)}{5} \\ x_3 x_4 = -2a^3 - 6a - 15 \end{cases}$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$5x^2 - 15 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x = \pm 2$$

$$5x^2 - 2a \cdot 64 - 24 - 15 = 0$$

$$5x^2 = \frac{167}{5}$$

$$x^2 - 5x - 7 = 0$$

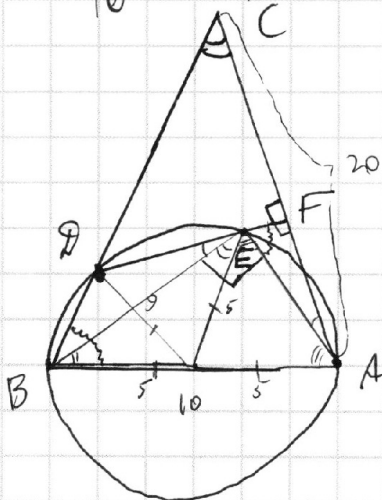
$$5x^2 - 25x - 295 = 0$$

$$x^2 - 5x - 59 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{35 + 4 \cdot 59}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{259}}{2}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 2xy &= -12z + 2z^2 & -6\frac{z}{x} + \frac{z^2}{x} &= -6\frac{x}{z} + \frac{x^2}{z} \quad | \cdot xz \\
 2yz &= -12x + 2x^2 & -6z^2 + z^3 &= -6x^2 + x^3 \\
 2zx &= -12y + 2y^2 & 6(x-2)(x+2) &= (x-2)(x^2+xz+z^2) \\
 x^2 - 12x + y^2 - 12y + z^2 - 12z &= & (x-2)(x^2+xz+z^2-6x-6z) &= 0 \\
 (x-z)(yz+xy+xz) &= 0 & & \\
 \begin{cases} x=y=z \\ yz+xy+xz=0 \end{cases} & & yz+xy+xz=0 & \\
 x^2 = -6x + x^2 & & z^2+x^2+y^2 &= 6(x+y+z) \\
 x=0 \Rightarrow \emptyset & & (x+y+z)^2 - 2(yz+xy+xz) &= 6(x+y+z) \\
 z^2+x^2+y^2=0 & & (x+y+z)(x+y+z-6) &= 0 \\
 0 = -6(x+y+z) + x^2+y^2+z^2 & & x+y+z=0 & \\
 36 = x^2+y^2+z^2 & & x+y+z=6 & \\
 -6z+2z^2 = -6x+x^2 & & xy = -6z+z^2 & \\
 y^2-6y = z^2 & & (6-z-y)/y = -6z+z^2 & \\
 yz = -6z+z^2 & & 6y-zy-y^2 = -6z+z^2 & \\
 y = z-6 & & 6y - 6(6-z-y) - (6-z-y)^2 = -6z+z^2 & \\
 (z-6)^2 - 6(z-6) = z^2 & & 6y - 36 + 6z + 6y - (6-z-y)^2 = -6z+z^2 & \\
 z^2 - 12z + 36 - 6z + 36 = z^2 & & 12y + 6z - 36 - (6-z-y)^2 = -6z+z^2 & \\
 -18z = -72 & & 0 = -6x + x^2 & \\
 z = 4 & & x=6 \quad \begin{cases} x=0 \\ x=6 \end{cases} & \\
 y = 5 - z & & x=36 \quad \begin{cases} x=0 \\ x=6 \end{cases} & \\
 y^2 + 6^25 - 10z + z^2 + z^2 = 35 & & x=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ x=6 \end{cases} & \\
 2z^2 - 10z - 10 = 0 & & z=6 \quad \begin{cases} z=0 \\ z=6 \end{cases} & \\
 z = \frac{5 \pm \sqrt{105}}{2} & & y = -6z + z^2 & \\
 y = \frac{15 \pm \sqrt{105}}{4} & & z = -6y + y^2 & \\
 & & y+z=5 & \\
 & & y^2+z^2=35 & \\
 & & y^2+z^2=7y+7z & \\
 & & z^2+y^2=6z+y+6y+z &
 \end{aligned}$$