



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим случаи:

1) Если $x = y = z$, то $xy = -2x + x^2$ ~~не~~ переписывается в виде $x^2 = -2x + x^2$, $0 = -2x$, $x = 0$, чего быть не может, ~~значит~~ т.к. у данного уравнения решений больше нет. Значит такой случай невозможен.

2) Если $x = y$, но $y \neq z$, $x \neq z$ (ровно два числа из трёх равны). Без ограничения общности $x = y$, так как все три уравнения симметричны относительно x, y, z . Тогда из первого уравнения $x^2 = -2x + x^2$; из второго — $xx = -2x + x^2$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 = -2x + x^2 \\ xx = -2x + x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = -2x + x^2 \\ x = -2 + x \quad (x \neq 0 \text{ по условию}) \end{cases}$$

$$x^2 = -2(x-2) + (x-2)^2.$$

$$x^2 = -2x + 4 + x^2 - 4x + 4.$$

$$6x = 8, \quad x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}. \quad \text{Тогда } z = x - 2 = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}; \quad y = x = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Тогда } (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = \left(\frac{4}{3}-2\right)^2 + \left(\frac{4}{3}-2\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}-2\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{64}{9} = \frac{72}{9} = 8.$$

3) Если $x \neq y$, $y \neq z$, $x \neq z$:

Рассмотрим $-2x + x^2$, $-2x + x^2$, $-2y + y^2$ как $(x-1)^2 - 1$, $(x-1)^2 - 1$, $(y-1)^2 - 1$. Тогда:

$$\begin{cases} xy + 1 = (x-1)^2 \\ yx + 1 = (x-1)^2 \\ xx + 1 = (y-1)^2 \end{cases}$$

Здесь вычитая из первого второе, получим:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$xy - yx = (x-1)^2 - (x-1)^2 = (x-x)(x+x-2);$$

$$y(x-x) = (x-x)(x-x-x); \text{ т.к. } x \neq x, \text{ то}$$

$$x-x \neq 0 \Rightarrow y = x-x-x; \quad x+y+x = x.$$

Преобразуем выражение из условия:

$$(x-x)^2 + (y-x)^2 + (x-x)^2 = x^2 + y^2 + x^2 -$$

$$-4x - 4y - 4x + 4 + 4 + 4 = x^2 + y^2 + x^2 - 4x$$

$$+ (x+y+x) + 12 = x^2 + y^2 + x^2 - 8 + 12 = x^2 +$$

$$+ y^2 + x^2 + 4.$$

Но мы знаем, что $2(xy + yx + xx) = -4x - 4y - 4x + 2x^2 + 2y^2 + 2x^2$ (увеличенная сумма исходных трёх уравнений).

$$\text{Получа } 2(xy + yx + xx) = -4(x+y+x) + 2(x^2 + y^2 + x^2) = -8 + 2(x^2 + y^2 + x^2).$$

$$\text{Получа } 4 = x^2 = (x+y+x)^2 = x^2 + y^2 + x^2 + 2xy + 2yx + 2xx = x^2 + y^2 + x^2 + 2(x^2 + y^2 + x^2) - 8 = 3(x^2 + y^2 + x^2) - 8;$$

$$x^2 + y^2 + x^2 = \frac{4+8}{3} = 4.$$

Получа исходное выражение будет равно $(x^2 + y^2 + x^2) + 4 = 4 + 4 = 8.$

Из последнего двух случаев получаем, что данное выражение может быть равно только 8. Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

Если число $n = \underbrace{99 \dots 99}_{30001}$, то $n+1 = \underbrace{100 \dots 00}_{30001} = 10^{30001}$.

Получа $(n+1)^3 = 100 \dots 00 = 10^{30001}$.

Получа $(n+1)^3 = (10^{30001})^3 = 10^{90003} = \underbrace{100 \dots 00}_{90003}$.

$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = n^3 + 3(n^2 + n) + 1$.

$-3n - 1 = n^3 + 3(n+1)^2 - 3(n+1) + 1$;

$n^3 = \underbrace{100 \dots 00}_{90003} - 3 \cdot 10^{60002} + 3 \cdot 10^{30001} - 1$.

$(3(n+1)^2 = 3 \cdot (10^{30001})^2 = 3 \cdot 10^{60002})$.

Если из $\underbrace{100 \dots 00}_{90003}$ вычтем $3 \cdot 10^{60002}$, то

получим $10^{60002} (10^{30001} - 3) = \underbrace{99 \dots 997}_{30001} \cdot 10^{60002}$.

$= \underbrace{99 \dots 99}_{30001} \underbrace{00 \dots 00}_{60002} 7$.

После прибавления $3 \cdot 10^{30001}$ к последней цифре (число $3 \cdot 10^{30001}$ составляет $30001+1=30002$ цифры, поэтому, получая, к числу остается 30000 нулей)

числу получим: $\underbrace{99 \dots 99}_{30001} \underbrace{00 \dots 00}_{30000} \underbrace{299 \dots 99}_{30002}$.

После вычитания единицы получим:

$\underbrace{99 \dots 99}_{30001} \underbrace{00 \dots 00}_{30000} \underbrace{299 \dots 99}_{30002}$, где будет

$(30001-1) + (30002-1) = 60001$ цифра „9“.

Ответ: 60001.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

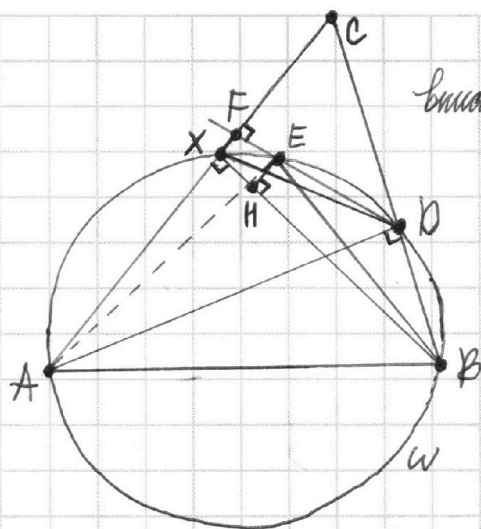
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Построим AX и BX и AE . И.к.
вписанные $\angle AXB$, $\angle AEB$ и $\angle APB$ опираются
ся в ω на диаметр AB , то
 $\angle AXB = \angle AEB = \angle APB = 90^\circ$.

2) Поскольку $BX \perp AC$ и $AP \perp BC$,
то из $BX \perp AC$ и $EP \perp AC$
получаем, что $EP \parallel BX$.

3) Опустим из E на BX пер-
пендикуляр EH . В $XFEN$

$\angle FXB = \angle XFP = \angle XHE = 90^\circ \Rightarrow XFEN$ - прямоуголь-
ник. Поэтому $XF = EN$.

$\angle FXP = \angle XAE = \angle XBE$, как вписанные.

4) Рассмотрим $\triangle XFP$ и $\triangle ENB$. В нас
 $XF = NE$, $\angle XFP = \angle ENB$, $\angle XFP = \angle ENB = 90^\circ \Rightarrow$
 $\triangle XFP = \triangle ENB$ по катету и острому углу.
Поэтому $BE = PX = 6$ и $FP = BN$.

5) И.к. AXB - вписанный, то $\angle XAB = 180^\circ -$
 $-\angle XPB = \angle CPX$ и $\angle APB = 180^\circ - \angle AXD = \angle CXD$.

Поэтому $\triangle CXD \sim \triangle CBA \Rightarrow \frac{PX}{AB} = \frac{CP}{AC} \Rightarrow$

$$CP = \frac{PX \cdot AC}{AB} = \frac{6 \cdot 10}{8} = 7,5.$$

6) Из $\triangle APC$ с $\angle APC = 90^\circ$, где PF - высота
к гипотенузе, получим, что $PF = \frac{AP \cdot CP}{AC}$.

$$AP^2 = AC^2 - CP^2 = 100 - \left(\frac{3}{4} \cdot 10\right)^2 = 100 \cdot \left(1 - \frac{9}{16}\right) =$$

$$= \frac{100}{16} \cdot 7; AP = \sqrt{\frac{100 \cdot 7}{16}} = \frac{10}{4} \sqrt{7} = 2,5 \sqrt{7}.$$

$$\text{Поэтому } PF = \frac{2,5 \sqrt{7} \cdot 7,5}{10} = \frac{5 \cdot 15 \cdot \sqrt{7}}{40} = \frac{15 \sqrt{7}}{8}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) Замечаем, что из $\triangle ABE$ $(\angle AEB = 90^\circ)$ $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

8) Замечаем, что в $\triangle AFE$ и $\triangle DFX$ $\angle AFE = 90^\circ$ — общий, а $\angle FAE = \angle FDP$ (как вертикальные).
Поэтому $\triangle AFE \sim \triangle DFX \Rightarrow \frac{FX}{AE} = \frac{FD}{AF}$; $AF = \frac{AE \cdot FD}{FX}$.

$$AF = \frac{2\sqrt{7} \cdot 15\sqrt{7}}{8 \cdot 8} = \frac{15 \cdot 7}{3 \cdot 8} = \frac{35}{8} = 4 \frac{3}{8} = 4,375.$$

Ответ: $4,375$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть всего будет n коробок.
1) Рассмотрим первый случай:
Всего исходов будет равно C_n^5 —
ко-во способов ~~взять 5~~ ^{взять и открыть} ~~открыть~~
пять коробок.

Полезных исходов будет равно C_{n-3}^2 ,
то есть, когда три коробки ^(с шариками) ~~уже открыты~~, а оставшиеся две — можно
из остальных $n-3$ коробок.

Тогда вероятность в первом случае
будет равна $p_1 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{(n-3)(n-4)}{2!} \cdot \frac{1}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}} =$
 ~~$\frac{5!(n-3)(n-4)}{2n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = \frac{60}{n(n-1)(n-2)}$~~

2) Рассмотрим второй случай:
По аналогии с первым всего будет
 C_n^7 исходов, а полезных — C_{n-3}^4 .

Тогда вероятность во втором слу-
чае равна $p_2 = \frac{C_{n-3}^4}{C_n^7} = \frac{4!(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{4!(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n} =$
 $= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{n(n-1)(n-2)} = \frac{210}{n(n-1)(n-2)}.$

Тогда $\frac{p_2}{p_1} = \frac{210 \cdot n(n-1)(n-2)}{60 \cdot n(n-1)(n-2)} = \frac{210}{60} = 3,5.$

Значит вероятность увеличилась в 3,5
раза.

Ответ: в 3,5 раза.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☒ 5

☐ 6

☐ 7

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Предположим, что последовательность
первых членов имеет вид

$$(a^2 - 2a) \pm \sqrt{(a^2 - 2a)^2 - 4(a^2 - a - 4)}, \text{ а второ-}$$

$$го — \frac{(a^3 - 2a^2) \pm \sqrt{(a^3 - 2a^2)^2 - 4 \cdot 3(6 - a^5)}}{6}.$$

Заметим, что разность 6-ого и
4-ого члена арифметической про-
gressии равна разности 9-ого
и 7-ого члена этой прогрессии.

$$\text{Получа: } \frac{(a^2 - 2a) + \sqrt{(a^2 - 2a)^2 - 4(a^2 - a - 4)}}{2} -$$

$$- \frac{(a^3 - 2a^2) - \sqrt{(a^3 - 2a^2)^2 - 12(6 - a^5)}}{6} =$$

$$= - \frac{(a^2 - 2a) - \sqrt{(a^2 - 2a)^2 - 4(a^2 - a - 4)}}{2} + \frac{(a^3 - 2a^2) +$$

$$+ \sqrt{(a^3 - 2a^2)^2 - 12(6 - a^5)}}{6}; \frac{a(a-2)}{2} - \frac{a^2(a-2)}{6} =$$

$$= - \frac{a^2 - 2a}{2} + \frac{a^3 - 2a^2}{6}; 3a(a-2) - a^2(a-2) =$$

$$= -3a(a-2) + a^2(a-2).$$

Если $a = 2$, то выражение верно.
Если $a \neq 2$, то разделим на $(a-2)$:
 $6a = 2a^2$, $a = 0$ или $a = 3$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Потом рассмотрим отдельно каждый из трёх возникших случаев.

1) $\alpha = 0$:

Потом 4-ый член арифм. прогрессии равен $\frac{0 - \sqrt{0 - 4 \cdot (-7)}}{2} = \frac{-\sqrt{28}}{2} = -\sqrt{7}$; девя-
тый — $\frac{0 + \sqrt{28}}{2} = \sqrt{7}$; шестой —

$\frac{0 - \sqrt{0 - 4 \cdot 6}}{2}$ — не имеет смысла.

Значит такой случай невозможен.

2) $\alpha = 2$:

4-ый член прогрессии равен:

$\frac{0 - \sqrt{0 - 4(4 - 2 - 7)}}{2} = -\frac{\sqrt{20}}{2} = -\sqrt{5}$;

девятый — $\frac{0 + \sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$; шестой —

$\frac{0 - \sqrt{0 - 4 \cdot 2(6 - 3 \cdot 2)}}{2} = -\frac{\sqrt{3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 13}}{2} = -\frac{\sqrt{48}}{3}$;

седьмой — $\frac{0 + \sqrt{48 \cdot 4}}{2} = \frac{\sqrt{48}}{3}$.

Чтобы условие задачи выполнялось, нужно, чтобы разность 9-ого и 4-ого члена прогрессии была в 5 раз ^{меньше} разности шестого и седьмого. Но $5 \cdot 2\sqrt{5} \neq \frac{\sqrt{48}}{3}$. Значит такой случай тоже невозможен.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐ СТРАНИЦА 31 ИЗ 34

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) Если $a = 3$, то 4-ый член прогрессии равен $3 - \sqrt{9 - 4 \cdot (9 - 3 - 4)} = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$;

9-ый — $\frac{3 + \sqrt{13}}{2}$; 6-ой — $\frac{9 - \sqrt{81 - 4 \cdot 2 \cdot x}}{6}$

$x(-234) = \frac{9 - \sqrt{81 + 4 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 9}}{6} =$

$= \frac{9 - 3\sqrt{325}}{6} = \frac{9 - 15\sqrt{13}}{6} = \frac{3 - 5\sqrt{13}}{2}$;

7-ой — $\frac{3 + 5\sqrt{13}}{2}$.

Чтобы условие выполнялось, нужно, чтобы разность 9-ого и 4-ого была равна в 5 раз разности 7-ого и 6-ого. Тогда

$5 \cdot \sqrt{13} = 5\sqrt{13}$, что верно. И также разность 9-ого и 4-ого должна быть равна разности 9-ого и 7-ого деленная на $\frac{5}{2} = 2,5$ раз меньше разности 9-ого и 4-ого.

Но $\frac{3 + \sqrt{13} - 3 - 5\sqrt{13}}{2} = -2\sqrt{13}$; а $\frac{3 + \sqrt{13} - 3 + \sqrt{13}}{2} = \sqrt{13}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☒☐☐

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~П.к. 7-ой член прогрессии~~

Во всём решении от этого нужно
заменить "6-ой" на "4-ый" и
"7-ой" на "9-ый" и наоборот.

Тогда в последнем случае
выйдут числа $\frac{3-5\sqrt{13}}{2}$, $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$, $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$,
 $\frac{3+5\sqrt{13}}{2}$, то которые подсе. под
условие. Значит подсеётся толь-
ко $a = 3$.
Ответ: $a = 3$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Зам. $x \neq y \neq z$, то

$$xy + 1 = (z-1)^2$$

$$yz + 1 = (x-1)^2$$

$$zx + 1 = (y-1)^2$$

$$(x-x)(x+z-z) = y(x-z),$$

$$x+x-z = -y,$$

$$x+y+z = z,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z + 4 = x^2 + y^2 + z^2 - 8 + 4 = x^2 + y^2 + z^2 + 4.$$

$$xy = -4x + z^2$$

$$yz = -4y + x^2$$

$$zx = -4z + y^2$$

$$(x+y+z)^2 = 4 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx),$$

$$2(x^2 + y^2 + z^2) - 4 \cdot 2 = 2(xy + yz + zx) = 0.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4 - (xy + yz + zx) = 0.$$

$$xy + yz + zx = (x^2 + y^2 + z^2) + 4 = 0.$$

б.к. $x: \frac{x(x-z) \pm \sqrt{x^2(x-z)^2 - 4(x^2x-4)}}{2}$

4.к. $y: \frac{x^2(x-z) \pm \sqrt{x^4(x-z)^2 - 12(6-x^5)}}{6}$

$$= \frac{x^2(x-z) - \sqrt{\dots}}{6} + \frac{3x(x-z) - 3\sqrt{\dots}}{6} =$$

$$= \frac{x^2(x-z) + \sqrt{\dots}}{6} - \frac{3x(x-z) + 3\sqrt{\dots}}{6} =$$

$$= \frac{x^2(x-z)}{6} + \frac{3x(x-z)}{6} = \frac{x^2(x-z)}{6} - \frac{3x(x-z)}{6} =$$

$$(x-z) \sqrt{-x^2 + 3x} = x^2 - 3x \quad \frac{243}{3} = 81.$$

$$-x^2 + 3x - 6x = -x^2$$

$$g^2 + 4g \cdot g \cdot 4$$

$$4g \cdot 4 = 316.$$

$$325 = 13 \cdot 25$$

$$\frac{234}{3} = 79$$

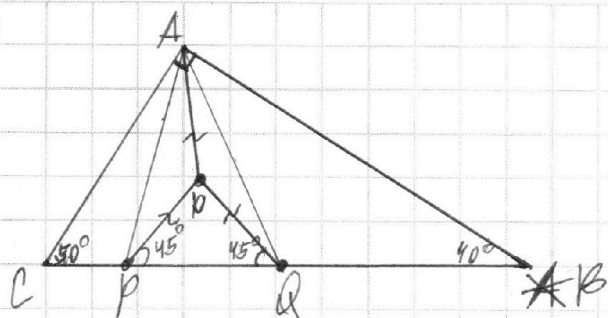


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Если в $\triangle PQR$ $PR = PQ$
и $\angle PRQ = 90^\circ$, то
в к-м $\angle PRQ = \angle QRP =$
 $= \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.

2) Если $\angle BCA = 50^\circ$,
то $\angle CBA = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$. Тогда в
 $\triangle ACQ$ с $AC = CQ$ $\angle CAQ = \angle CQA = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} =$
 $= 65^\circ$; в $\triangle ABP$ с $AB = BP$ $\angle BAP = \angle BPA =$
 $= \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$.

Тогда $\angle PAQ = \angle CAQ + \angle BAP - \angle BAC = 65^\circ + 70^\circ - 90^\circ = 45^\circ$.

Заметим, что тогда $\angle PRQ = \angle PAQ$,
и они оба опираются на $PQ \Rightarrow$ т.к.
 $PR = PQ$, то $A \in \omega$, где ω — окружность
с центром P , проходящая через P и Q .
Тогда $PR = AP = PQ$ как радиусы.

Тогда в $\triangle PRA$ $\angle RAP = \angle ARP = \angle APB - \angle PRP =$
 $= 70^\circ - 45^\circ = 25^\circ$, а в $\triangle QPA$ $\angle QAP =$
 $= \angle AQP - \angle PQR = 65^\circ - 45^\circ = 20^\circ$. Тогда
 $\angle BAP = \angle PAQ - \angle QAP = 70^\circ - 25^\circ = 45^\circ$ и
 $\angle CAQ = \angle CAQ - \angle PAQ = 65^\circ - 20^\circ = 45^\circ$.

Тогда заметим, что $APRC$ и $APQB$ — вписанные



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Сокращая, т.е. $\angle CAP = 180^\circ - \angle CPD = 45^\circ$ и $\angle BAP =$
 $= 180^\circ - \angle BQD = \angle PQD = 45^\circ$. Тогда $\angle PBC =$
 $= \angle PAQ = 20^\circ$.
Ответ 20° .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если $x = R$, то
 $x^2 = -Rx + x^2$
 $-Rx = 0$
 $x = 0 \quad X$

$$x(x-y) = (y-x) \cdot x(y+x-R)$$

$$x = R - x - y$$

$$Rx = R - y$$

$$x = x = 1 - \frac{y}{R}$$

$$xy = -Rx + x^2$$

$$yx = -Rx + x^2$$

$$x^2 = -xy + y^2$$

$$xy + 1 = (x-1)^2$$

$$x^2 + 1 = (y-1)^2$$

$$(x-1)^2 = xy + 1$$

$$x^2 = y(y-1)$$

$$\cancel{x^2 = y(y-x) - xy + 1}$$

$$y - \frac{y^2}{R} = -R + y + 1 - y + \frac{y^2}{y}$$

$$\frac{3y^2}{y} = y + 1$$

$$3y^2 = y + 1; 3y^2 - y - 1 = 0$$

$$x = R = 0 \quad X. D = 16 + 48 = 64$$

$$\cancel{x = R = 0 \quad X. y_1 = \frac{4+8}{6} = 2}$$

$$\cancel{x = R = 0 \quad X. y_2 = \frac{4-8}{6} = -\frac{2}{3}}$$

Потому

$$(x-R)^2 + (y-R)^2 + (R-R)^2 =$$

$$= \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{8}{6}\right)^2 \quad \checkmark \quad x = 1 + \frac{2}{6} = \frac{4}{3} = R$$

$$= \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{64}{9} = \frac{72}{9} = 8$$

Если $x \neq R$, то y удовлетв. эквив. $(x+R)^2 + (y+R)^2 + (x+y)^2$

$$\cancel{x = R} \quad xy = (x-1)^2 - 1 = (R-1)R$$

$$x = \frac{x(R-1)}{y}$$

$$\frac{x^2(x-R)}{y} = -xy + y^2; R^2(x-R) = y^2 - xy^2 =$$

$$(x+R)^2 - (x-R)^2 + (y+R)^2 - (y-R)^2 = y^2(y-R)$$

$$= 4xR + 4yR + 2xy = 5 - 8$$

$$4(xR + yR + xy) = 5 - 8$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 2xy + 2yz + 2zx &= -4(x+y+z) + x^2 + y^2 + z^2, \\
 (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2xz + z^2) + (y^2 - 2yz + z^2) &= 4(x+y+z), \\
 (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 &= 4(x+y+z) \\
 \Downarrow & \qquad \qquad \qquad \Downarrow \\
 x+y+z &> 0. & \qquad \qquad \qquad 8.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2x + 1 &= xy + 1; (x-1)^2 = xy + 1, \\
 (x-1)^2 &= yz + 1; (y-1)^2 = xz + 1, \\
 (x-1-z+1)(x+z-z) &= y(x-z), \\
 (x-z)(x+z-z) &= y(x-z). \quad \text{так как } x \neq z \\
 \left. \begin{aligned} y &= z - z - x, \\ x &= z - x - y, \\ x &= z - y - z. \end{aligned} \right\} & \begin{aligned} \text{ошибка} \\ \text{не} \end{aligned} \quad \begin{aligned} z &= 4 - x - z - y, \\ \underline{x+y+z} &= z. \end{aligned}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (y-z)^2 &= (-z-x)^2; (y-z)^2 = (x+z)^2, \\
 (x-z)^2 &= (x+y)^2; (x-z)^2 = (y+z)^2, \\
 (x+z)^2 + (y+z)^2 + (x+y)^2 &= 4(x+y+z)^2 \\
 \underbrace{1000 \dots 00}_{30001} & \quad \underbrace{99 \dots 9}_{3001} \quad \quad \quad \begin{aligned} 9^3 &= 729 \\ 729 & \\ \hline 801 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

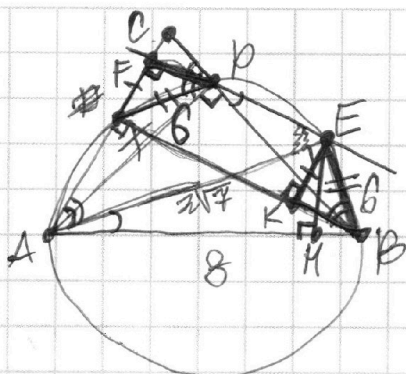


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$DF = \frac{CD \cdot AD}{AC} = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4.8$$

.....

$$AC=10, AB=8, BE=6; AF=2$$

$$AE = \sqrt{8^2 + 6^2} = 2\sqrt{7}$$

$$CD \cdot CB = AC \cdot CX = 10 \cdot CX$$

$$\frac{CD}{CB} = \frac{CF}{BX} = \frac{FX}{BX}$$

$$CD^2 = 10 \cdot CF$$

$$\frac{BE}{AE} = \frac{EK}{FE} = \frac{FX}{FE}$$

$$\frac{6}{2\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}} \quad AF \cdot FX = FD \cdot FE$$

1) Всего исходов — C_n^5 . Хороших — C_{n-3}^2 .

$$P = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{(n-3)(n-4)5!}{2(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n} = \frac{60}{n(n-1)(n-2)}$$

2) Всего — C_n^4 . Хороших — C_{n-3}^4 .

$$P = \frac{C_{n-3}^4}{C_n^4} = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)4!}{4! \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 5}{n(n-1)(n-2)}$$

$$P = \frac{4 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 5 \cdot 2} = 3.5 \text{ раз}$$

$$x^2 - (a^2 - 2a)x + (a^2 - a - 7) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{(a^2 - 2a) \pm \sqrt{(a^2 - 2a)^2 - 4(a^2 - a - 7)}}{2}$$

$$x_2 = \frac{(a^2 - 2a) + \sqrt{(a^2 - 2a)^2 - 4(a^2 - a - 7)}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{a^4(a-2)^2 - 4(a^2 - a - 7)}}{2}$$

$$(n+0)(n+1)(n+1) = n^3 + 3n + 3n^2 + 1$$

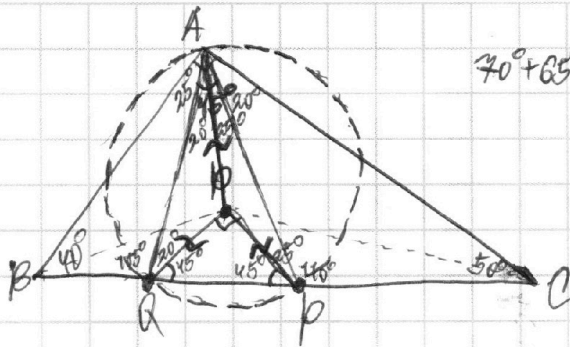


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$70^\circ + 65^\circ - \frac{180^\circ}{2} = 45^\circ$$

$$AP = AB \cos 40^\circ \cdot 2 = 2AB \cos 40^\circ.$$

$$AQ = AC \cos 65^\circ \cdot 2 = 2AC \cos 65^\circ.$$

$\triangle APB$ и $\triangle APC$ - **биссектрисы**.

$$\angle BPR = \angle BAR; \angle CPR = \angle CAP.$$



$$\angle BPR = 25^\circ \Rightarrow \angle PBC = 180^\circ - 135^\circ$$

$$-25^\circ = 20^\circ.$$

Искомое: 20° .

ДЗ

$$\triangle BKE \sim \triangle AFE \sim \triangle PFX \Rightarrow m.k.FX =$$

$$= EK, m.o. \triangle FXD = \triangle KEB \Rightarrow$$

$$BE = XD = 6.$$

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = 2\sqrt{7}.$$

$$AP \cdot PC = BX \cdot AC; \quad \frac{FX}{FE} = \frac{FP}{FA}$$

$$= \frac{XB}{AE} = \frac{3}{\sqrt{7}} \quad FX \cdot FA = FP \cdot FE.$$

$$CD = \frac{3}{4} AC = 7.5.$$

$$m.o. \triangle CXD \sim \triangle CBA.$$

$$\triangle FXD \sim \triangle AFE$$

$$\frac{FX}{AF} = \frac{3}{\sqrt{7}}; \quad AF = \frac{FP \cdot \sqrt{7}}{3} =$$

$$= \frac{25}{40} \cdot 7 = \frac{5 \cdot 7}{8} =$$

$$= 4.375.$$

$$p = \frac{CD \cdot AD}{AC} = \frac{7.5 \cdot 2.5\sqrt{7}}{10} = \frac{75}{40} \sqrt{7}.$$

$$\frac{FX}{FE} = \frac{FP}{FA} = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

$$BE = PX = 6.$$

$$CD = 7.5.$$

$$AP = \sqrt{100 - \frac{9}{16} \cdot 100} =$$

$$= 10 \sqrt{\frac{7}{16}} =$$

$$= 2.5\sqrt{7}.$$

$$AE = 2\sqrt{7}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

