



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 7

1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В теленгра ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}| + |y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}| \leqslant 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипotenузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} XY = 4Z + Z^2 & (1) \\ YZ = 4X + X^2 & (2) \\ ZX = 4Y + Y^2 & (3) \end{cases}$$

№1

$$(X+4)^2 + (Y+4)^2 + (Z+4)^2 = ? \quad (*)$$

(1) - (2) :

$$\begin{aligned} Y(X-Z) &= 4(Z-X) + (Z-X)(Z+X) \\ (Z-X)(Y+Z+X+Y) &= 0 \\ Z = X &\quad (\text{I}) \\ X+Y+Z &= -4 \quad (\text{II}) \end{aligned}$$

I) $\begin{cases} \text{Умножить } (2) : X^2 = 4X + X^2 \Rightarrow X^2 + 4X - YX = 0 \\ X(X+4-Y) = 0 \\ X = 0 \quad -\text{не подходит по условию} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Умножить } (1) \quad Y(Y-4) &= 4(Y-4) + (Y-4)^2 \\ Y^2 - 4Y &= 4Y - 16 + Y^2 - 8Y + 16 \\ \Rightarrow \text{Умножить } (3) : (Y-4)^2 &= 4Y + Y^2 \Rightarrow Y^2 - 8Y + 16 = Y^2 + 4Y \\ \Rightarrow 16 &= 12Y \Rightarrow Y = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*) : (Y-4+4)^2 + (Y+4)^2 + (Y-4+4)^2 &= 2Y^2 + Y^2 + 8Y + 16 \\ = 3Y^2 + 8Y + 16 &= 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 8 \cdot \frac{4}{3} + 16 = 32 \end{aligned}$$

Можно, если в системе все переменные поменять местами, то она не изменится \Rightarrow при вычитании $\& (2)-(3), (3)-(1)$ будем получать одно и тоже 32.

II) $X+Y+Z = -4$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Z &= -4 - X - Y \\ \text{Умножить } (3) : -X(4+X+Y) &= 4Y + Y^2 \Rightarrow -4X - X^2 - XY = 4Y + Y^2 \\ \Rightarrow 2XY &= -8X - 2X^2 - 8Y - 2Y^2 \\ \text{Умножить } (*) : (X+4)^2 + (Y+4)^2 + (Z+4)^2 &= \\ &= X^2 + 8X + 16 + Y^2 + 8Y + 16 + Z^2 + 8Z + 16 = \\ &= 2X^2 + 8X + 2Y^2 + 8Y + 2Z^2 + 8Z + 32 = 32 \end{aligned}$$

Ответ: 32



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$n \equiv -1 \pmod{10^{25000}}$$

$$\Rightarrow n^3 \equiv -1 \pmod{10^{25000}}$$

W2
=> Кубик для 25000 9-ок в n^3 есть.

Ещё одна 9-ка будет в кубике n^3
=> всего 9-ок = 25001

Ответ: 25001

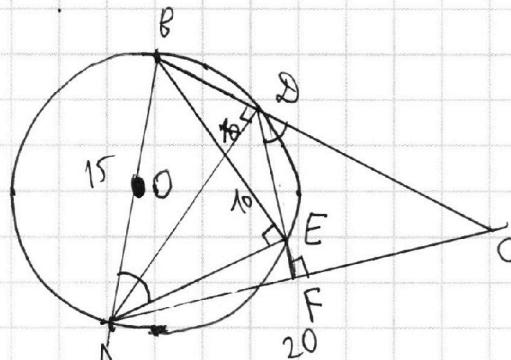


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



№3

$$\begin{aligned} AC &= 20 \\ AB &= 15 \\ BE &= 10 \\ AF &=? \end{aligned}$$

Решение:

Пусть $FC = X \Rightarrow AF = 20 - X$

$\triangle AEF$ - прямой, т.к. он шир. как AF (диаметр)

$$\sin \angle OAE = \frac{OE}{AF} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$\triangle ABE$ - прямой. $\sin \angle ABE = \sin \angle FDC = \frac{2}{3}$

$\triangle BDC$ - прямой. $\triangle BDC$ ($DF \perp AC$ н.ч.). $\sin \angle FDC = \frac{2}{3}$,
 $FC = X \Rightarrow DC = \frac{3}{2}X$

$$\Rightarrow \text{по Th Тибр. } DF = \sqrt{DC^2 - FC^2} = \sqrt{\frac{9}{4}X^2 - X^2} = \frac{X\sqrt{5}}{2}$$

$\angle ADF = 90^\circ$ (он шир. как диам.) $\Rightarrow \triangle ADC$ - прямой, DF - выс.

$$\Rightarrow DF = \sqrt{AF \cdot FC} = \sqrt{X(20-X)}$$

$$\Rightarrow \frac{X\sqrt{5}}{2} = \sqrt{X(20-X)} \Rightarrow \frac{5}{4}X^2 = 20X - X^2 \quad | \cdot 4$$

$$\Rightarrow 5X^2 = 80X - 4X^2 \Rightarrow 9X^2 - 80X = 0 \Rightarrow X(9X - 80) = 0$$

$$\begin{cases} X = 0 - \text{не подск.} \\ X = \frac{80}{9} \end{cases}$$

$$AF = 20 - X = 20 - \frac{80}{9} = \frac{100}{9}$$

$$\text{Ответ: } AF = \frac{100}{9}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Пусть X коробок было.

Методом спускаемых выиграть 5 коробок = $\frac{X(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)}{5!}$

Исходы, которые нас устраивают - это 3 коробки с маркирами и еще любые 2. Всего вариантов

$$\Rightarrow P_1 = \frac{\binom{X-3}{2}}{\frac{X(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)}{5!}} = \frac{5!}{2!(X-1)(X-2)}$$

Если спускаемых выиграть 8 коробок =

~~$\frac{X(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)(X-5)(X-6)(X-7)}{8!}$~~ (!: 8! т.к. порядок не важен)

Исходы, которые нас устраивают - это 3 коробки с маркирами и еще любые 5. Всего вариантов = $\frac{(X-3)(X-4)(X-5)(X-6)(X-7)}{5!}$

$$\Rightarrow P_2 = \frac{\frac{(X-3)(X-4)(X-5)(X-6)(X-7)}{5!}}{\frac{X(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)(X-5)(X-6)(X-7)}{8!}} = \frac{8!}{5!(X-1)(X-2)}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{8!}{5!(X-1)(X-2)}}{\frac{2!(X-1)(X-2)}{5!(X-4)(X-3)(X-2)}} = \frac{\frac{8!}{2!}}{5!} = 5,6$$

Ответ: б 5,6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} b_3 - \text{арифм. прогр. в члн, } d - \text{разность} \\ x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0 \end{cases} \quad X_1, X_2 - \text{корни} \quad (1)$$

Пусть ке умножая обозначсти $X_1 = b_4 = b_1 + 3d$,
 $X_2 = b_1 + 4d$

$$2X^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0, \quad X_3, X_4 - \text{корни} \quad (2)$$

Пусть ке умножая обозначсти $X_3 = b_2 = b_1 + d$, $X_4 = b_1 + 6d$

Задумаем, что $X_1 + X_2 = X_3 + X_4$ ($2b_1 + 7d = 2b_1 + 7d$).

По Т. Виета из (1) $X_1 + X_2 = a^2 - a$, из (2) $X_3 + X_4 = \frac{a^3 - a^2}{2}$

$$\Rightarrow a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{2} \Rightarrow 2a^2 - 2a = a^3 - a^2 \Rightarrow a^3 - 3a^2 + 2a = 0$$

$$\Rightarrow a(a-1)(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \\ a=2 \end{cases}, \text{Другие значения}$$

a ке подходит. Проверим эти 3 значения a :

$$1) a=0$$

$$(1) X^2 - (0^2 - 0)x + \frac{2-0^3}{3} = 0 \Rightarrow X^2 = -\frac{2}{3} \Rightarrow \emptyset$$

Но ке условию каскада из ур-ия имеем 2 корня.

$$\Rightarrow a=0 - \text{ке подходит.}$$

$$2) a=1$$

$$(1) X^2 - (1^2 - 1)x + \frac{2-1^3}{3} = 0 \Rightarrow X^2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow \emptyset$$

$$\Rightarrow a=1 - \text{ке подходит.}$$

$$3) a=2$$

$$(1) X^2 - (2^2 - 2)x + \frac{2-2^3}{3} = 0 \Rightarrow X^2 - 2X - 2 = 0$$

$$X_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$(2) 2X^2 - (2^3 - 2^2)x - 2 \cdot 2^6 - 8 \cdot 2 - 4 = 0 \Rightarrow 2X^2 - 4X - 128 - 16 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow X^2 - 2X - 74 = 0$$

$$X_{3,4} = \frac{2 \pm \sqrt{4+74}}{2} = \frac{2 \pm 10\sqrt{3}}{2} = 1 \pm 5\sqrt{3}$$

$$\text{Три } b_2 = 1 - 5\sqrt{3}, b_4 = 1 + \sqrt{3}, b_5 = 1 + \sqrt{3}, b_7 = 2 + 5\sqrt{3}$$

Условие выполняется ($d = 2\sqrt{3} \Rightarrow a = 2 - \text{подходит}$) **Ответ:** $a = 2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & \text{1} \quad \text{2} \quad \text{3} \quad \text{4} \quad \text{5} \quad \text{6} \quad \text{7} \\
 & \text{STRANICA} \\
 & \text{IZ}
 \end{aligned}$$

$y \geq 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}$
 $y \leq 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}$
 $y = 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}$
 $x^2 + 8x + 16 + y^2 + 8y + 16 + z^2 + 8z + 16$
 $x^2 + y^2 =$
 $-4x - 4y - xy$
 $x^2 + 8x + 16 + y^2 + 8y + 16 + z^2 + 8z + 16$
 $= -8x - 2x^2 - 8y - 2y$
 $y = 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \quad (x-3)(x-4)$
 $x(x-1)(x-2)$
 $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)$
 $\frac{1}{(x-2)(x-3)(x-4)}$
 $z = -4 - x - y$
 $99 = -1$
 $100 = 0$
 $100000000 = 1$
 $\frac{1}{(x-5)(x-6)(x-7)} \quad \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(x-5)(x-6)(x-7)}$
 $\frac{5!}{(x-1)(x-2)} \quad \frac{5!}{2!(x-1)(x-2)} = \frac{5!}{100}$
 $\frac{8!}{(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)} \quad \frac{8!}{5!(x-1)(x-2)} = \frac{8!}{98209}$
 $\frac{5!(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)}{5!(x-1)(x-2)} = \frac{8! \cdot 2!}{5! 5!} = \frac{108309}{88209}$
 $\frac{8! \cdot 7! \cdot 2^2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{56}{2} = 5,6 \quad -x(4+xy) = 4y+xy$
 $-4x - x^2 - xy = 4y + xy$
 $-4x - x^2 - 4y - y^2 = xy$
 $x^2 + 8x + 16 + y^2 + 8y + 16 + z^2 + 8z + 16$
 $a^2 - 3a + 2 = 0 \quad a = 1 \quad a = 2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

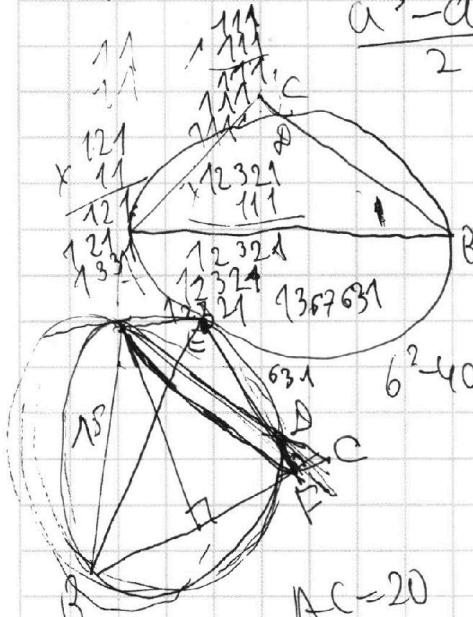
$$\begin{aligned}
 & (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = x^2 + 8x + 16 + y^2 + 8y + 16 + z^2 + 8z + 16 \\
 & \quad x^2 + y^2 + z^2 + 8(x+y+z) + 48 \\
 & \quad (x+y+z)^2 - 2xy - 2xz - 2yz + 8(xy+yz+zx) + 48 \\
 & \quad (x+y+z)^2 - 2(yz+z^2) - 2(yx+x^2) - 2(zx+x^2) + \\
 & \quad + 8(x+y+z) + 48 \\
 & \quad xy - x^2 + (yz - zx) + (zx - y^2) = 4(xy + zx) \\
 & \quad x^2 + y^2 + z^2 + 4xy - 4z^2 + 4yz - 4x^2 + 4zx - \\
 & \quad (x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3 + z_1 + z_2 + z_3)
 \end{aligned}$$

$$n = \underbrace{99 \dots 990}_{A^3} = 9 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 \cdot 11 + 9^3 \cdot 111$$

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a}{a} = 0$$

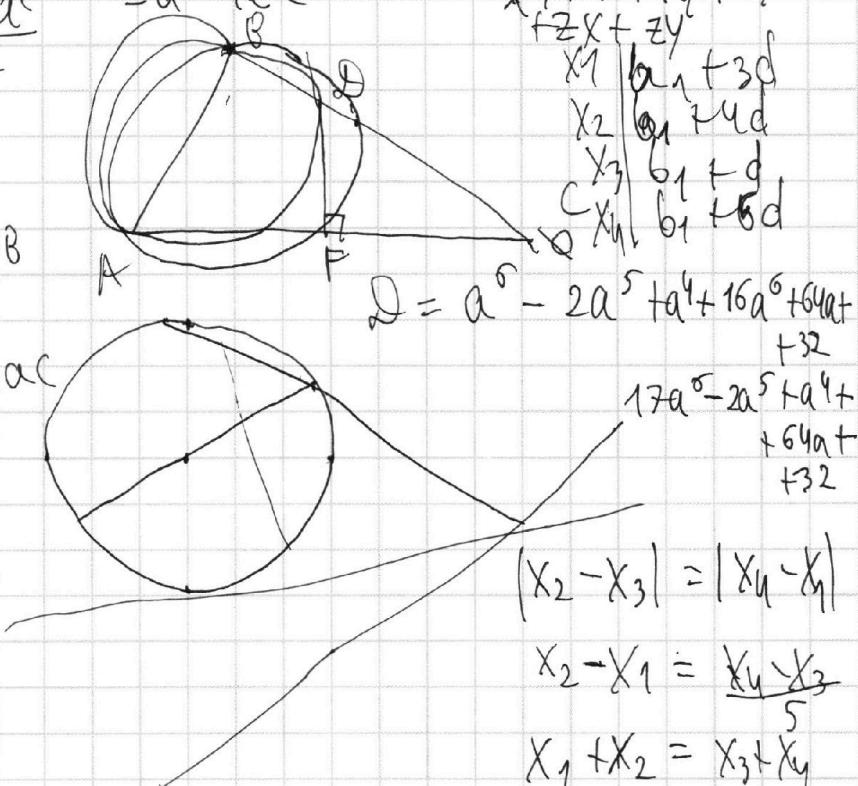
$$x_1, x_2 = 4 \text{ u } 5 \text{ unter}$$

$$D = \frac{2x^2 - (a^3 - a)x - 2a^0 - 8a - 4}{(a^2 - a)^2} = \frac{2x^2 - (a^3 - a)x - 2a^0 - 8a - 4}{a^4 - 2a^3 + a^2} = \frac{2x^2 - (a^3 - a)x - 2a^0 - 8a - 4}{a^4 - 6a^3 + 3a^2 + 4a^3 - 8}$$



$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{a}$$

$$2a^2 - 2a = a^3 - a^2 \Rightarrow a^3 - 3a^2 + 2a = 0 \\ a(a^2 - 3a + 2) = 0 \quad a=0 \quad a=1 \quad a=2$$



$$|x_2 - x_3| = |x_4 - x_1|$$

$$X_2 - X_1 = \frac{X_4 - X_3}{5}$$

$$X_1 + X_2 = X_3 + X_4$$