



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В теленigre ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замесла фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} XY = 4Z + Z^2 & (1) \\ YZ = 4X + X^2 & (2) \\ ZX = 4Y + Y^2 & (3) \end{cases} \quad \text{или} \quad (X+4)^2 + (Y+4)^2 + (Z+4)^2 = ? \quad (*)$$

$$(1) - (2): \\ Y(X-Z) = 4(Z-X) + (Z-X)(Z+X) \\ (Z-X)(4 + Z + X + Y) = 0 \\ \begin{cases} Z = X & (I) \\ X + Y + Z = -4 & (II) \end{cases}$$

$$I) \text{ из } (2): XY = 4X + X^2 \Rightarrow X^2 + 4X - YX = 0 \\ X(X + 4 - Y) = 0 \\ \begin{cases} X = 0 & \text{не подходит} \\ X = Y - 4 \Rightarrow Z = Y - 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{из } (1): Y(Y-4) = 4(Y-4) + (Y-4)^2 \\ Y^2 - 4Y = 4Y - 16 + Y^2 - 8Y + 16$$

$$\Rightarrow \text{из } (3): (Y-4)^2 = 4Y + Y^2 \Rightarrow Y^2 - 8Y + 16 = Y^2 + 4Y \\ \Rightarrow 16 = 12Y \Rightarrow Y = \frac{4}{3}$$

$$(*) : (Y-4+4)^2 + (Y+4)^2 + (Y-4+4)^2 = 2Y^2 + Y^2 + 8Y + 16 \\ = 3Y^2 + 8Y + 16 = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 8 \cdot \frac{4}{3} + 16 = 32$$

т.к. если в системе все переменные поменять местами, то она не изменится $\Rightarrow$ при вычитании (2)-(3), (3)-(1) будет получаться также 32.

$$II) X + Y + Z = -4 \\ \Rightarrow Z = -4 - X - Y \\ \text{из } (3): -X(4+X+Y) = 4Y + Y^2 \Rightarrow -4X - X^2 - XY = 4Y + Y^2 \\ \Rightarrow 2XY = -8X - 2X^2 - 8Y - 2Y^2 \\ \text{из } (*): (X+4)^2 + (Y+4)^2 + (-4-X-Y+4)^2 = \\ = X^2 + 8X + 16 + Y^2 + 8Y + 16 + X^2 + 2XY + Y^2 = \\ = 2X^2 + 8X + 2Y^2 + 8Y + 2XY + 32 = 32$$

Ответ: 32



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

w2

$$n \equiv -1 \pmod{10^{25000}}$$
$$\Rightarrow n^3 \equiv -1 \pmod{10^{25000}}$$

$\Rightarrow$ Наме для 25000 9-ок в n^3 есть.
Еще одна 9-ка будет в разряде n^3
 $\Rightarrow$ всего 9-ок = 25001

Ответ: 25001

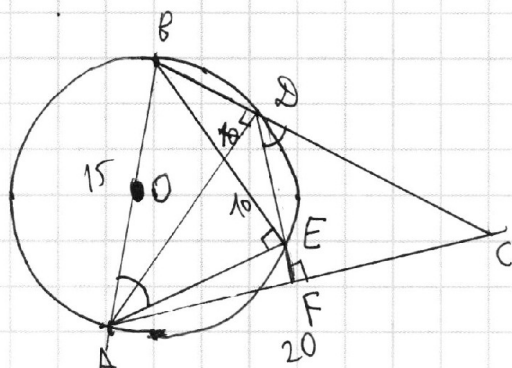


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



AC=20
AB=15
BE=10
AF=?

Решение:

Пусть $FC = X \Rightarrow AF = 20 - X$

$\triangle AEB$ - прямоугольн. т. к. омп. на AB (диаметр.)

$$\sin \angle BAE = \frac{BE}{AB} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$ABDE$ - впис. ч. у. $\Rightarrow \angle BAE = \angle FDC \Rightarrow \sin \angle FDC = \frac{2}{3}$

В прямоугольн. $\triangle DFC$ ($DF \perp AC$ по ут.) $\sin \angle FDC = \frac{2}{3}$,
 $FC = X \Rightarrow DC = \frac{3}{2}X$

$$\Rightarrow \text{по Тх Пиф. } DF = \sqrt{DC^2 - FC^2} = \sqrt{\frac{9}{4}X^2 - X^2} = \frac{X}{2}\sqrt{5}$$

$\angle ADB = 90^\circ$ (омп. на diam) $\Rightarrow \triangle ADC$ - прямоугольн, DF - впис.

$$\Rightarrow DF = \sqrt{AF \cdot FC} = \sqrt{X(20-X)}$$

$$\Rightarrow \frac{X}{2}\sqrt{5} = \sqrt{X(20-X)} \Rightarrow \frac{5}{4}X^2 = 20X - X^2 \quad | \cdot 4$$

$$\Rightarrow 5X^2 = 80X - 4X^2 \Rightarrow 9X^2 - 80X = 0 \Rightarrow X(9X - 80) = 0$$

$$\begin{cases} X = 0 - \text{не пох.} \\ X = \frac{80}{9} \end{cases}$$

$$AF = 20 - X = 20 - \frac{80}{9} = \frac{100}{9}$$

Ответ: $AF = \frac{100}{9}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

уч

Пусть X коробок всего:

Тогда способов выбрать 5 коробок = $\frac{X(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)}{5!}$

Условия, которые нас устраивают — это 3 коробки с шариками и еще любые 2. Всего вариантов

$$= \frac{(X-3)(X-4)}{2!}, \quad P_1 = \frac{\frac{(X-3)(X-4)}{2!}}{\frac{X(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)}{5!}} = \frac{5!}{2! X(X-1)(X-2)}$$

Если способов выбрать 8 коробок =

$$\frac{X(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)(X-5)(X-6)(X-7)}{8!} \quad \text{т.к. порядок не важен}$$

Условия, которые нас устраивают — это 3 коробки с шариками и еще любые 5. Всего вариантов

$$\Rightarrow P_2 = \frac{\frac{(X-3)(X-4)(X-5)(X-6)(X-7)}{5!}}{\frac{X(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)(X-5)(X-6)(X-7)}{8!}} = \frac{8!}{5! X(X-1)(X-2)}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{8!}{5! X(X-1)(X-2)} \cdot \frac{2! X(X-1)(X-2)}{5!} = \frac{8! 2!}{5! 5!} =$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{28}{5} = 5,6$$

Ответ: в 5,6



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\{b_3\}$ - ариф. прогр. в урн, d - разность $\sqrt{5}$
 $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2 - a^3}{3} = 0$, x_1, x_2 - корни (1)

Пусть не учитывая общности $x_1 = b_4 = b_1 + 3d$,
 $x_2 = b_5 = b_1 + 4d$

$2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$, x_3, x_4 - корни (2)

Пусть не учитывая общности $x_3 = b_2 = b_1 + d$, $x_4 = b_1 + 6d$

Заметим, что $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ ($2b_1 + 7d = 2b_1 + 7d$).
 По Т. Виета из (1) $x_1 + x_2 = a^2 - a$, из (2) $x_3 + x_4 = \frac{a^3 - a^2}{2}$

$\Rightarrow a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{2} \Rightarrow 2a^2 - 2a = a^3 - a^2 \Rightarrow a^3 - 3a^2 + 2a = 0$

$\Rightarrow a(a-1)(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \\ a=2 \end{cases}$, другие значения

a не подходят. Проверим эти 3 значения a :

1) $a=0$

(1) $x^2 - (0^2 - 0)x + \frac{2 - 0^3}{3} = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{2}{3} \Rightarrow \emptyset$

Но по условию каждая из ур-ий имеет 2 корня.
 $\Rightarrow a=0$ - не подходит.

2) $a=1$

(1) $x^2 - (1^2 - 1)x + \frac{2 - 1^3}{3} = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow \emptyset$

$\Rightarrow a=1$ - не подходит.

3) $a=2$

(1) $x^2 - (2^2 - 2)x + \frac{2 - 2^3}{3} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$
 $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$

(2) $2x^2 - (2^3 - 2^2)x - 2 \cdot 2^6 - 8 \cdot 2 - 4 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 128 - 16 - 4 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 74 = 0$

$x_{3,4} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 74 \cdot 4}}{2} = \frac{2 \pm 10\sqrt{3}}{2} = 1 \pm 5\sqrt{3}$

При $b_2 = 1 - 5\sqrt{3}$, $b_4 = 1 - \sqrt{3}$, $b_5 = 1 + \sqrt{3}$, $b_7 = 1 + 5\sqrt{3}$

условие выполняется ($d = 2\sqrt{3}$) $\Rightarrow a=2$ - подходит. Ответ: $a=2$

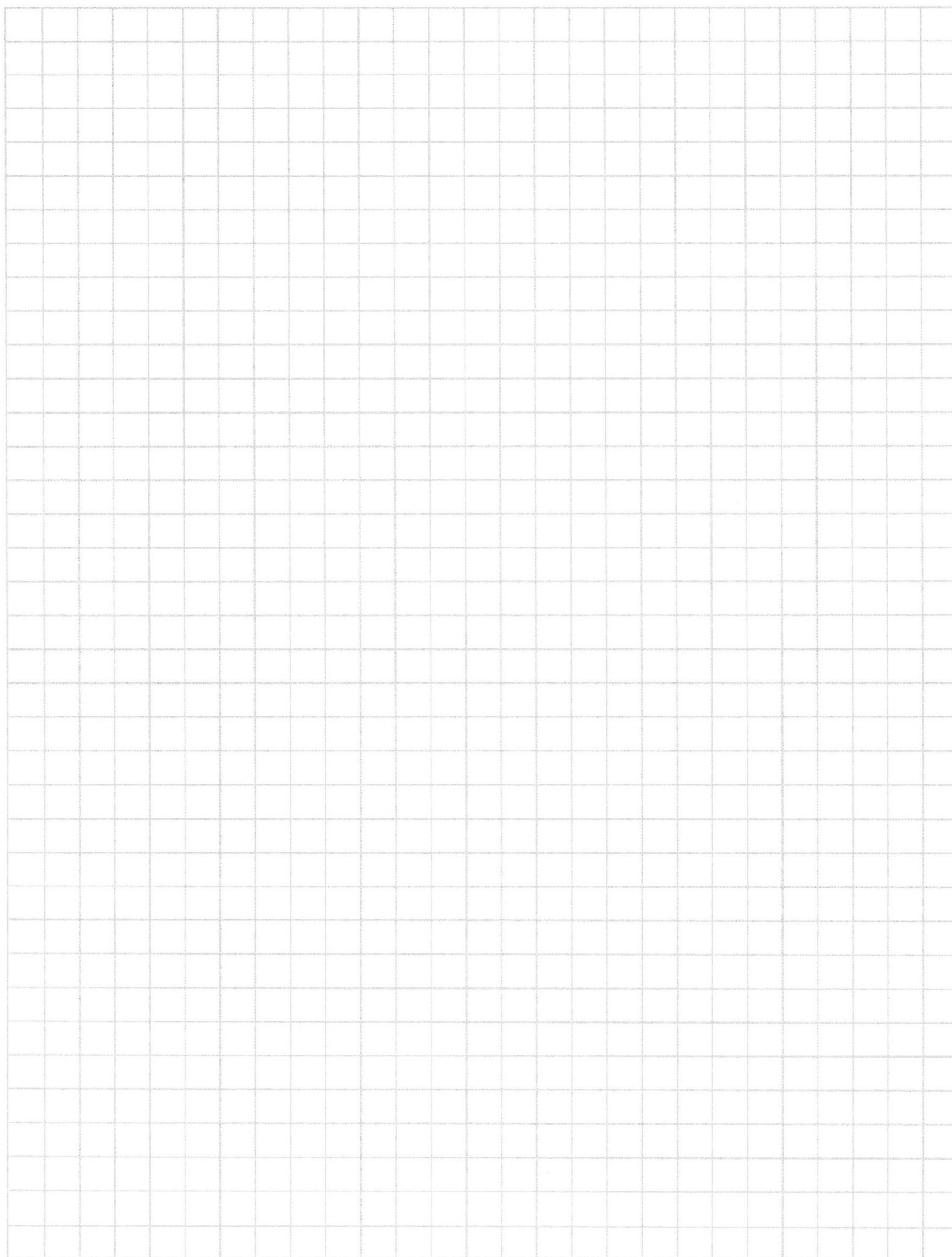


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4$$

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 \\ -yz = 4x + x^2 \\ z^2x = 4y + y^2 \end{cases}$$

$$y(x-z) = 4(z-x) + (z-x)(z+x)$$

$$(z-x)(4 + z + x + y) = 0$$

$$z = x$$

$$x + y + z = -4$$

$$x + y = -4 - z$$

$$z = -4 - x - y$$

$$y(-4 - x - y) = 4x + x^2$$

$$z(-(4 + x + y)x) = 4y + y^2$$

$$z(y-x) = 4(x-y) + (x-y)(x+y)$$

$$(x-y)(4 + x + y + z)$$

$$x = y \quad 4 - 16 - 4x - 4y + x^2 + y^2 + 16 + 4x + 8y$$

$$2y^2 + 8y + y = -4 + 2xy$$

$$2y^2 + 8y + y^2 - 4y = -4$$

$$x = \frac{16 - 16}{9} = \frac{16}{9} + \frac{16}{9}$$

$$z = \frac{y}{3} - \frac{42}{3}$$

$$xy = -4y - 4x - y^2 - x^2$$

$$x + y + z = -4$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 8(x+y+z) + 48 = ?$$

$$3x^2 + 24x + 48$$

$$1) z = x$$

$$x^2 = 4y + y^2$$

$$4x = 4x + x^2$$

$$x^2 + 4x = 4y + 4x + y^2 + x^2$$

$$x(y-4) = 4y + y^2$$

$$x = \frac{y^2 + 4y}{y-4}$$

$$2\left(\frac{y^2 + 4y}{y-4}\right)^2 + (y+4)^2$$

$$x^2 =$$

$$3y^2 + 4y = -4y + 16$$

$$3y^2 + 8y - 16 = 0$$

$$D = 64 \quad D = 64 + 192 = 256$$

$$y = \frac{-8 \pm 16}{6} = \frac{-8}{6} \pm \frac{16}{6}$$

$$x = \frac{64}{9} = \frac{64}{9} \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) = -\frac{8}{3}$$

$$x = \frac{16 - 16}{9} = \frac{16}{9} + \frac{16}{9}$$

$$z = \frac{y}{3} - \frac{42}{3}$$

$$x^2 + 4x - 4x = 0$$

$$x(x + 4 - y) = 0$$

$$x = y - 4$$

$$3 \cdot \frac{16}{9} = \frac{16}{3} + \frac{32}{9}$$

$$x^2 + y^2 + 4xy - 4y = 4(y-4) + y^2$$

$$+ 2xy = y^2 - 4y = 4y - 16 + y^2$$

$$x^2 + -4y - 4x - y^2 + 16 = 8y$$

$$x + y^2 + 8(x+y) + x^2 + y^2 + 2xy = 2xy$$

$$y^2 = y^2 - 8y + 16 - 4y$$

$$2^2 + 0^2 + 2^2 = 36 + 44 = 80$$

$$x = -4 - y - z$$

$$x + y + z = -4$$

$$x^2 + y^2 + 8x + 8y + 16 =$$

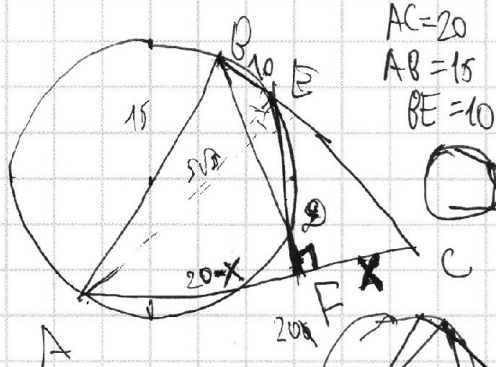


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



AC=20
AB=15
BE=10

$$AF = 20 - \frac{80}{4} - \frac{55}{4} = \frac{25}{4} = 6,25$$

$$\sqrt{15^2 - 10^2} = \sqrt{5 \cdot 25} = 5\sqrt{5}$$

$$EF = \sqrt{X(20-X)}$$

$$X(20-X) = 125 - (20-X)^2$$

$$20X - X^2 = 125 - X^2 + 40X - 400$$

$$295 =$$

$$20X - 4X = 55$$

$$X = \frac{55}{4}$$

X корень

$$X(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)$$

$$\frac{X^4}{286}$$

5

729.

$$2) a=1$$

$$X^2 + \frac{1}{3} \neq 0$$

$$3) a=2$$

$$X^2 - 2X - \frac{2}{3} = 0$$

$$D = 4 + \frac{16}{3} = \frac{28}{3}$$

$$X = \frac{2 \pm \sqrt{\frac{28}{3}}}{2}$$

$$\frac{2 \pm 4\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1 \pm 2\sqrt{3}}{1}$$

$$X^2 - 2X - 2 = 0$$

$$D = 4 + 8 = 12$$

$$X = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$a_2 = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$a_1 = 1 - \sqrt{3} = b_1 + 3d$$

$$b_5 = 1 + \sqrt{3} = b_1 + 4d$$

$$b_2 = 2 - \sqrt{290} = b_1 + d$$

$$b_7 = 2 + \sqrt{290} = b_1 + 6d$$

$$12321$$

$$D = 4 + 288 = 292 = 2^3 \cdot 37$$

$$X = \frac{2 \pm \sqrt{290}}{2}$$

$$X(20-X) =$$

$$2 + \sqrt{290} - 1 - \sqrt{3} = 1 - \sqrt{3} - 2 + \sqrt{290}$$

$$1 + \sqrt{290} - \sqrt{3} \neq \sqrt{290} - \sqrt{3} - 1$$

$$2 + \sqrt{290} - 1 + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{290}$$

$$1113$$

$$b_2 = 1 - 5\sqrt{3}$$

$$b_4 = 1 - \sqrt{3}$$

$$b_5 = 1 + \sqrt{3}$$

$$b_7 = 1 + 5\sqrt{3}$$

$$D = \frac{3X}{2}$$

$$DC = \frac{2}{3}$$

$$X \cdot 124$$

$$X \cdot 11$$

$$121$$

$$1331$$

$$FC = X$$

$$X$$

$$FC$$

$$DC$$

$$1367631$$

$$12321$$

$$b_2 = 1 - 5\sqrt{3}$$

$$b_4 = 1 - \sqrt{3}$$

$$b_5 = 1 + \sqrt{3}$$

$$b_7 = 1 + 5\sqrt{3}$$

$$D = \frac{3X}{2}$$

$$DC = \frac{2}{3}$$

$$\frac{5}{4} X^2 \cdot \frac{74}{4}$$

$$\frac{29}{6}$$

$$115X$$

$$1234321$$

$$1111$$

$$1234321$$

$$1234321$$

$$1234321$$

$$1234321$$

$$30631$$

