



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} S &= (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 4(x+y+z) + 12 = \text{(из системы)} = xy + yz + zx - 2(x+y+z) + 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2S &= 2(xy + yz + zx) - 4(x+y+z) + 24 \\ &= (x+y+z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) + 24; \end{aligned}$$

$$\begin{cases} xy = z^2 - 2z \Rightarrow (z-2)^2 = \left(\frac{xy}{z}\right)^2 \\ yz = x^2 - 2x \Rightarrow (x-2)^2 = \left(\frac{yz}{x}\right)^2 \\ zx = y^2 - 2y \Rightarrow (y-2)^2 = \left(\frac{zx}{y}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S &= \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 = xy + yz + zx \\ &- 2(x+y+z) + 12 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \underbrace{9999 \dots 9}_{30001 \text{ циф.}} = \underbrace{1000 \dots 0}_{30001 \text{ нуль}} - 1$$

$$n^2 = \left(\underbrace{1000 \dots 0}_{30001 \text{ нуль}} - 1 \right)^2 = \underbrace{1000 \dots 0}_{90003 \text{ нуля}} - \underbrace{300 \dots 0}_{60002 \text{ нуля}} +$$

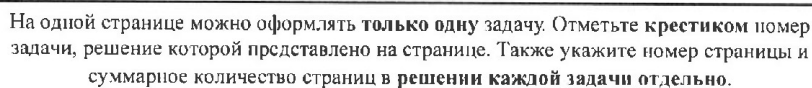
$$+ \underbrace{300 \dots 0}_{30001 \text{ нуль}} - 1 = \underbrace{9999 \dots 9}_{90003 \text{ девяток}} - \underbrace{300 \dots 0}_{60002 \text{ нуля}} +$$

$$+ \underbrace{300 \dots 0}_{30001 \text{ нуль}} =$$

$$= \underbrace{999 \dots 9}_{90003 \text{ девяток}} - 3 \left(\underbrace{1000 \dots 0}_{60002 \text{ нуля}} - \underbrace{1000 \dots 0}_{30001 \text{ нуль}} \right)$$

$$= 999 \dots 9 - 3 \left(\underbrace{99 \dots 9}_{30001 \text{ девяток}} \underbrace{00 \dots 0}_{30001 \text{ нуль}} \right) =$$

$$= 3 \left(\underbrace{333 \dots 3}_{90003 \text{ тройки}} - \underbrace{999 \dots 9}_{30001 \text{ дев.}} \underbrace{00 \dots 0}_{30001 \text{ нуль}} \right)$$



СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

[illegible]

3 3 3 ... 3 2 3 ... 3 3 4 3 ... 3 3 3

T.K. ~~3.3~~ $3 \cdot 3 + 1 = 10$

$\Rightarrow$ всего 60 001 девятка в n^3



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \frac{CD}{AB} = \frac{FD}{EA} \Rightarrow \frac{CD}{FD} = \frac{AB}{EA} = \frac{8}{\sqrt{28}} = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{FD}{DC} = \frac{\sqrt{47}}{4} = \frac{AD}{AC} = \frac{AF}{AD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD = \frac{10\sqrt{7}}{4}; AF \cdot AC = AD^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10AF = \frac{7 \cdot 100}{16} \Rightarrow AF = \frac{70}{16} = \frac{35}{8}$$

Ответ: $AF = \frac{35}{8}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть ведущий берет n коробок. Тогда шары могут располагаться в них C_n^3 способами. Среди них подходят лишь те, которые попадают на выбранную 5-ю коробку, т.е. $C_5^3 \Rightarrow P_1 = \frac{C_5^3}{C_n^3}$

Когда игроки разрешают открыть 7 коробок, то общее кол-во способов размещения шаров не меняется, равно C_n^3 , но теперь нам подходят лишь те тройки, которые полностью пересекаются с 7-ю выбранными коробками т.е. $C_7^3 \Rightarrow \frac{P_1}{P_A} \Rightarrow P_2 = \frac{C_7^3}{C_n^3} \Rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☒☐☐☐

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{P_2}{P_4} &= \frac{\left(\frac{C_7^3}{C_n^3} \right)}{\left(\frac{C_5^3}{C_n^3} \right)} = \frac{C_7^3}{C_5^3} = \\ &= \frac{\left(\frac{7!}{3! \cdot 4!} \right)}{\left(\frac{5!}{2! \cdot 3!} \right)} = \frac{7! \cdot 2! \cdot 3!}{5! \cdot 3! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 2}{2 \cdot 5 \cdot 4} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{7}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

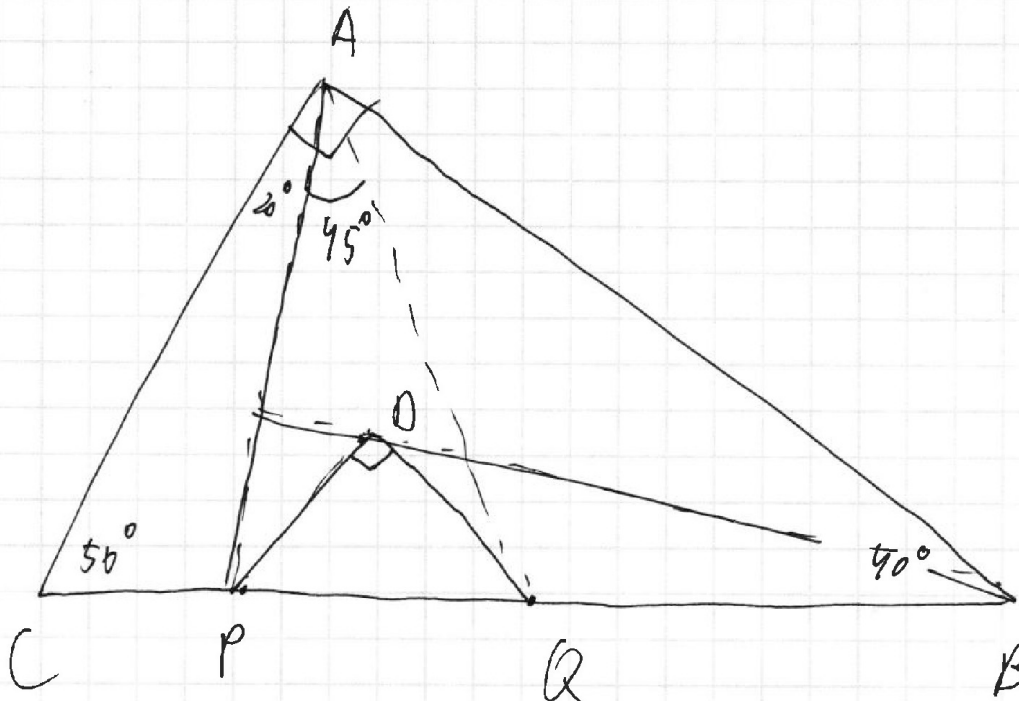
5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) $\angle ABC = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$; $\triangle APB \sim P/B \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle PAB = \angle APB = 70^\circ$

2) $\angle CAP = 90^\circ - \angle PAB = 20^\circ$

3) $\angle CAQ = \angle CQA = \frac{180 - 50}{2} = 65^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle PAQ = \angle CAQ - \angle CAP = 45^\circ$

4) Т. D лежит на сер. перпе к PQ
(т.к. $PD = DQ$ по усл.); $\angle PDQ = 2 \cdot \angle PAQ$
На сер. перпе к PQ только одна
точка, такая, эту образует



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

угол 90° (по одну сторону от PQ) α , знае, что $\angle PAQ \cdot 2 = 90^\circ = \angle PBQ \Rightarrow D -$ ~~центр~~
описаной окр. ок. $\triangle PAQ$

5) По свойству центра опис. окр. D лежит на сер. пер-е к AP . Т. B также лежит на сер. пер-е к AP т.к. $BA \perp BP \Rightarrow$ в $\triangle BAP$ BD - ось симметрии (в частности - биссектр.)
 $\Rightarrow \angle DBP = \angle DBA = 20^\circ = \angle DBC$

Ответ: $\angle DBC = 20^\circ$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, featuring geometric diagrams and algebraic derivations.

Top Section: Includes a QR code and a header with instructions in Russian. Below the header, there are checkboxes for tasks 1 through 7 and a page number field.

Geometric Diagrams:

- A large triangle with vertices labeled A , B , and C . Internal points and lines are labeled with various numbers and variables.
- A smaller triangle is shown below the main one, with vertices labeled x , y , and z .

Algebraic Derivations:

Top right:

$$14000000 + 90 = 14000090$$
$$2430$$

Middle right:

$$\angle OBC = ?$$

Bottom right:

$$130$$
$$y^2 - 4y + 4y - 4y$$
$$+ 4y$$
$$+ 28$$

Bottom left:

$$xy + yz + zx = (z-1)656$$
$$(z-2) \left(z \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{3} \right)$$
$$= x^2 + x^2 + x^2$$
$$y-1$$
$$\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \right)^2$$
$$\left(\frac{1}{2}(y-2) + \frac{1}{2}(y-2) \right)^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4

1
2

3

4

7

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2 \\ yz = -2x + x^2 \\ zx = -2y + y^2 \end{cases}$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 4x + 4 \\ x^2 - 2x \quad -2x + 4 \\ \hline yz - x^2 + 4 \end{array}$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$xy + yz + zx - 2z - 2y - 2x + 12$$

$$999 \dots 9(100 \dots 0 + 10000 + 1)$$

$$\begin{array}{r} 30001 \text{ девятки} \\ 999 \dots 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30002 \text{ в} \\ 100000 \dots 0 - 1 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

[illegible]



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐

СТРАНИЦА

___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x+y+z)^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 5$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z + 12 = 5$$

$$xy + yz + zx + 2x + 2y + 2z$$

$$xy + yz + zx - 2(x+y+z) + 12 = 5$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - 2(x+y+z) + 9$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - (xy + yz + zx) = 5$$

$$(x+y+z)^2 - x^2 - y^2 - z^2 - 2(xy + yz + zx)$$

$$2xy + 2yz + 2zx = -2z + 2z^2$$

$$2yz + x = -2x + 2x^2$$

$$2zx + y = -2y + 2y^2$$

$$(x+y+z)^2 = 2z(z-1)$$
$$\frac{x^2}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{z}{\sqrt{2}}$$
$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}} \right)^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

xy

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2 \\ yz = -2x + x^2 \\ zx = -2y + y^2 \end{cases}$$

$$z(y-2) + y(x-2) + x(z-2)$$

$$\frac{C_3^3}{C_n^3}$$

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2 - y(xy + yz + zx)}{10 \cdot 35}$$

$$\frac{(x+y+z)^2 - \cancel{3x^2 - 3y^2 - 3z^2}}{C_7^3}$$

$$\frac{2(xy + yz + zx) - \cancel{2x^2 - 2y^2 - 2z^2}}{C_5^3}$$

$$\begin{aligned} & x^2 + yx + y \\ & y^2 - 4yz + y \\ & z^2 + 4z + y \end{aligned}$$

$$= \frac{7!}{4! \cdot 3!}$$

$$\frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 5}{5 \cdot 1 \cdot 7} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

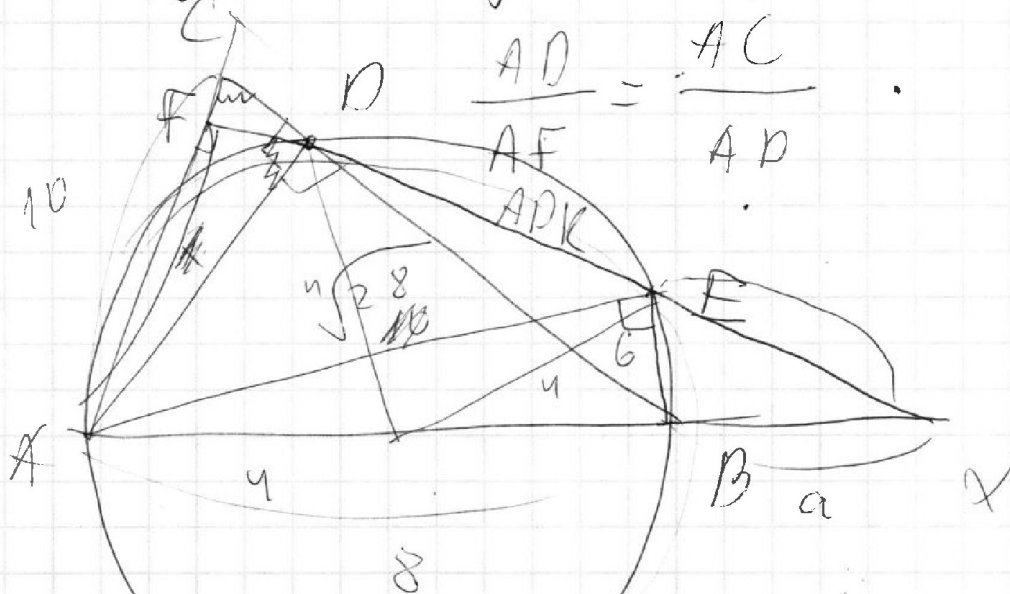
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = 16$$

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$$



$$(x+y+z)^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 16 - 36 = -20$$

$$xyz = (z-1)(1-x)(1-y) + z(1-x) + y(1-z)$$

$$(x+y+z)^2 - 2(xy+xz+yz) = 2(xy+xz+yz) - 2(xy+xz+yz) = 0$$

$$\frac{FC}{EB} = \frac{CD}{AB} = \frac{AD}{EA}$$

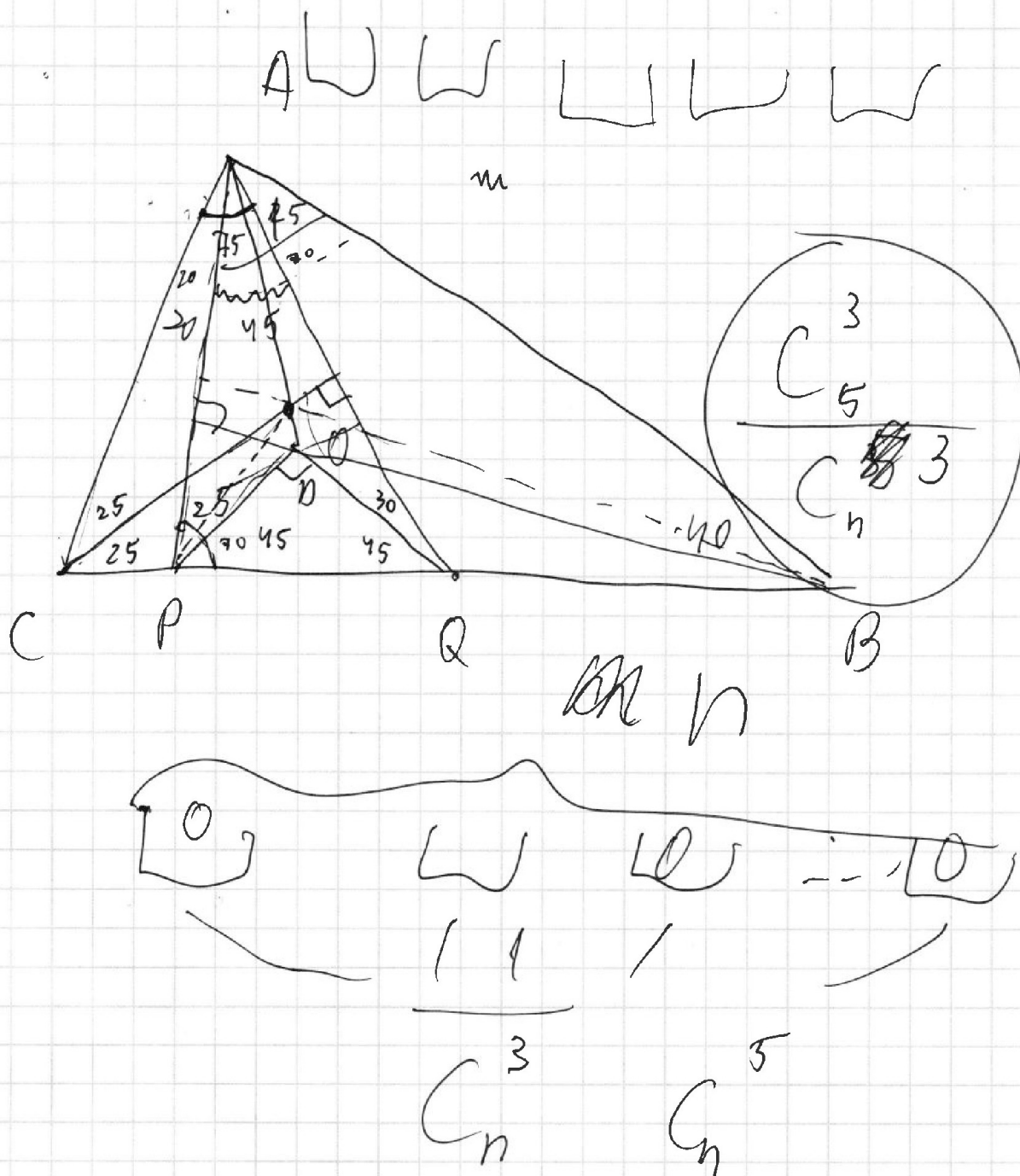


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

