



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть x коробок всего, тогда можно выиграть 1 первый
раз: $\frac{C_{x-3}^2}{C_x^5}$ ← Во второй раз: $\frac{C_{x-3}^5}{C_x^8}$
← Вероятность →

Тогда искомое значение: $\frac{C_{x-3}^5}{C_x^8} \cdot \frac{C_x^5}{C_{x-3}^2} =$

$$= \frac{\frac{(x-3)!}{5!(x-8)!}}{\frac{x!}{(x-8)!8!}} \cdot \frac{\frac{x!}{5!(x-3)!}}{\frac{(x-3)!}{(x-5)!2!}} = \frac{1}{5!} \cdot \frac{8!}{1} \cdot \frac{1}{5!} \cdot \frac{2!}{1} = \frac{28}{5} = 5,6$$

Ответ: в 5,6 раз



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если корни первого уравнения это b_4 и b_5
(b_1 - первый член прогрессии по условию), а корни второго
 b_2 и b_7 ~~то~~ $b_2 + b_7 = b_4 + b_5$ ($b_1 + d + b_1 + 6d = b_1 + 3d + b_1 + 4d$)
то $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$. По т. Виетта $\frac{a^3 - a^2}{2} = a^2 - a$

$$a^3 - 3a^2 + 2a = 0 \Rightarrow \begin{cases} (1) a = 0 \\ (2) a = 1 \\ (3) a = 2 \end{cases}$$

Только при таких a может
осуществиться задуманное

$$(1) a = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{2}{3} = 0 \text{ нет реш.}$$

$$(2) a = 1 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{3} = 0 \text{ нет реш.}$$

$$(3) a = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{2 + \sqrt{12}}{2} \quad x_2 = \frac{2 - \sqrt{12}}{2}$$

$$x^2 - 2x - 74 = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{2 + \sqrt{292}}{2} \quad x_4 = \frac{2 - \sqrt{292}}{2}$$

Ответ: $a = 2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{I } \left\{ y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0 \right. \quad \left. \left\{ y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \right\} + \left\{ y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \right\} \leq 6 \right.$$

① ②

$$\text{I } \begin{cases} ① \geq 0 \\ ② \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \\ y \geq 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \end{cases}$$

$y \leq 18$

$$\text{III } \begin{cases} ① < 0 \\ ② \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \\ y \geq 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \end{cases}$$

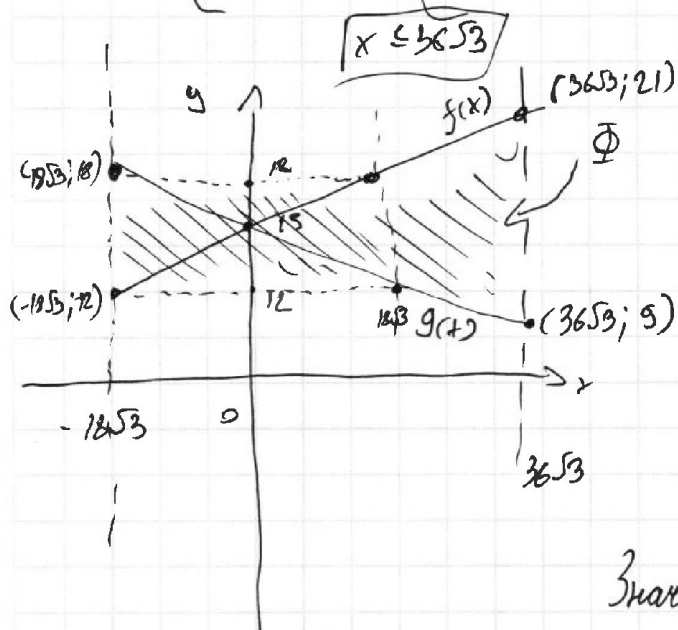
$x \geq -18\sqrt{3}$

$$\text{II } \begin{cases} ① \geq 0 \\ ② < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \\ y < 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \end{cases}$$

$x \leq 36\sqrt{3}$

$$\text{IV } \begin{cases} ① < 0 \\ ② < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \\ y < 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \end{cases}$$

$y \geq 12$



$$f(x) = 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}$$

$$g(x) = 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}$$

$$f(x)'$$

$$g(x)'$$

После замены: $f(x) \rightarrow -g(x) = -15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}$

$g(x) \rightarrow f(x) = 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}$

$$g(x)' \cap f(x) = (-90\sqrt{3}; \dots)$$

Значит Φ и Π не пересекаются.

Значит Φ замкнуто всю свою площадь

$$S_{\Phi} = (18-12) \cdot (36\sqrt{3}) + 18\sqrt{3} \cdot \frac{6+21-9}{2} = 540\sqrt{3}$$

Ответ: $540\sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

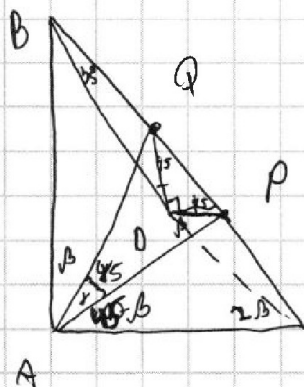
5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle QAP = \gamma \Rightarrow \angle AQP + \angle QPA = 180 - \gamma = \angle BAP + \angle QAC$$

$$(\text{т.е. у нас}) \angle BAP + \angle QAC - \gamma = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 180 - \gamma - \gamma = 90^\circ \Rightarrow \gamma = 45^\circ$$

$$\angle BAQ = \beta \Rightarrow \angle PAC = 45 - \beta \Rightarrow \angle AQD = 45 - \beta$$

$$\angle APD = 45 - \beta$$

$$\angle BDQ = 180 - 35 - 135 = 10$$

$$\angle ABD + \angle BAQ = \angle AQD + \angle BDQ \Rightarrow \beta + \angle ABD = 45 - \beta + 10 \Rightarrow$$

$$\angle ABD = 55 - 2\beta \Rightarrow \angle ACB = 2\beta. \text{ Заметим, что } \angle QAP = 45$$

$$= 2 \cdot \angle QDP \text{ и } D - \text{лежит на серединном перпен. к } QP$$

$$(\triangle QDP - \text{пр.}) \Rightarrow D - \text{центр опис. окр. для } \triangle AQP \Rightarrow$$

$$\triangle ADP \sim \triangle ADQ - \text{пр.} \Rightarrow \angle ADP = 180 - 2\beta \Rightarrow$$

$$ADPC - \text{впис.} \Rightarrow \angle DAP = 45 \Rightarrow AD - \text{бис. } \angle BAC.$$

$$\angle BDC = 10 + 90 + 45 - \beta. \Rightarrow \angle CDP = 45 - \beta \Rightarrow \angle DCP = \beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CD - \text{бис. } \angle PCA \Rightarrow P - \text{точка пересечения бис.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BP - \text{бис.} \Rightarrow \angle ABD = 35 = 55 - 2\beta \Rightarrow \beta = 10 \Rightarrow \angle BDC = 135^\circ$$

$$\angle DCB = \beta$$

$$\text{Ответ: } 10 = \angle DCB$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

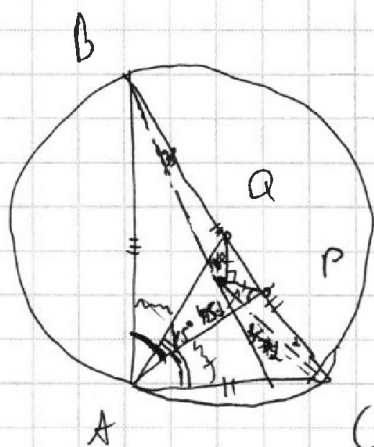
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$9^3 = 729 \quad 99^3 = 970299$$

$$\begin{array}{r} 99 \\ 99 \\ 99 \\ \hline 891 \\ 891 \\ \hline 88209 \\ 88209 \\ \hline 970299 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 99 \\ 99 \\ \hline 891 \\ 891 \\ \hline 88209 \\ 88209 \\ \hline 970299 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 999 \\ 999 \\ \hline 8991 \\ 8991 \\ \hline 88901 \\ 88901 \\ \hline 9880299 \end{array}$$



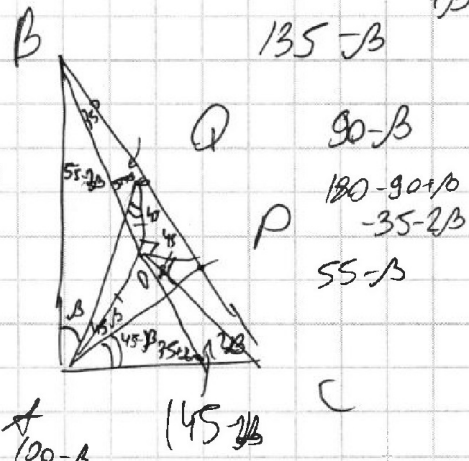
$$\begin{aligned} 180 - 100 - 135 + 2 &= -55 + 2 \\ 180 - 100 - 135 + 2 &= -55 + 2 \\ 2 - 55 &= -53 + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 45 - 2 &= 43 \\ 180 - 100 - 45 + 2 &= 35 + 2 \\ 180 - 2\alpha - 45 - \beta &= 135 - \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 + \beta &> 90 \\ 2 + \beta + 180 - \alpha - \beta &= 180 \\ 180 - \alpha - \beta &= 90 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 45 - \alpha + 10 &= 55 - 2 + \alpha \\ 180 - 35 - 55 + \beta &= 90 + \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \\ 180 - 80 - \beta &= 100 - \beta \end{aligned}$$



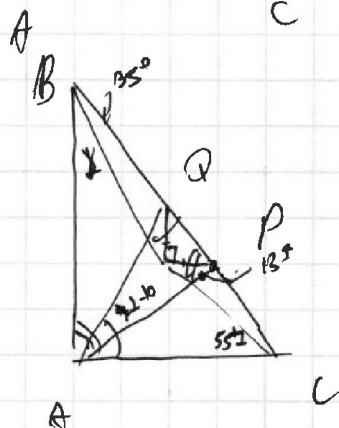
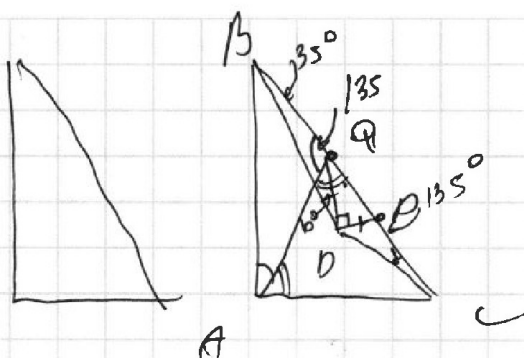
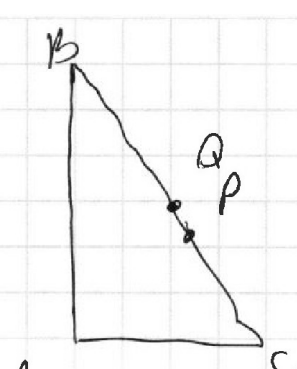


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{180 - 2 - 35}{2} = 90 - \frac{2 + 35}{2}$$

$$90 - 2 + 35$$

$$55 - 2$$

$$180 + 2 - 55$$

$$90 + \frac{55 - 2}{2}$$

$$180 + \frac{55 - 2 - 2 - 35}{2} = 180 + 10 - 22$$

$$22 = 10$$

$$90 - \frac{2 + 35}{2} + 90 + \frac{55 - 2}{2} - 22 + 10 = 90$$

$$90 + \frac{55 - 2 - 2 + 35}{2} - 22 + 10 = 0$$

$$90 + 2 + 10 - 2 + 10 = 0$$

$$22 = 10$$

$$2 = 55$$

$$\text{I } 2y - 30 \leq 0$$

$$y \leq 18$$

$$\begin{cases} y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0 \\ y - 55 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0 \end{cases}$$

$$y \geq 15$$

$$y \geq 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}$$

$$y \geq 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}$$

$$\text{II } y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} - y + 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} - 6 \leq 0$$

$$\frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 6 \Rightarrow x \leq 36\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0 \\ y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \\ y \leq 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

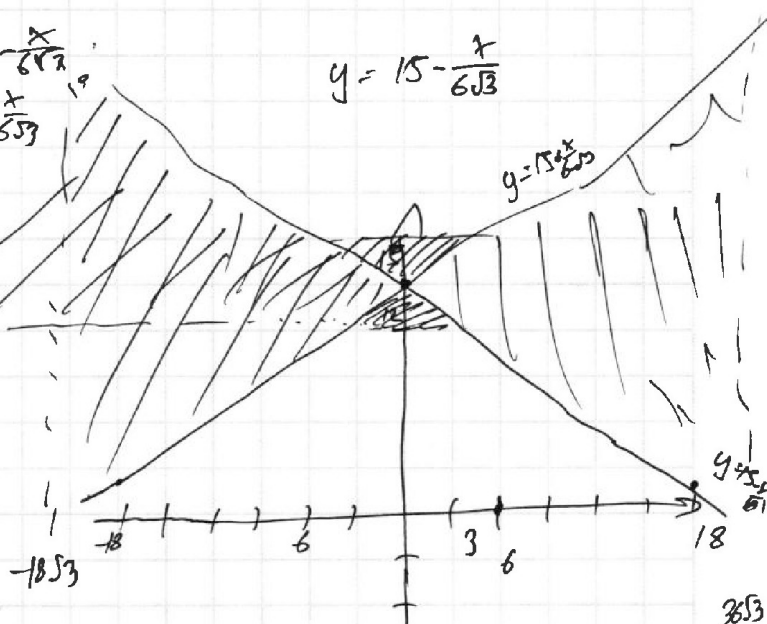
III $-y + 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} + y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} - 6 \leq 0 \Rightarrow y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \leq 0 \Rightarrow y \leq 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}$
 $\frac{x}{3\sqrt{3}} \geq -6 \Rightarrow x \geq -18\sqrt{3}$
 $y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \geq 0 \Rightarrow y \geq 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}$

IV $-2y \leq 24 - 24$
 $y \geq 12$

$\begin{cases} y \leq 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}} \\ y \geq 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}} \end{cases}$

$y = 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}$

$y = 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}$



$\frac{28 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3} \cdot \frac{26}{5}$

-18

$x \cdot \frac{1}{18}$

-15

$y = 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}$

$y = 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}$

$\frac{x}{3\sqrt{3}} = -30$

$x = -90\sqrt{3}$

$x = 15 \cdot 6\sqrt{3} = 90\sqrt{3}$

$y = 15 - \frac{36\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = 9$

$15 + 6 = 21$

$y = 15 + \frac{36\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = 21$

$-18\sqrt{3}$

$6 \cdot 36\sqrt{3} + 18\sqrt{3} \cdot 18$

$6^3\sqrt{3} + 18^2\sqrt{3} = 36\sqrt{3}(6 + 9) = 36\sqrt{3} \cdot 15 = 540\sqrt{3}$

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Попча ОК-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

X

$$x^2 - (a^2 + a)x + \frac{2 - a^3}{3} = 0$$

$$2x^2 - (a^3 + a^2)x + 2a^6 - 8a + 4 = 0$$

$$a_2 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_7$$

$$a_4 + a_5 = a_2 + a_7$$

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{2} \Rightarrow$$

$$a^3 - 2a^2 - a^2 + 2a = 0$$

$$a^3 - 3a^2 + 2a = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a^2 - 3a + 2 = 0 \end{cases} \quad a_1 = +2 \quad a_2 = +1$$

$$a = 0 \Rightarrow x^2 - x + \frac{2}{3} = 0$$

$$D = 1 - \frac{8}{3} < 0$$

$$a = 1 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{3} = 0$$

$$a = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$D = 4 - 8 = -4$$

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{12}}{2} \quad x_2 = \frac{2 - \sqrt{12}}{2}$$

$$x^2 - 2x - 64 - 8 - 2 = 0$$

$$x^2 - 2x - 74 = 0$$

$$D_1 = 4 + 280 + 16 = 300$$

$$x_3 = \frac{2 + 10\sqrt{3}}{2}$$

$$x_4 = \frac{2 - 10\sqrt{3}}{2}$$

$$0 \quad 0 \quad c \quad 0$$

$$\frac{C_{x-3}^2}{C_x^5} \Rightarrow \frac{C_{x-3}^5}{C_x^8}$$

$$\frac{C_{x-3}^5}{C_x^8} \cdot \frac{C_x^5}{C_{x-3}^2}$$

$$\frac{(x-3)!}{5!(x-8)!}$$

$$\frac{x!}{8!(x-8)!}$$

$$\frac{x!}{5!(x-5)!} \cdot \frac{(x-3)!}{(x-2)!}$$

$$1 + \sqrt{3} \quad 1 - \sqrt{3}$$

$$1 + 5\sqrt{3} \quad 1 - 5\sqrt{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy^2 = z^2(z+4) \\ yz^2 = x^2(x+4) \\ zx^2 = y^2(y+4) \end{cases}$$

$$x^2 y^2 z^2 = xyz(z+4)(x+4)(y+4)$$

$$xyz = (z+4)(x+4)(y+4)$$

$$(z+4)(y+4)(x+4) = z^2(z+4) \quad z^2 = (y+4)(x+4)$$

$$y^2 = (x+4)(z+4)$$

$$x^2 = (y+4)(z+4)$$

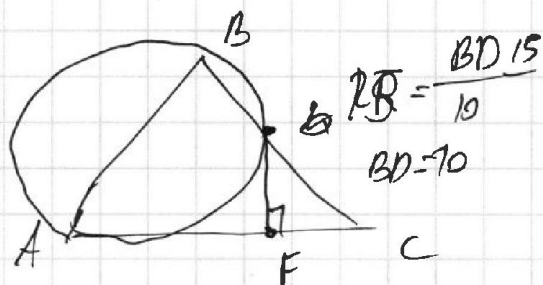
$$xy + yz + zx = 4$$

$$x^2 y^2 z^2 + x^2 z^2 = z^2(z+4)^2 + x^2(x+4)^2 + y^2(y+4)^2$$

$$z^2(y^2 - (z+4)^2) + x^2(z^2 - (x+4)^2) + y^2(x^2 - (y+4)^2) = 0$$

$$(y+4)(z+4 - y+4) = (y+4)(z-y)$$

$$z^2(z+4)(x-z) + x^2(x+4)(y-x) + y^2(y+4)(z-y) = 0$$



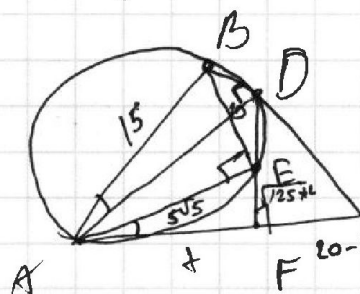
125

$$z^2 + x^2 = 9$$

$$x^2 = 5$$

$$x = \sqrt{5}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AF} = \frac{BE}{DF}$$



20

$$x^2 + EF^2 = 25 \cdot 5$$

$$EF = \sqrt{125 - x^2}$$

$$\frac{AD}{20} = \frac{x}{AD}$$

$$\begin{cases} AD^2 = 20x \\ 15 = \frac{AD}{x} \end{cases}$$

$$\frac{15}{5\sqrt{5}} =$$

$$\frac{15}{5\sqrt{5}} =$$