



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В телесигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1. k \times j = 4z + z^2$$

$$xjz = 4z^2 + z^3$$

$$\text{аналогично } xjz = 4x^2 + x^3 \mp 4y^2 + y^3$$

$$\text{полеем } f(t) = t^3 + 4t^2 - xjz$$

Тогда x, y, z - корни $f(t)$.

Тогда по Тл. Виета $x + y + z = -4$.

$$xj + yz + xz = 0.$$

(Тл. Виета. можно использовать Т.к $x = y = z$ не может быть, Т.к тогда $x^2 = 4x + x^3 \Rightarrow x = 0$.

значит ≥ 2 числа из x, y, z равны т.е $f(t)$ имеет ≥ 2 корня $\Rightarrow$ имеет 3 корня т.к степень $f(t)$ - кубическая.

$$(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2$$

$$(x^2 + y^2 + z^2) + 2(x+y+z) + 48$$

$$(x+y+z)^2 - 2(xj + yz + xz) + 2(x+y+z) + 48$$

$$(-4)^2 - 2 \cdot 0 - 8 \cdot 4 + 48 = 16 - 32 + 48 = 32.$$

Ответ: 32



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$126000 = K.$$

$$\text{Тогда } n = \underbrace{99 \dots 9}_{K} = 10^K - 1.$$

$$n^3 = (10^K - 1)^3 = 10^{3K} - 3 \cdot 10^{2K} + 3 \cdot 10^K - 1.$$

Вместе из $10^{3K} - 3 \cdot 10^{2K}$ — столько же.

$$\begin{array}{r} \underbrace{99 \dots 99}_{K} \underbrace{00 \dots 00}_{2K} \\ - \underbrace{30 \dots 00}_{2K} \\ \hline \underbrace{99 \dots 97}_{K-1} \underbrace{00 \dots 00}_{2K} = X \end{array}$$

Теперь прибавим $X + 3 \cdot 10^K$ в столбик.

$$\begin{array}{r} \underbrace{99 \dots 97}_{K-1} \underbrace{00 \dots 00}_{K} \underbrace{00 \dots 00}_{K} \\ + \underbrace{30 \dots 00}_{K} \\ \hline \underbrace{99 \dots 97}_{K-1} \underbrace{00 \dots 03}_{K-1} \underbrace{00 \dots 00}_{K} = Y \end{array}$$

и вместе из $Y - 1$ тоже в столбик.

$$\begin{array}{r} \underbrace{99 \dots 97}_{K-1} \underbrace{00 \dots 03}_{K-1} \underbrace{00 \dots 00}_{K} \\ - 1 \\ \hline \underbrace{99 \dots 97}_{K-1} \underbrace{00 \dots 02}_{K-1} \underbrace{00 \dots 00}_{K} \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

наше все вычислений видно, что.

В числе $(10^k - 1)^3$ ровно $k-1 + k$ девяток

$$2k-1 = 25000 \cdot 2-1 = 49999$$

ответ: 49999



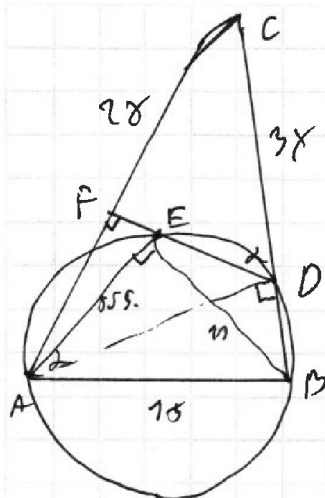
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\angle AEB = 2$ т.к. AEB - вписан, то $\angle EDB = 180^\circ$, а $\angle FDC = 2$ как смежных дуг.

т.к. AB - диаметр $\Rightarrow \angle AEB = 90^\circ$

$\triangle AEB \sim \triangle DFC$ по двум углам

и $\angle$, тогда $\frac{AB}{EB} = \frac{CD}{CF} \Rightarrow FC = 2x$, а

$CD = 3x$, тогда по т. Пифагора $\triangle CFB \rightarrow FB = \sqrt{9x^2 - 4x^2} = 5x$. т.к. AB - диаметр $\angle ADB = 90^\circ$ по т. Пифагора $\triangle CAB \rightarrow AD = \sqrt{AC^2 - CB^2} = \sqrt{20^2 - 9x^2}$

$AF = AC - FC = 20 - 2x$.

по т. Пифагора $\triangle AFD$. $AF^2 + FD^2 = AD^2$

$$(20 - 2x)^2 + (5x)^2 = \sqrt{20^2 - 9x^2}^2$$

$$20^2 - 40x + 4x^2 + 5x^2 = 20^2 - 9x^2 \Rightarrow 18x^2 - 40x = 0$$

$$18x = 40$$

$$x = \frac{40}{18} = \frac{20}{9}$$

$$AF = 20 - 2x = 20 - 2 \cdot \frac{20}{9}$$

$$\frac{180 - 80}{9} = \frac{100}{9}$$

ответ: $\frac{100}{9}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Шорча QR-кода недопустима!

Искомая прогрессия имеет вид $a_k = a_0 + kd$

$$a_2 = a_0 + 2d; a_4 = a_0 + 4d; a_5 = a_0 + 5d; a_8 = a_0 + 8d.$$

$$\text{Видно, что } a_2 + a_8 = a_4 + a_5 = 2a_0 + 9d.$$

Значит сумма корней 1-го и 2-го уравнения равна.

$$\text{Итак, введем. } a_2 + a_8 = \frac{a^3 - a^2}{2}; a_4 + a_5 = a^2 - a.$$

$$\frac{a^3 - a^2}{2} = a^2 - a \Leftrightarrow a^3 - 3a^2 + 2a = 0.$$

$$a(a^2 - 3a + 2) = 0$$

$$a(a-1)(a-2) = 0.$$

Значит $a = 1$ или $a = 2$ или $a = 0$.
1 случай $a = 0$. Наше уравнение: $x^2 + \frac{2}{3} = 0$

$$t.k > 0. \quad 2x^2 - 4 = 0$$

1-ое не имеет корней, значит случай не подходит.

2 случай $a \geq 1$ рассмотрим $x^2 + \frac{1}{3} = 0$

$$2x^2 - 14 = 0.$$

1-ое снова не имеет корней т.к. $a \geq 0$
значит случай - не подходит.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☒7
☐СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3 корни $a=2$

$$\text{или } 1-2 \quad x^2 - 2x - \frac{9}{2} = 0$$

$$2x^2 - 4x - 148 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 74 = 0.$$

~~$$\text{или корни } 1-20 \quad x^2 - 2x - \frac{4}{3} = 0$$~~

~~$$D = 4 + \frac{16}{3} = \frac{28}{3}$$~~

~~$$x_1 = 2 + \frac{2\sqrt{7}}{3} = 1 + \sqrt{\frac{7}{3}}, \quad x_2 = 1 - \sqrt{\frac{7}{3}}$$~~

~~$$\text{или корни } 2-20 \quad x^2 - 2x - 74 = 0$$~~

~~$$D = 4 + 74 \cdot 4 = 4 \cdot 25 = 4 \cdot 25 \cdot 4 = 400$$~~

~~$$x_3 = \frac{2 + 10\sqrt{4}}{2}$$~~

$$\text{или корни } 1-20 \quad x^2 - 2x - 24 = 0, D = 12 = (2\sqrt{3})^2$$

$$x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

$$x_2 = 1 - \sqrt{3}$$

$$\text{или корни } 2-20 \quad x^2 - 2x - 24 = 0, D = 4 + 74 \cdot 4 = 4 \cdot 25 = 100 \cdot 4$$

$$x_3 = \frac{2 + 10\sqrt{4}}{2} = 1 + 5\sqrt{3} \quad (10\sqrt{3})^2$$

$$x_4 = 1 - 5\sqrt{3}$$

Тогда для прогрессии $a_k = 1 - 5\sqrt{3} + k \cdot 2\sqrt{3}$.

$$a_2 = 1 - 5\sqrt{3}; a_4 = 1 - \sqrt{3}; a_5 = 1 + \sqrt{3}; a_6 = 1 + 5\sqrt{3}$$

Ответ:
 $a=2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

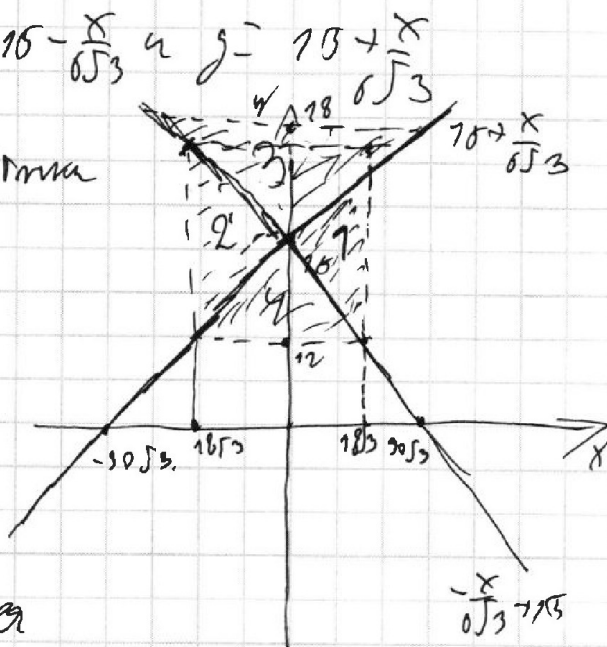
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1. из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Введем также $y = 15 - \frac{x}{\sqrt{3}}$ и $y = 15 + \frac{x}{\sqrt{3}}$

т.е. симметричные отн. оси $(0; 15)$.



р-м 4 случая.

$$① y - 15 + \frac{x}{\sqrt{3}} \geq 0$$

$$y - 15 - \frac{x}{\sqrt{3}} \leq 0$$

Все точки точки находятся

выше $-\frac{x}{\sqrt{3}} + 15$ и ниже $\frac{x}{\sqrt{3}} + 15$.

$$\text{также пер-во примет вид } y - 15 + \frac{x}{\sqrt{3}} - y + 15 + \frac{x}{\sqrt{3}} \leq 0$$

$$\underline{x \leq 18\sqrt{3}}$$

$$\text{Также } -\frac{x}{\sqrt{3}} \leq y - 15 \leq \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \underline{x \geq 0}$$

т.е. $0 \leq x \leq 18\sqrt{3}$ и между этими значениями все точки отмечены на графике график 1.

$$② y - 15 + \frac{x}{\sqrt{3}} \leq 0$$

$$y - 15 - \frac{x}{\sqrt{3}} \geq 0$$

Все точки точки будут

симметричны относительно

случая 1. Т.к. также симметричны отн. (0; 15).

Все точки точки - график 2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3. $y - 13 + \frac{x}{\sqrt{3}} \geq 0$ все точки точки лежат
 $y - 15 - \frac{x}{\sqrt{3}} \geq 0$ выше обеих прямых.

пер-ва имеет вид $y - 30 \leq 0 \Rightarrow y \leq 18$.

Все точки точки лежат ниже 3 на графике.

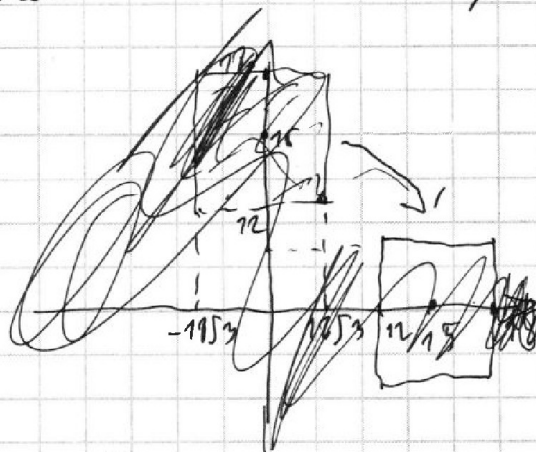
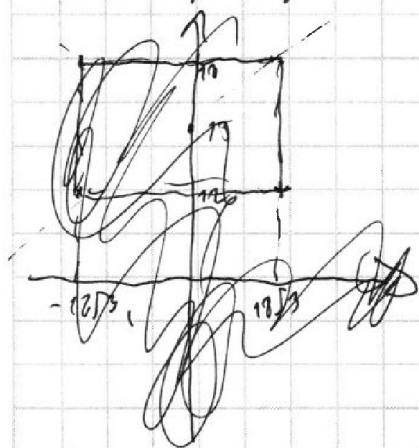
4. $y - 15 + \frac{x}{\sqrt{3}} \leq 0$ Точки симметричны
 $y - 15 - \frac{x}{\sqrt{3}} \leq 0$ относительно 3. $\Delta(0; 15)$.

на графике - фигура 4. ~~прямоугольник~~

Получившаяся фигура - ~~прямоугольник~~ Т.к

Точки $(\pm 18\sqrt{3}; 15 \pm 3)$ лежат на прямой

центр ~~неверно~~ $(0; 15)$
~~прямоугольник~~



Точки лежат на
прямоугольнике.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Комментарий~~

Комментарий

Комментарий

Комментарий



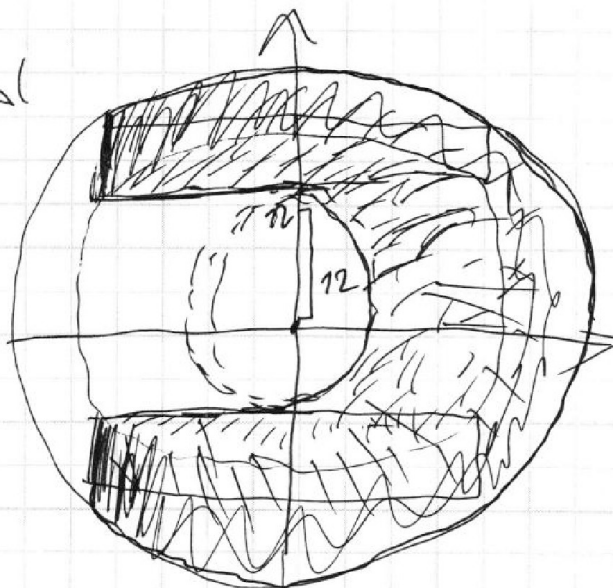
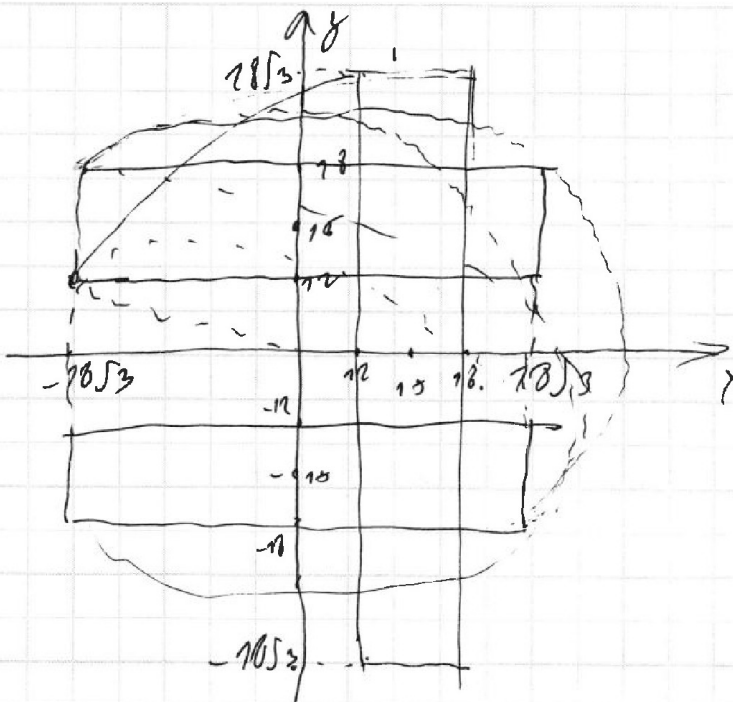
Комментарий

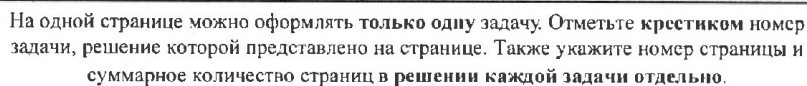
Комментарий

Комментарий

Комментарий

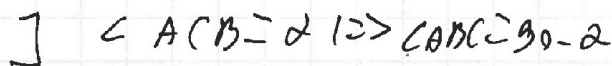
Комментарий





СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!


$$T.K \text{ AC} = \text{EQ}, T.D \text{ AC} = \text{EQ}$$

palnades n

$$\angle AQC = \frac{180 - 2}{2} = 90 - \frac{2}{2}$$

$$\text{okrajnino } \angle APB = \frac{180 - (90 - 2)}{2} =$$

$$= 45 + \frac{2}{2} \cdot \triangle AQP \angle QAP = 170^\circ (\angle AQP + \angle APQ) =$$

$$= 180 - \left(90 - \frac{2}{2} \times 45 \times \frac{2}{2} \right) = 45. \text{ В } \triangle AQP - \text{треугольник}$$

Тоже, $\sim$ то $QD = DP$ и $\angle QDP = 2\angle QAP$, ~~и~~

~~Секрет Военно-воздушных сил СССР~~

Точки Точки где - центр опис. окр. и точка
соединяющая центры опис. окр. отн. Q, P , по

$\angle K \subset \angle AP \subset 90^\circ$ и д. ~~Выводим из этого~~ вывод

направление с 7.А мм-рр, то D-генератор

Ork. $\triangle AQP \Rightarrow AD = DP = PQ, \angle ADP = 2\angle AQP =$

$$= 2(90 - \frac{\alpha}{2}) = 180 - \alpha \quad \therefore \angle A + \angle B = 180^\circ \quad \therefore$$

$ACP \vdash \text{смислов. и} \vdash DCP \vdash \vdash DAP, \text{ как следствие.}$

на дугу DB . Аналогично $\angle DBQ = \angle DAQ = 35^\circ$ (условие).

$$\text{Trigon } \angle DAP = 45^\circ - \angle PAD = 45^\circ - 35^\circ = 10^\circ \Rightarrow \angle PCB = 10^\circ$$

$\angle ABE = 10^\circ$

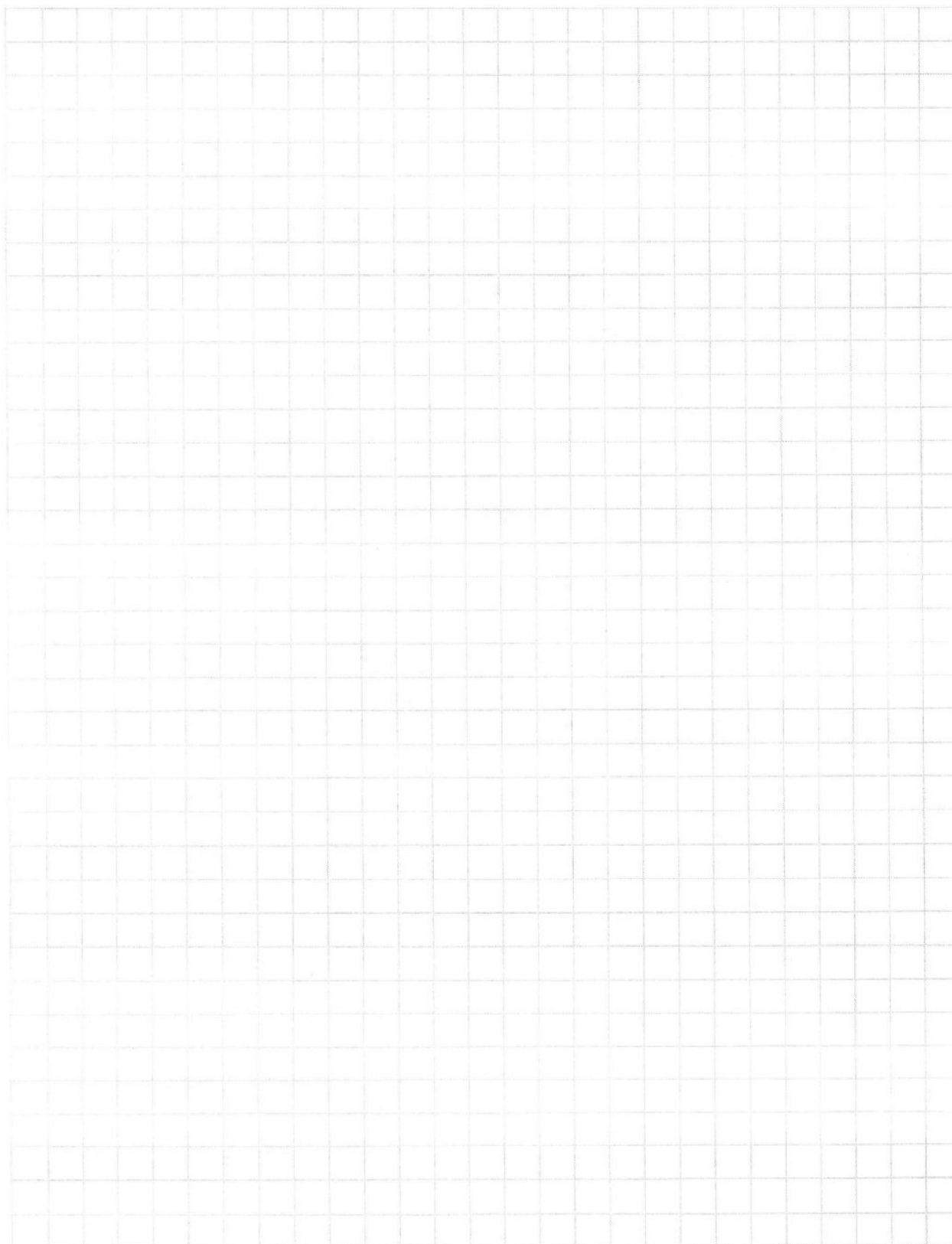


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

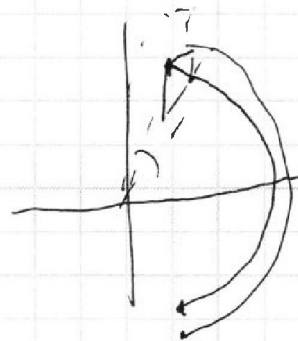
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|y - 15 + \frac{x}{\sqrt{3}}| - |y - 15 - \frac{x}{\sqrt{3}}| \leq 6$$

$$|a| + |b| \geq 6$$

$$a^2 + b^2 + 2|ab| \leq 6.$$

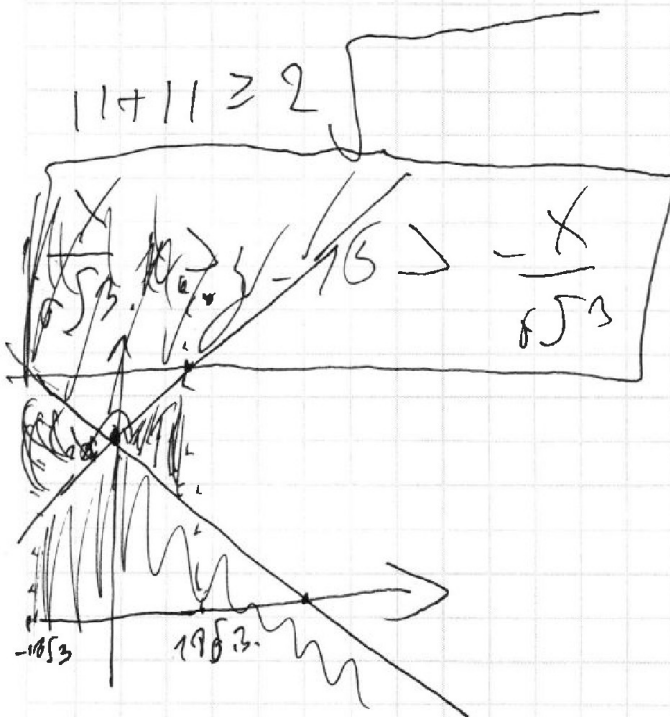
$$(y - 15)^2 - \frac{x^2}{198}$$



$$y - 15 \geq 10 - \frac{x}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}} + 15 \geq y \geq 10 - \frac{x}{\sqrt{3}}$$

$$|1| + |1| \geq 2$$



$$y - 15 + 0 \rightarrow y + 15 + 0 \leq 6$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}} \leq 6$$

$$x \leq 19\sqrt{3}.$$

$$15 - 0. \text{ } \text{ } = 15 - \frac{x}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}} \geq 15.$$

$$y \geq \frac{x}{\sqrt{3}} + 15$$

$$y \geq 15 - \frac{x}{\sqrt{3}}$$

$$y - 15 - 0 \rightarrow y - 15 - 0 \leq 6$$

$$-\frac{x}{\sqrt{3}} \leq 6. \quad x \leq 19\sqrt{3}$$

$$x \geq -19\sqrt{3}.$$

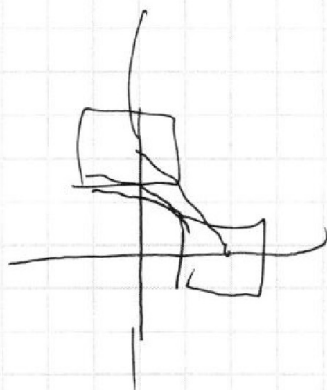
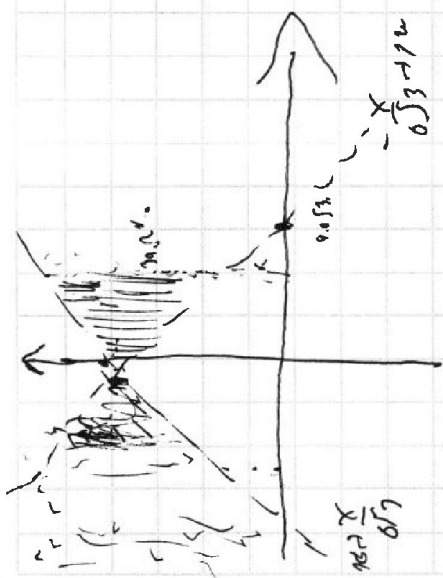


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$y = 10 - \frac{x}{5}$$
$$y \geq 10 - \frac{x}{5}$$

$$y = 10 - \frac{x}{5} + 15 + 10 \leq 6$$

$$x \leq 6$$

$$x \leq 18\sqrt{3}$$

$$10 - \frac{x}{5} - x \leq -18\sqrt{3}$$

$$\frac{6x}{5} \leq 6$$

$$-x \leq 18\sqrt{3}$$

$$x \geq -18\sqrt{3}$$

$$y = 10 - \frac{x}{5}$$

$$y = 30 \leq 6$$

$$y \leq 4$$
$$y \leq 18$$

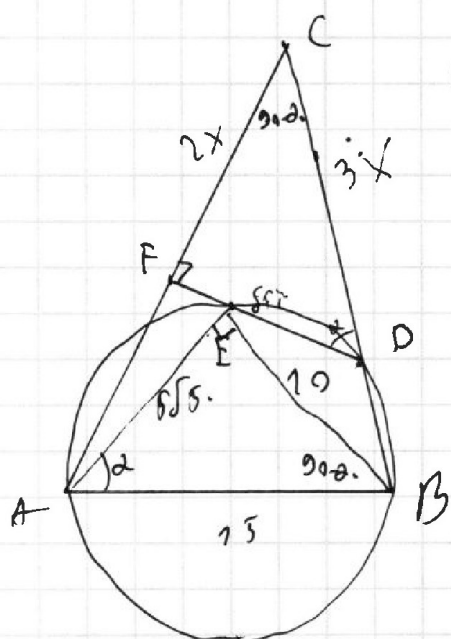


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AC = 20$$

$$AB = 15$$

$$BE = 10, 10^2 - 15^2$$

$$20^2 - 9x^2 = 15^2 - DB^2$$

11.

$$0.35 = 9x^2 - DB^2$$

$$DB = \sqrt{9x^2 - 29.7}$$

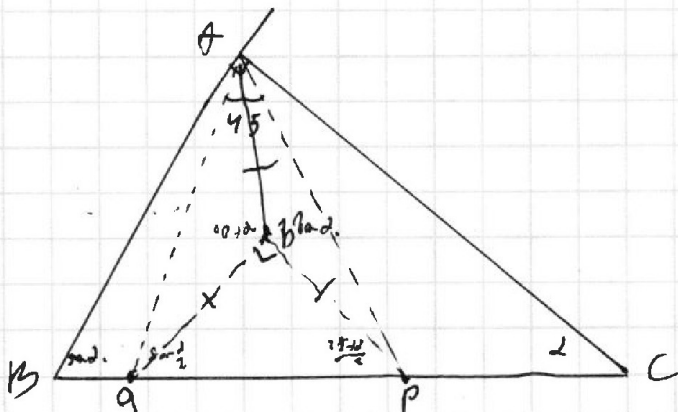
$$AD^2 = 15^2 - 9x^2 + 20 \cdot x$$

$$29$$

$$16 \quad AD = \sqrt{490 - 9x^2}$$

$$490 - 9x^2 - 80x + 5x^2 = 490 - 9x^2$$

$$4x^2 \leq 80x$$



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!