



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| + \left|x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}\right| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

/ ИЗ /

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Перемножим три рав. ва:

$$x^2y^2z^2 = (-z(z-x)) \cdot (-y(2-y)) \cdot (-x(2-x)) = -xyz(z-x)(2-y)(2-z)$$

$$xyz = -8 + 4x + 4y + 4z - 2xy - 2xz - 2yz + xyz \quad (\text{сократили на } xyz \text{ и раскрывли скобки, так можно, ведь } x, y, z \neq 0)$$

$$2(xy + xz + yz) = 4(x + y + z) - 8$$

теперь сокр. на 2 и подставим вместо $xy + xz + yz$ сумму уравнений

$$-2z - 2x - 2y + z^2 + x^2 + y^2 = 2x + 2y + 2z - 4 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = -4$$

$$\text{нам надо найти } (x-z)^2 + (y-z)^2 + (z-z)^2 = x^2 + y^2 + z - 4x - 4y - 4z + 12 = -4 + 12 = 8 \quad (\text{подставим } x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z \text{ из уравн. выше})$$

Отв: 8



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
./ ИЗ ./

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = 10^{30001} - 1$$

$$n^3 = (10^{30001} - 1)^3 = 10^{90003} - 3 \cdot 10^{60002} + 3 \cdot 10^{30001} - 1$$

Заметим, что $10^{90003} - 1$ — это 90003 девятки.

Если вычесть оттуда $3 \cdot 10^{60002}$, на 60003-й позиции справа будет не 9, а 6. а если прибавить к этому $3 \cdot 10^{30001}$, т.е. тройку к 30001-ому разряду справа (суммируем с 1), то ~~во всех разрядах до 60003-его~~ будет в этом разряде будет 2 ($9+3 \bmod 10$), а во всех начиная с этого до 60002 — 0 ($9+1 \bmod 10$, перенос единицы далее), в 60003-ем будет 4 ($6+1 \bmod 10$)

Тогда выходит, что у этого числа с 1ой до 30001ой позиции только девятки, а также с 60004ой до 90003ей.

$$\text{Их всего } (90003 - 60004 + 1) + (30001 - 1 + 1) = 60001$$

Отв: 60001



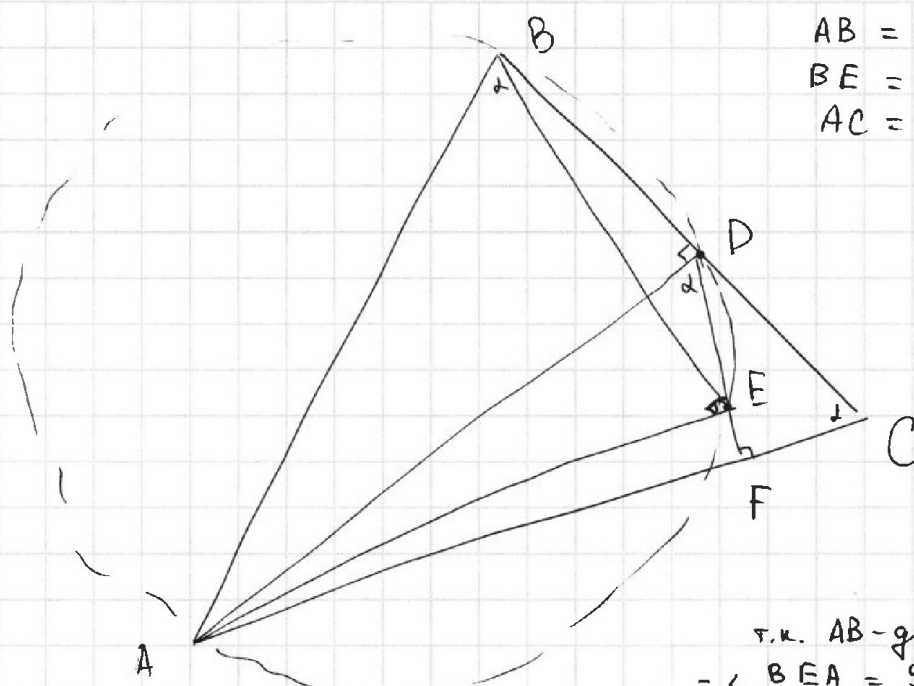
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = 8$$

$$BE = 6$$

$$AC = 10$$

т.к. AB -diam., то $\angle BDA = \angle BEA = 90^\circ$

по т. Пифагора $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

если $\angle ADE = \alpha$, то $\angle EDC = 90^\circ - \alpha$, $\angle FCD = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$ и $\angle ABE = \alpha$ т.к. это впис. четырехуг.

тогда по 3 углам подобны: $\triangle ABE \sim \triangle ADF \sim \triangle FDC \sim \triangle ADC$

тогда верны соотношения:

для $\triangle ADC$ и $\triangle ABE$ $\frac{AD}{AE} = \frac{CD}{BE} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AD = \frac{AE \cdot AC}{AB} = \frac{2\sqrt{7} \cdot 10}{8}$

для $\triangle ABE$ и $\triangle ADF$ $\frac{AF}{AE} = \frac{DA}{AB} \Rightarrow AF = \frac{AD \cdot AE}{AB} = \frac{\frac{2\sqrt{7} \cdot 10}{8} \cdot 2\sqrt{7}}{8} =$

$$= \frac{2 \cdot 10 \cdot 7}{8 \cdot 8} = \frac{35}{8}$$

$$\text{Отв: } AF = \frac{35}{8}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

в первом случае вероятность $p_1 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$, где n - кол-во коробок, т.е. есть C_n^5 способов выбрать 5 коробок, из них C_{n-3}^2 способов выбрать именно 3, где нет шариков и еще 2 любые из оставшихся

во 2 случае аналогичными рассуждениями получаем вер-ть

$$p_2 = \frac{C_{n-3}^4}{C_n^7}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{C_{n-3}^4 \cdot C_n^5}{C_n^7 \cdot C_{n-3}^2} = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{4!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!} \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)} \cdot \frac{(n-3)(n-4)}{2!} =$$

$$= \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{4!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!} \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)} \cdot \frac{(n-3)(n-4)}{2!} = \frac{2 \cdot 7!}{4! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{7}{2} = 3,5$$

Отв: 3,5



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1 первый член прогрессии a_0 , разность d .

Тогда если x_1 и x_2 — корни 1 уравн., а x_3 и x_4 — второго, то

по т. Виета:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a^2 - 2a \\ x_1 x_2 = a^2 - a - 7 \\ x_3 + x_4 = (a^3 - 2a^2)^{\frac{1}{3}} \\ x_3 x_4 = (6 - a^5)^{\frac{1}{3}} \end{cases} \quad \text{и т.к. } x_1, x_2, x_3, x_4 - \text{ члены прогр.:}$$

$$\begin{cases} x_1 = a_0 + 5d \\ x_2 = a_0 + 6d \\ x_3 = a_0 + 3d \\ x_4 = a_0 + 8d \end{cases}$$

$$a_0 + 5d + a_0 + 6d = 2a_0 + 11d = a^2 - 2a$$

$$a_0 + 3d + a_0 + 8d = 2a_0 + 11d = (a^3 - 2a^2)^{\frac{1}{3}}$$

вычитаем: $a^2 - 2a - \frac{1}{3}a^3 + \frac{2}{3}a^2 = 0$

$$a(a^2 - 5a + 6) = 0$$

$$a(a-3)(a-2) = 0 \Rightarrow a = 0 \vee a = 3 \vee a = 2$$

$$(a_0 + 5d)(a_0 + 6d) = a_0^2 + 11a_0d + 30d^2 = a^2 - a - 4$$

$$(a_0 + 3d)(a_0 + 8d) = a_0^2 + 11a_0d + 24d^2 = \frac{1}{3}(a^3 - a^5)$$

вычитаем. $6d^2 = a^2 - a - 4 - 2 + \frac{1}{3}a^5 = \frac{a^5}{3} + a^2 - a - 9$

$$d^2 = \frac{1}{6} \left(\frac{a^5}{3} + a^2 - a - 9 \right)$$

Теперь по очереди проверим варианты значений $a = 0, 2, 3$

1) $d^2 = \frac{1}{6} \left(\frac{0}{3} + 0 - 0 - 9 \right) = -\frac{9}{6}$, такое невозможно

2) $d^2 = \frac{1}{6} \left(\frac{32}{3} + 4 - 2 - 9 \right) = \frac{11}{18}$, $d = \pm \sqrt{\frac{11}{18}}$

$$a_0 = \frac{a^2 - 2a - 11d}{2} = \frac{4 - 4 \pm 11\sqrt{\frac{11}{18}}}{2}$$

проверим, что $a_0^2 + 11a_0d + 30d^2 = a^2 - a - 4$

$$\frac{11^2}{18 \cdot 4} \pm 11 \cdot \frac{11}{18} \cdot \frac{11\sqrt{\frac{11}{18}}}{2} + 30 \cdot \frac{11}{18} = 4 - 2 - 4$$

левая часть $\neq$ правая, если домножить на 18·4, то левая часть уравнения

все: 11, а правая нет, но обе части целые, такое быть не может

3) $d^2 = \frac{1}{6} \left(\frac{243}{3} - 9 - 3 - 9 \right) = 10$, $d = \pm \sqrt{10}$

$$a_0 = \frac{a^2 - 2a - 11d}{2} = \frac{9 - 6 \pm 11\sqrt{10}}{2} = \frac{3 \pm 11\sqrt{10}}{2}$$

проверим, что $a_0^2 + 11a_0d + 30d^2 = a^2 - a - 4$

$$\left(\frac{3 \pm 11\sqrt{10}}{2} \right)^2 + 11 \cdot \frac{3 \pm 11\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{3 \pm 11\sqrt{10}}{2} + 30 \cdot 10 = 9 - 3 - 4$$

$$\frac{9 + 1210 - 66\sqrt{10} + 11 \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{3 - 11\sqrt{10}}{2} + 30 \cdot 10}{4} = 9 - 3 - 4$$

$$9 + 1210 - 66\sqrt{10} + 66\sqrt{10} - 2420 + 1200 = -4$$

$$13 + 1210 - 2420 + 1200 \neq -4$$
, $0 \neq -4 \Rightarrow$ такое быть не может

если $d = -\sqrt{10}$, $a_0 = \frac{3 + 11\sqrt{10}}{2}$

$$\frac{9 + 1210 + 66\sqrt{10}}{4} - 11\sqrt{10} \cdot \frac{3 + 11\sqrt{10}}{2} + 30 \cdot 10 = -1$$

Получается то же самое. Значит вариантов больше не осталось, ни один не подошел. Отв: $\emptyset$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Разобьем плоскость на 4 части (где 1 модуль раскрывается со знаком +, а второй с - и др. комбинации)

$$1) \begin{cases} x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \geq 0 \\ x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \geq 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \geq 0 \\ x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \leq 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \leq 0 \\ x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \geq 0 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \leq 0 \\ x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \leq 0 \end{cases}$$

(*)

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{192}} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{8\sqrt{3}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{192} \cdot 2} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Получается, что эти части будут делиться прямыми

(1) $y = (10 - x) 2\sqrt{3}$ и (2) $y = (x - 10) 2\sqrt{3}$

Раскроем скобки и для каждого из 4 случаев.

1) $x \leq 12$, если точка выше (1) и ниже (2)

2) $y \leq 4\sqrt{3}$, если точка выше (1) и (2)

3) $y \geq -4\sqrt{3}$, если точка ниже (1) и (2)

4) $x \geq 8$, если точка выше (2) и ниже (1)

Построим прямые (1) и (2)

через точки

(1): $(10; 0)$ и $(10 + \sqrt{3}; -6)$

(2): $(10; 0)$ и $(10 + \sqrt{3}; 6)$

А далее построим

для каждого случая

график в соотв. области

т.к. точки $(12; 4\sqrt{3})$, $(12; -4\sqrt{3})$,

$(8; 4\sqrt{3})$ и $(8; -4\sqrt{3})$ принадл.

прямым, это получается

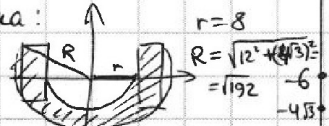
прямоугольник, с вершинами

в этих точках.

Когда мы его повернем,

получится такая

картинка:

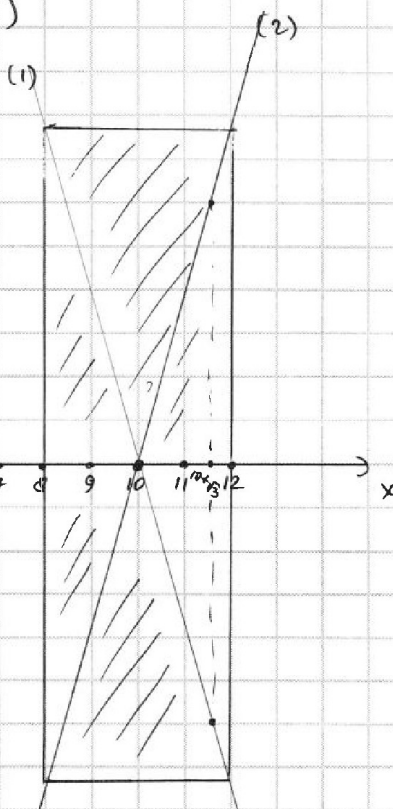


Ответ:

Это площадь большего полукруга -

площадь меньшего + площадь прямоугол. + площадь сектора

$$S_{\text{круга}} = -\pi r^2 + \pi R^2 + (4\sqrt{3} + (-4\sqrt{3})) \cdot (12 - 8) + \varphi R^2 = 192\pi - 64\pi + 4 \cdot 8\sqrt{3} + 192(\pi - 2\alpha \arccos \frac{4}{\sqrt{3}}) (*) = 192\pi - 64\pi + 32\sqrt{3} + 192(\pi -$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left| x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} \right| + \left| x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} \right| \leq 4$$

$$1. x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} > 0$$
$$2x - 20 \leq 4$$

$$\text{и } x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} > 0$$
$$x \leq 12$$

$$y > (10 - x)2\sqrt{3} \quad y < (x - 10)2\sqrt{3}$$

$$2. x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} > 0$$
$$\frac{y}{\sqrt{3}} \leq 4$$

$$\text{и } x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} < 0$$
$$y \leq 4\sqrt{3}$$

$$y > (10 - x)2\sqrt{3} \quad y > (x - 10)2\sqrt{3}$$

$$3. x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} < 0$$
$$-\frac{y}{\sqrt{3}} \leq 4$$

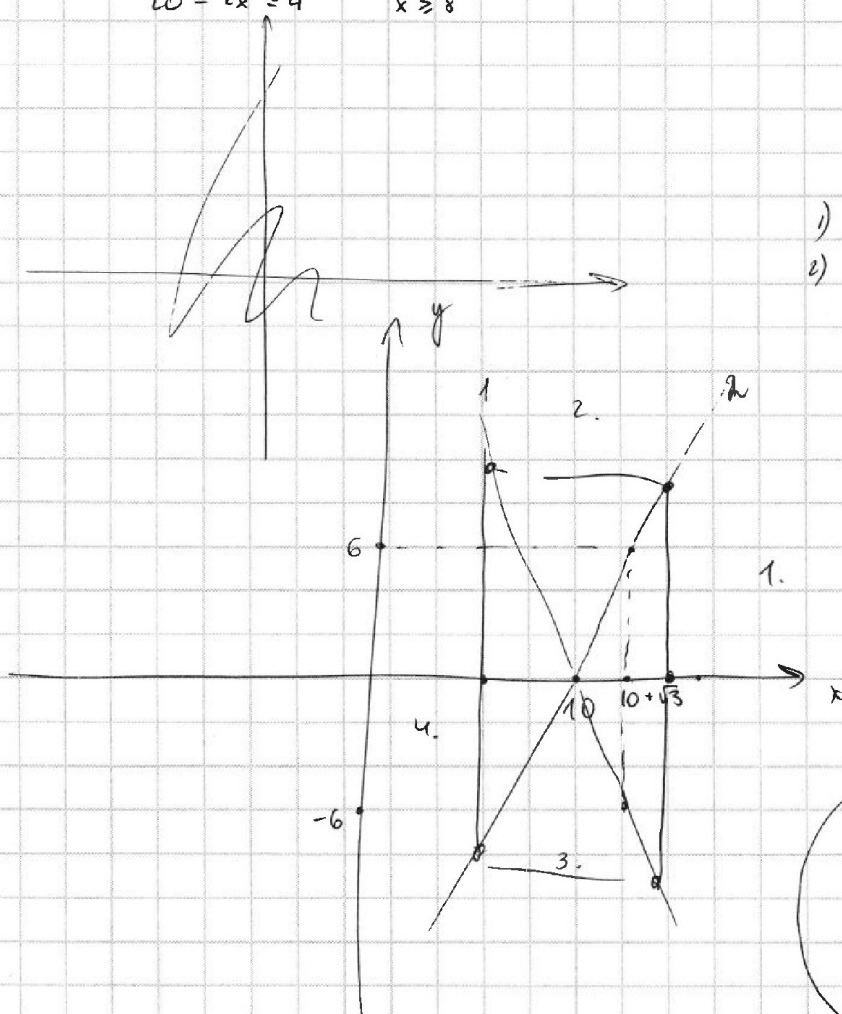
$$\text{и } x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} > 0$$
$$y \geq -4\sqrt{3}$$

$$< \quad <$$

$$4. x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}} < 0$$
$$20 - 2x \leq 4$$

$$\text{и } x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}} < 0$$
$$x \geq 8$$

$$< \quad >$$

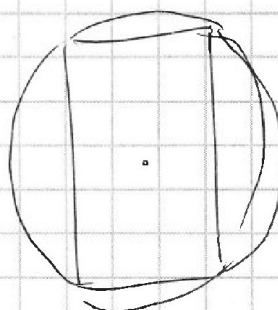


$$1) y = (10 - x)2\sqrt{3}$$

$$2) y = (x - 10)2\sqrt{3}$$

$$x = 10 + \sqrt{3}$$

166111



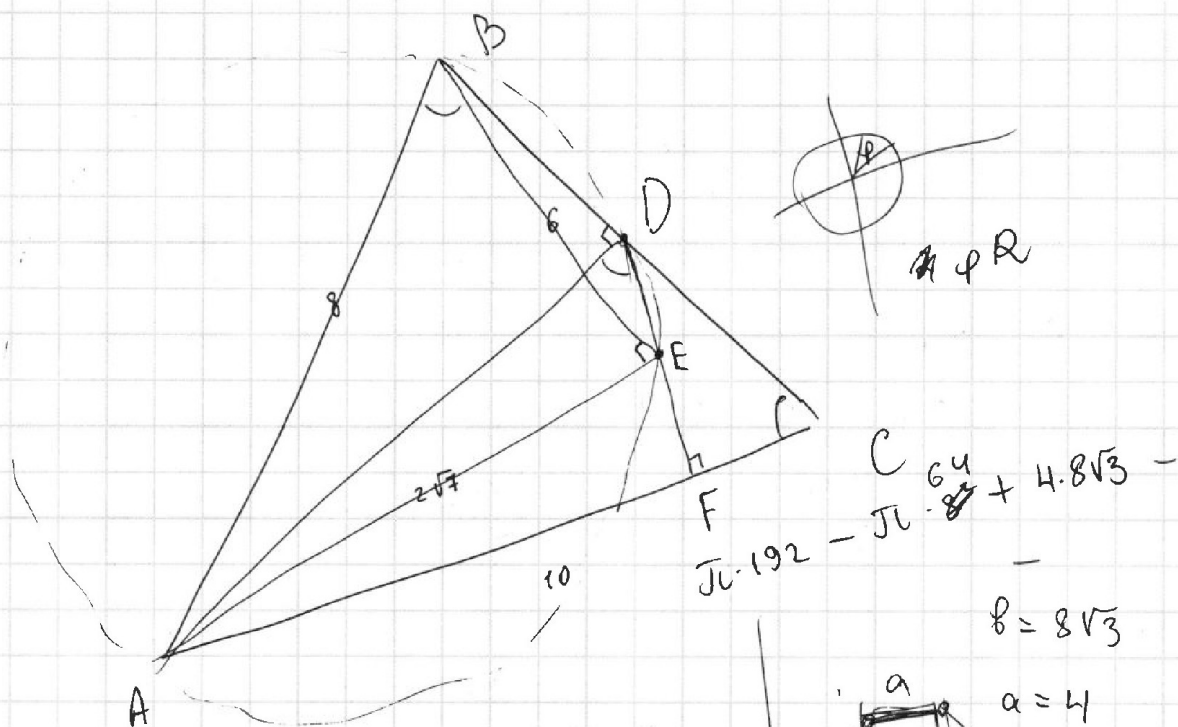


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AB \cdot DE + BD \cdot AE = BE \cdot AD$$

$$8 \cdot DE + 2\sqrt{7} \cdot BD = 6 \cdot AD$$

$$AF^2 = 28 - EF^2$$

$$(DE + EF)^2 = CD^2 - FC^2$$

$$(AF + CF)^2 - CD^2 = AD^2$$

$$AB^2 - BD^2 = AD^2$$

$$AF^2 + (EF + DE)^2 = AD^2 \Rightarrow AF^2 + CD^2 - FC^2 = AD^2 = AF^2 + CF^2 + 2AF \cdot CF - CD^2$$

$$\frac{AB}{AF} = \frac{CD}{DE + EF}$$

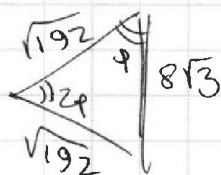
$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE} = \frac{8}{2\sqrt{7}} = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

$$AD = \frac{10\sqrt{7}}{4} = \frac{5\sqrt{7}}{2}$$

$$\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BE} \Rightarrow CD = \frac{10 \cdot 6}{8} = \frac{15}{2}$$

$$\frac{AD}{AF} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow$$

$$AF = \frac{AE \cdot AD}{AB} = \frac{2\sqrt{7} \cdot 5\sqrt{7}}{4 \cdot 8} = \frac{35}{8}$$



$$\begin{array}{r} 192 \\ 18 \overline{) 192} \\ \underline{18} \\ 12 \end{array}$$

$$3\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}$$

$$\frac{\sin \varphi}{\sqrt{192}} = \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{8\sqrt{3}}$$

$$\cos \varphi = \frac{8\sqrt{3}}{2\sqrt{192}} = \frac{4}{3\sqrt{7}}$$

$$C \quad 64 + 4 \cdot 8\sqrt{3} -$$

$$16 \cdot 192 - 16 \cdot 8 + 4 \cdot 8\sqrt{3} -$$

$$8 = 8\sqrt{3}$$

$$\alpha = 4$$

$$\sqrt{12^2 + 48^2} = \sqrt{144 + 48^2} = \sqrt{192}$$

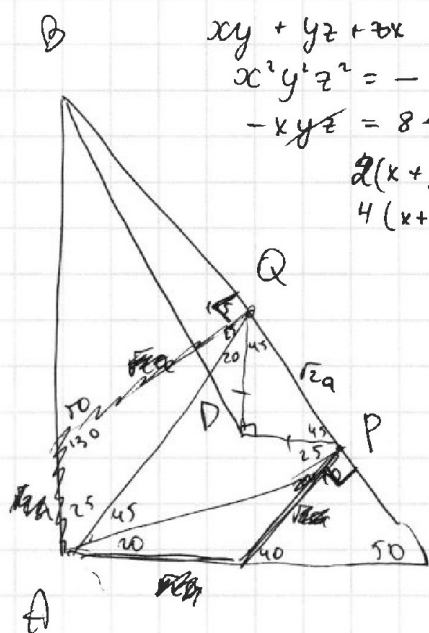


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



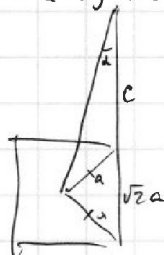
$$xy + yz + zx$$

$$x^2 y^2 z^2 = -xyz(2-x)(2-y)(2-z)$$

$$-xyz = 8 - 4x - 4y - 4z + 2xz + 2yz + 2xy - xyz$$

$$2(x+y+z) = 4 + xz + yz + xy = 4 - 2x - 2y - 2z +$$

$$4(x+y+z) - 4 = x^2 + y^2 + z^2 + x^2 + y^2 + z^2$$



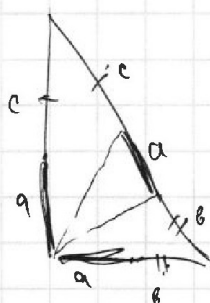
$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z + 4 + 4 + 4 = -4 + 4 + 4 + 4 = 8$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{2}a + c}{\sin(\alpha + 45^\circ)} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}a + c)}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{2a + \sqrt{2}c}{\sin \alpha + \cos \alpha}$$

$$a = \frac{2a + \sqrt{2}c}{1 + \operatorname{ctg} \alpha}$$

$$a + a \operatorname{ctg} \alpha = 2a + \sqrt{2}c$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{2a + \sqrt{2}c - a}{a} = \frac{a + \sqrt{2}c}{a} = 1 + \frac{\sqrt{2}c}{a}$$



$$(a+b)^2 + (a+c)^2 = (a+b+c)^2$$

$$a^2 + b^2 + 2ab + a^2 + c^2 + 2ac = a^2 + b^2 + c^2 + 2ac + 2ab + 2bc$$

$$a^2 = 2bc$$

$$\sin 50^\circ = \frac{a+c}{a+b+c} = \frac{a + \frac{a^2}{2b}}{a + b + \frac{a^2}{2b}} = \frac{2ab + a^2}{2ab + 2b^2 + a^2}$$

$$\operatorname{ctg} 50^\circ = \frac{a+b}{a+c} = \frac{a + \frac{a^2}{2c}}{a + c} = \frac{2ac + a^2}{2ac + 2c^2} = \frac{a}{c} \cdot \frac{2c + a}{2a + 2c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{2c + a}{2(a+c)} = \frac{a}{c} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{a+c}\right)$$

$$\frac{\operatorname{ctg} \alpha - 1}{\sqrt{2}} = \frac{1 - \frac{a}{2(a+c)}}{\operatorname{ctg} 50^\circ}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{2} \operatorname{ctg} 50^\circ \cdot \left(1 - \frac{a}{2a+2c}\right) + 1$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha - 1}{\sqrt{2}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 99 \\ \times 99 \\ \hline 891 \\ 891 \\ \hline 9801 \end{array}$$

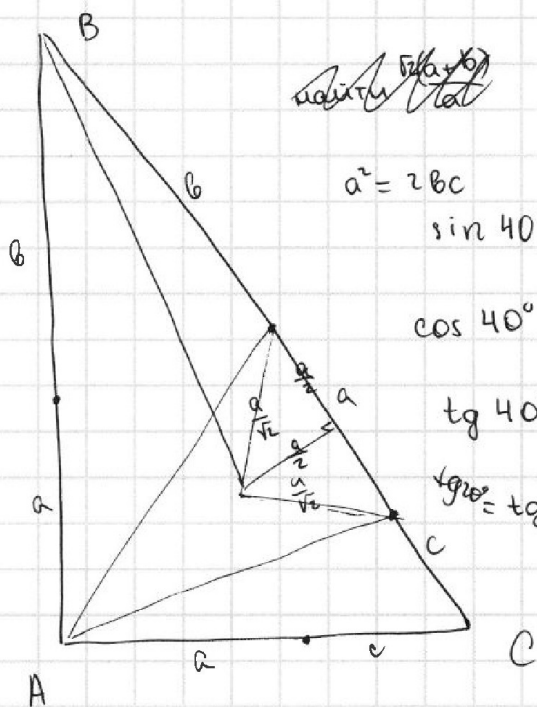
$$(10^{30001} - 1)^3$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 9 \\ \hline 729 \end{array}$$

$$10^{30003} - 3 \cdot 10^{60002} + 3 \cdot 10^{30001} - 1$$

$$10^4 - 1$$

$$9996999999999999$$



$$a^2 = 2bc$$

$$\sin 40^\circ = \frac{a+c}{a+b+c}$$

$$\cos 40^\circ = \frac{a+b}{a+b+c}$$

$$\tan 40^\circ = \frac{a+c}{a+b}$$

$$\tan \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{1+\cos d}}{\sqrt{1-\cos d}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 d}}{1+\cos d} = \frac{\sin d}{1+\cos d}$$

$$\frac{\frac{a+c}{a+b+c}}{\frac{a+b+c+a+b}{a+b+c}} = \frac{a+c}{2a+2b+c}$$

$$\tan \frac{d}{2} = \frac{1-\cos d}{\sin d} = \frac{a+b+c-a-b}{a+c} = \frac{c}{a+c}$$

$$\frac{c}{a+c} = \frac{a+c}{2a+2b+c} = 1 - \frac{a+2b}{2a+2b+c}$$

$$\frac{2ac + 2bc + c^2 + a^2 + 2ab + ac + 2bc}{2a^2 + 2ab + 2ac + 2ac + 2bc + c^2}$$

$$\frac{\sqrt{1-\cos d}}{\sqrt{1+\cos d}} = \frac{1-\cos d}{\sin d}$$

$$\frac{1}{a+c+c}$$

$$\frac{2c}{a+2c}$$

$$\tan d = \frac{2 \tan \frac{d}{2}}{1 - \tan^2 \frac{d}{2}} = \frac{\frac{2a+2c}{2a+2b}}{1 - \left(\frac{2a+2c}{2a+2b}\right)^2} = \frac{(2a+2c)(2a+2b)}{(2b-2c)(2b+2c)} =$$

$$\frac{a^2 + 2ab + 2ac}{ac + 2bc}$$

$$x = \frac{2ac + 2c^2 - ac - 2c^2}{a+2c} = \frac{ac}{a+2c}$$

$$\frac{(a+c)(a+b)}{(b-c)(b+c)}$$

$$a^2 + c^2 + 2ac = 2ac + 2bc + c^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 99999 \\ 99999 \\ \hline 89999 \\ 89999 \\ \hline 89999 \end{array}$$

$$x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$$

$$3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$$

$a_0 d$

$$a_0 + 3d + a_0 + 8d = \frac{a^3 - 2a^2}{3}$$

$$(a_0 + 3d)(a_0 + 8d) = a_0^2 + 11a_0d + 24d^2 = \frac{6 - a^5}{3}$$

$$a_0 + 5d + a_0 + 6d = a^2 - 2a$$

$$(a_0 + 5d)(a_0 + 6d) = a_0^2 + 11a_0d + 30d^2 = a^2 - a - 7$$

$$6d^2 = a^2 - a - 7 - 2 + \frac{a^5}{3} = \frac{a^5}{3} + a^2 - a - 9$$

$$d^2 = 2a^5 + 6a^2 - 6a - 54$$

$$2 \cdot 32 + 6 \cdot 4 - 6 \cdot 2 - 54 = 64 + 12 - 54 = 22$$

$$\frac{a^3 - 2a^2}{3} - a^2 + 2a = 0$$

$$a^3 - 2a^2 - 3a^2 + 6a = 0$$

$$a(a^2 - 5a + 6) = 0$$

$$a(a - 3)(a - 2) = 0$$

$$a = 0, a = 3, a = 2$$

$$d^2 = -54 \text{ не подходит}$$

$$d^2 = 22 \text{ не подходит}$$

$$d = \sqrt{22} \text{ или } d = \sqrt{468} = 2\sqrt{117}$$

$$d^2 = 2 \cdot 243 + 6 \cdot 9 - 6 \cdot 3 - 54 = 486 + 36 - 54 = 468$$

$$d = 4\sqrt{22}$$

$$2a_0 + 11d = a^2 - 2a$$

$$a_0 = \frac{4 - 4 - 11 \cdot \sqrt{22}}{2} = -\frac{11\sqrt{22}}{2}$$

$$\frac{11^3}{2} + \frac{11 \cdot 11 \cdot \sqrt{11}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{22} + 30 \cdot 22 = 4 - 2 - 4 = -5$$

$$d = -\sqrt{22} \quad a_0 = \frac{11\sqrt{22}}{2} = \frac{11\sqrt{11}}{\sqrt{2}}$$

$$a_0 = \frac{3 + 22\sqrt{117}}{2}$$

$$a = 2 \text{ не подходит!}$$

$$a_0 = \frac{9 - 2 \cdot 3 - 11 \cdot \sqrt{468}}{2} = \frac{3 - 22\sqrt{117}}{2}$$

$$\frac{9 + 22^2 \cdot 117 - 6 \cdot 22 \sqrt{117}}{4} + 11 \cdot \frac{2\sqrt{117} \cdot (3 - 22\sqrt{117})}{2} + 30 \cdot 468 = 9 - 3 - 4 = -1$$

$$9 + 22^2 \cdot 117 - 6 \cdot 22 \sqrt{117} + 4 \cdot 3 \cdot 11 \sqrt{117} - 11 \cdot 4 \cdot 22 \cdot 117 + 30 \cdot 468 = -4$$

$$9 + 22^2 \cdot 117 - 11 \cdot 4 \cdot 22 \cdot 117 + 30 \cdot 468 \cdot 4 = -4$$

$$\frac{32 \cdot 22 - 21}{3} = \frac{11}{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$xy = z(z-2)$$

$$yz = x(x-2)$$

$$xz = y(y-2)$$

$$\frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{x^2 z^2}{y^2} \geq 3 \sqrt[3]{x^2 y^2 z^2}$$

1) всею способами C_n^5 , подходит C_{n-3}^2

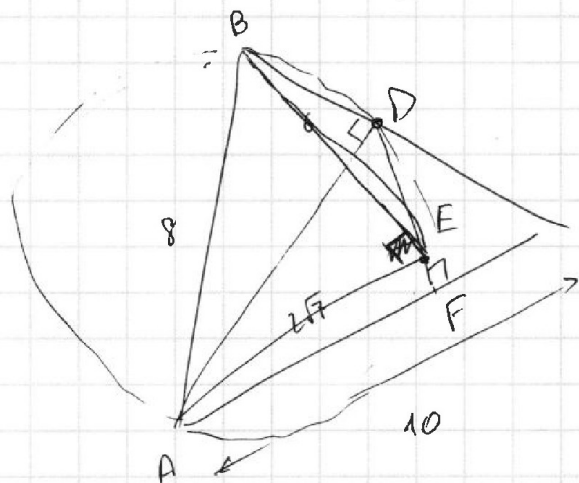
$$\frac{(n-3)(n-4)}{2 \cdot 1}$$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$p = \frac{(n-3)(n-4)}{2} = \frac{60}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = \frac{60}{n(n-1)(n-2)}$$

$$2) C_n^7 C_{n-3}^4 = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \quad p = \frac{7!}{4! \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{n(n-1)(n-2)}$$

увелич. в $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 4 \cdot 3} \text{ раз} = 3,5$



40, AB, BE

$$\sqrt{64-36} = 2\sqrt{7}$$

$$BD \cdot AE + AB \cdot DE = BE \cdot AD$$

$$2\sqrt{7} BD + 8 DE = 6 AD$$

$$= 4 BD^2 + 72 BD + 36$$

$$BC^2 = BD^2 + 36 + BD^2 + 2 BD \cdot (36 + BD) =$$

$$CD^2 = 36 + BD^2$$

$$64 - BD^2 = 100 - CD^2$$

$$AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2 = AD^2 = AF^2 + DF^2$$

$$AE^2 = EF^2 + AF^2 \quad 28 = EF^2 + AF^2$$

$$DC^2 = DF^2 + FC^2$$

$$AD^2 = AE^2 + DE^2$$

$$DE + EF = DF$$

$$AF + FC = AC$$

$$BD + CD = BC$$

AB, BD, CD, AC, AD,

AF, DF, AE, EF, FC

$$36 + BD^2 = CF^2 + 64 - BD^2 - AF^2$$

$$AF^2 = CF^2 + 28 - 2 BD^2$$

$$10 - CF$$

$$CF^2 + 28 - 2 BD^2 = 10 - CF$$

$$CF^2 + CF + 18 - 2 BD^2 = 0 \quad CF = \frac{-1 \pm \sqrt{1-72+8 BD^2}}{2}$$