



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В телесигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = z^2 - 6z \\ yz = x^2 - 6x \\ xz = y^2 - 6y \end{cases} \quad x, y, z \neq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} xyz = z^3 - 6z^2 \\ xyz = x^3 - 6x^2 \\ xyz = y^3 - 6y^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z^3 - 6z^2 = x^3 - 6x^2 \\ z^3 - 6z^2 = y^3 - 6y^2 \\ x^3 - 6x^2 = y^3 - 6y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^3 - x^3 = -6(x^2 + z^2) \\ x^3 - y^3 = -6(x^2 + y^2) \\ y^3 - z^3 = -6(y^2 + z^2) \end{cases} \xrightarrow{\text{сложим все}}$$

$$\Leftrightarrow -12(x^2 + y^2 + z^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

Сложим все три уравнения в изначальной системе:

$$\begin{cases} xy + yz + xz = z^2 + x^2 + y^2 - 6(x + y + z) \\ x + y + z = p \\ xy + yz + xz = q \\ xyz = r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + yz + xz = -6(x + y + z) \\ p^2 - 2q = 0 \\ q = -6p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2 + 12p = 0 \\ p = 0 \\ p = -12 \end{cases}$$

$$\text{Нужно найти } (x-6)^2 + (z-6)^2 + (y-6)^2 = x^2 + y^2 + z^2 +$$

$$+ 36 \cdot 3 - 12(x + y + z) = 36 \cdot 3 - 12(x + y + z) + 0$$

$$\begin{aligned} & \text{Если } p = 0, \text{ то выражение} = 108 \\ & \text{Если } p = -12, \text{ то выражение} = 36 \cdot 3 + 12 \cdot 12 = \\ & = 108 + 144 = 252 \end{aligned}$$

Ответ: 108 или 252



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$$n = \underbrace{99\dots9}_{2001 \times "9"} = (10^{2001} - 1)^3 = 10^{6003} - 1^3 + 3 \cdot 10^{4002} - 3 \cdot 10^{2001} =$$

$$= \underbrace{9\dots9}_{6003} + 3 \cdot 10^{4002} - 3 \cdot 10^{2001} = 999 \dots 699\dots9 + 3 \cdot 10^{4002}$$

В первом слагаемом шестёрка стоит на 2002-м месте при отсчёте справа. Три сложения этих двух чисел в столбик 4002 цифры с конца первого слагаемого не меняются, т.к. у второго там нули. Три э том, начиная с 4003 цифры при отсчёте справа у получившейся суммы будут

цифры: 233...31

$$\text{То есть } 999\dots6\dots99\dots9 + 3 \cdot 10^{4002} = 133\dots3299\dots699\dots9.$$

Будет 4002 не менявшихся цифр 4001 девятка и одна шестёрка

Ответ: 4001

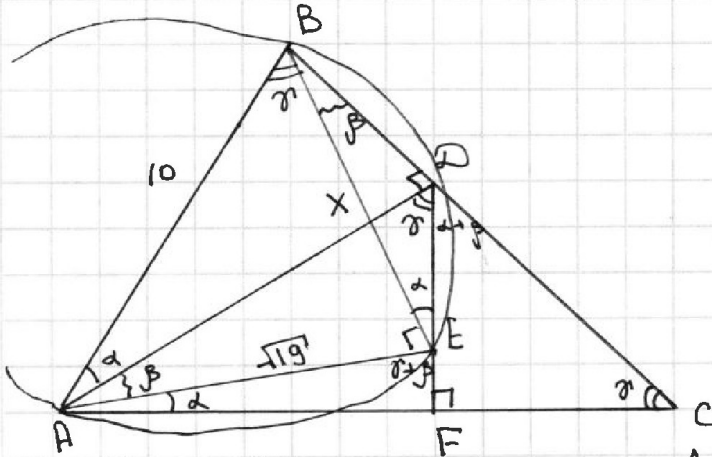
1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Поря QR-кода недопустима!



№3.



Дано.

$$AC = 20$$

$$AB = 10$$

$$BE = 9$$

AF = ?



Пусть $\angle BED = \alpha$, $\angle DAE = \beta$, $\angle ABE = \gamma$

$\angle ADB = \angle AEB = 90^\circ$, т.к. опир. на диаметр BO влнс. 4-ке.

$\angle BED = \angle BAD$, т.к. опир. на одну дугу. $\therefore \angle DAE = \angle EBD$;
 $\angle ABE = \angle ADF$.

$$\triangle ABD: \angle A + \angle B + \angle D = 180^\circ = 90^\circ + \alpha + \beta + \gamma \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$$

$$\triangle ADF: \angle A + \angle D + \angle F = 180^\circ = 90^\circ + \alpha + \beta + \angle EAF \Rightarrow \angle EAF = \alpha$$

$$\triangle ABC: \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta + \alpha + \gamma + \beta + \angle C = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle C = \gamma; \text{ уг } \triangle CDF: \angle DCF = 180^\circ - 90^\circ - \gamma = \alpha + \beta$$

~~$\triangle ADF \sim \triangle DFC$ по~~

уг $\triangle ADF$:

$$AF = AD \cdot \sin \gamma$$

$$\sin \gamma = \frac{AE}{AB} = \frac{\sqrt{AB^2 - BE^2}}{AB}$$

уг $\triangle ADC$:

$$AD^2 = AC \cdot \sin \gamma \Leftrightarrow AF = AC \cdot \sin^2 \gamma = AC \cdot \left(\frac{\sqrt{AB^2 - BE^2}}{AB} \right)^2 =$$

$$= 20 \cdot \left(\frac{\sqrt{100 - 81}}{10} \right)^2 = 20 \cdot \left(\frac{\sqrt{19}}{10} \right)^2 = \frac{20 \cdot 19}{100} = \frac{19}{5}$$

$$\text{Ответ: } AF = \frac{19}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Нюча QR-кода недопустима!

84.

Пусть всего n коробок. Посчитаем вероятность угадать три нужных коробки с пяти попыток.

Благоприятных исходов: Чтобы выиграть, нужно выбрать три определённых коробки. Это можно сделать 1 способом. Осталось выбрать ещё $5-3=2$ любые коробки. Это делается C_{n-3}^2 способами. Порядок коробок важен, т.е. порядок попыток на них не влияет. Итого ~~исходов~~ $1 \cdot C_{n-3}^2 = \frac{n(n-1)}{2}$

$$= \frac{(n-3)(n-4)}{2}$$

Всего исходов:

Всего возможных исходов $C_n^5 =$

$$= \frac{n!}{5!(n-5)!}$$

Вероятность победы =

$\frac{\text{Благоприятные исходы}}{\text{Все исходы}} =$

$$= \frac{(n-3)! \cdot 5!}{n! \cdot 2!} = \frac{60}{n(n-2)(n-1)} = P_2(\text{угадать})$$

Теперь посчитаем вероятность угадать три нужных коробки с 9 попыток:

Аналогично Благоприятных исходов C_{n-3}^6

Всего исходов $= C_n^9$

$$P_2(\text{угадать}) \text{ и } P_1 = \frac{C_{n-3}^6}{C_n^9} = \frac{9!(n-3)!}{6! \cdot n!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{n(n-1)(n-2)}$$

$$\frac{P_2(\text{угадать})}{P_1(\text{угадать})} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{60} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{10 \cdot 6} = \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{2}$$

$$= \frac{7}{5} = 1,4$$

Ответ: $\frac{7}{5}$ 1,4 раза ~~при $n \geq 9$~~

Если $n \leq 9$, то



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5.

Пятый, шестой, седьмой, восьмой члены очевидно являются 1, 2, 3, 4 группой прогрессии с тем же знаменателем. Пусть пятый - первый и шестой второй и т.д.

1-й член = a_1 , 2-й = a_2 ... и 4-й = a_4

Пусть разность прогрессии = d .

По Th Виета:

$$\begin{cases} a_2 + a_3 = a^2 - 4a \\ a_2 \cdot a_3 = a^2 - 6a + 4 = (a_1 + d)(a_1 + 2d) \\ a_1 + a_4 = (a^3 - 4a^2) : 5 \\ a_1 \cdot a_4 = (-2a^3 - 6a - 15) : 5 = (a_1 + 3d) \cdot a_1 \end{cases}$$

Заметим, что $a_2 + a_3 = a_1 + d + a_1 + 2d = a_1 + (a_1 + 3d) = a_1 + a_4$

Значит, $a^2 - 4a = \frac{a^3 - 4a^2}{5} \Leftrightarrow a(a - 4) \cdot 5 = a^2(a - 4) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a(a - 4)(5 - a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 4 \\ a = 5 \end{cases}$$

Заметим, что $a = 0$ не подходит, поскольку иначе дискриминант 1-го уравнения < 0 .

$$x^2 - 0 \cdot x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4 = 0 \quad (D < 0, \text{ корней нет})$$

II $a = 4$:

Дискриминант первого ур-я = $-4 \cdot (-4) = 16 > 0$

Дискр. второго ур-я равен $(4^3 - 4^2)^2 - 4 \cdot (-2 \cdot 4^3 - 6 \cdot 4 - 15) \cdot 5 =$

$$= 0 + 4(2 \cdot 4^3 + 6 \cdot 4 + 15) \cdot 5 > 0$$

Подставляем знаменатель прогрессии:

$$\begin{cases} a^2 + 3ad + 2d^2 = 4^2 - 6 \cdot 4 + 4 \\ a^2 + 3ad = \frac{-2 \cdot 4^3 - 6 \cdot 4 - 15}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2d^2 - \frac{167}{5} = -4 \\ a^2 + 3ad = \frac{-167}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d^2 = \frac{167}{5} + 4 > 0 \Rightarrow d \neq 0 \text{ и } \exists d \Rightarrow a = 4 \text{ подходит.}$$

III $a = 5$

Дискриминант 1-го ур-я = $5^2 - 4 \cdot (-1) > 0$

Дискр. 2-го ур-я = $25 + 4(2 \cdot 5^3 + 6 \cdot 5 + 15) > 0$

Подставляем знаменатель прогрессии:

$$\begin{cases} a^2 + 3ad + 2d^2 = 5^2 - 4 \cdot (-1) = 29 \\ a^2 + 3ad = -295 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2d^2 - 295 = -1 \\ d > 0 \text{ и } \exists d \Rightarrow a = 5 \text{ подх.} \end{cases}$$

Ответ: $\{4; 5\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

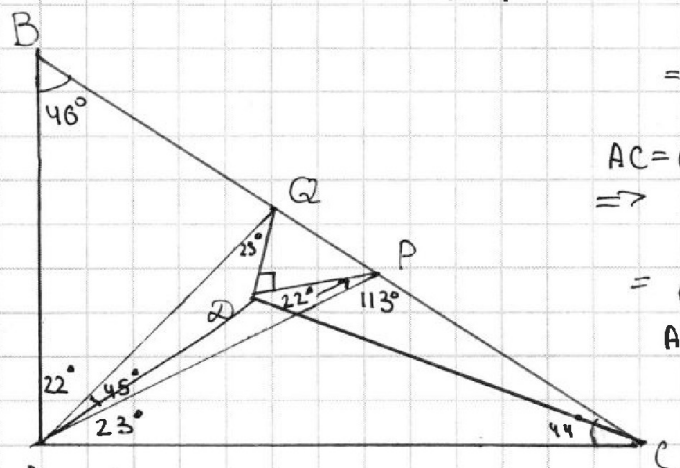


1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

57.



$$\begin{aligned} \angle BCA &= 180^\circ - 90^\circ - 46^\circ = \\ &= 44^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC &= CQ \Rightarrow \triangle ACQ \text{ p/d} \Rightarrow \\ \Rightarrow \angle QAC &= \angle QCA = \frac{180^\circ - 44^\circ}{2} = \\ &= 68^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB &= BP \Rightarrow \triangle ABP \text{ p/d} \Rightarrow \\ \Rightarrow \angle BAP &= \angle ABP = \\ &= \frac{180^\circ - 46^\circ}{2} = 67^\circ \end{aligned}$$

$$\angle BAP + \angle QAC = \angle QAP + \angle PAC + 2 \cdot \angle QAP \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \angle QAP &= \angle BAP + \angle QAC - 90^\circ - \angle PAC \quad (\text{т.к. } \angle BAQ + \angle QAP + \angle PAC = \angle BAC) = \\ &= 68^\circ + 67^\circ - 90^\circ = 45^\circ \end{aligned}$$

$$\angle PAC = \angle QAC - \angle QAP = 68^\circ - 45^\circ = 23^\circ$$

$$\angle APC = 180^\circ - 44^\circ - 23^\circ = 113^\circ$$

$$\angle DPA = 180^\circ - \angle QPD - \angle APC = 180^\circ - 113^\circ - 45^\circ = 22^\circ$$

$$\angle QDP = 2 \cdot \angle QAP \Rightarrow D - \text{центр окр-и } \triangle AQP, \wedge$$

$$AD = DQ = DP, \text{ как радиусы} \Rightarrow \triangle AQP \text{ p/d} = \triangle AQQ \text{ p/d}.$$

$$\angle ADP = \angle AQP = \frac{360^\circ - 90^\circ}{2} = 135^\circ \quad 180^\circ - 22^\circ \cdot 2 = 136^\circ$$

$$\begin{aligned} \angle DAP &= \angle DPA = 22^\circ, \text{ как p/d}; \quad \angle ADC = 180^\circ - \angle PAC - \angle ADP = \\ &= 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ \end{aligned}$$

$$\angle DPC = \angle ADP - \angle ADC = 136^\circ - 135^\circ = 1^\circ$$

$$\angle DCB = \angle DCP = 180^\circ - 22^\circ - 113^\circ - 1^\circ = 180^\circ - 136^\circ = 44^\circ$$

$$\text{Ответ: } \angle DCB = 44^\circ$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1 три шарика в 1-х трёх шариках
Всего способов выбрать = C_n^5

37 C_{n-3}^2

$$C_n^5 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}$$

$$C_{n-3}^2 = \frac{(n-3)(n-4)}{2}$$

$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{n(n-1)(n-2)}{60}$$

$$\frac{60}{n(n-1)(n-2)}$$

$$\frac{C_{n-3}^6}{C_n^9} = \frac{9! (n-3)!}{6! n!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{(n-2)(n-1)n}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$99^3 = (100 - 1)^3 = 10^6 + 3 \cdot 10^4 - 3 \cdot 100 - 1$$

$$= 999999 - 3 \cdot 100 = 999699 + 3 \cdot 10^4$$

$$\lambda \quad \begin{array}{l} 2a_1 + 3d = 0 \\ 2a_1 + \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 999699 \\ + 30000 \\ \hline 1329699 \end{array}$$

$$5, 6, 7, 8 \quad -128 - 24 - 15 =$$

$$\begin{array}{r} -128 - 39 \\ \hline 999 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 128 \\ + 39 \\ \hline 167 \end{array}$$

$$a_6 \cdot a_7$$

$$a_5 \cdot a_8$$

$$-2 \cdot 2^6 = 128$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 999 \\ 3 \\ \hline 332 \end{array}$$

$$-2 \cdot 225 - 6 \cdot 5 - 15$$

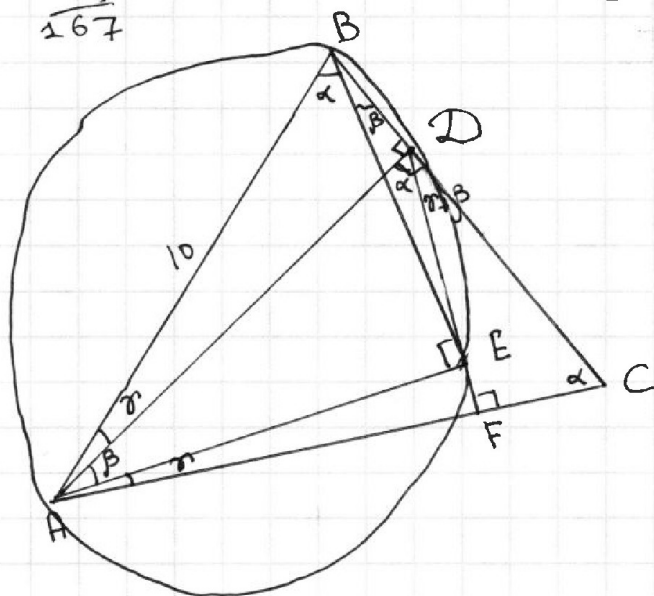
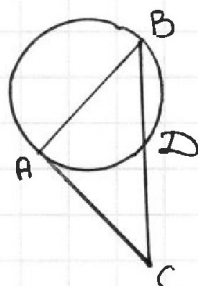
$$-250 - 30 a_5 - 15 a_6 a_7 a_8 \equiv a_1 a_2 a_3 a_4$$

$$43 = 64 \cdot 128$$

$$-128 - 24 - 15$$

$$-128 - 39$$

$$\begin{array}{r} 128 \\ + 39 \\ \hline 167 \end{array}$$



$$AC = 20 ; BE = 9$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 90$$

$$AE = \sqrt{19}$$

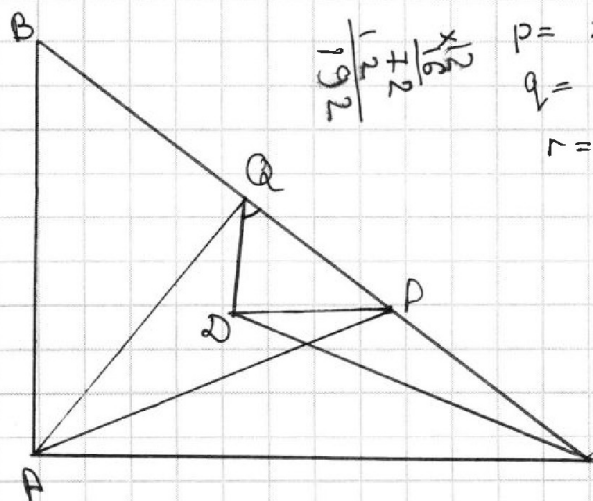


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{1}{2} \frac{6}{n} + \frac{1}{2} \frac{x}{n} = \frac{1}{2} \frac{6+x}{n}$$

$$p = xyz$$

$$q = x + y + z$$

$$r = xy + yz + xz$$

$$q^2 - 2r - 12p$$

$$q^2 - 2r - 12q$$

$$3r - 6q$$

$$r = -6q + q^2 - 2r \quad r - 6q$$

$$3r = q^2 - 6q$$

$$q^2 - 2r - 12(q) + 36 \cdot 3 = ?$$

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 & (z-6)^2 = xy + 36 - 6z \\ yz = -6x + x^2 \\ zx = -6y + y^2 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 12(x+y+z) + 36 \cdot 3 = ?$$

$$xy + yz + xz + 36 \cdot 3 - 6(x+y+z) = xy + yz + xz$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6(x+y+z) = xy + yz + xz$$

$$t^2 - 12t + 36 \cdot 3 - 2(\dots)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \dots - 6(x+y+z)$$

$$t^2 = 3 \dots - 6t$$

$$\dots = \frac{t^2 + 6t}{3}$$

$$xy - yz = x^2 - z^2 - 6x + 6z$$

$$(z+x)(x-z) + (z+x)9 = (z-x)h$$

$$\frac{z-x}{(z+x)(x-z+9)} = h$$

$$(z+x)(x-z+9) = h(z-x)$$

$$zx - z^2 + x^2 - xz + 9z - 9x = z^2 h - hx$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$AF^2 + D^2 = AC^2$
 $AD^2 + DC^2 = AC^2$
 $AD^2 + DF^2 + FC^2 = AC^2$
 $AF^2 + 2DF^2 + FC^2 = AC^2$

$AC^2 = AD^2 + DC^2$
 $AF = AD \cdot \sin \theta$
 $AD^2 = AC^2 - DC^2$
 $DF^2 = AD \cdot DC$

10 кор. бок, 3 шарика

$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{90}$
 $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$
 $\frac{10}{45} = \frac{2}{9}$

2 non. 1 ш. 3 кор.

$\frac{3}{2} = 1.5$

$10^9 - 1^3 + 3 \cdot 10^6 - 3 \cdot 10^3 = 10^9 + 3 \cdot 10^6 - 3 \cdot 10^3 - 1$
 $= 1000 - 300 + 30 - 1 = 729 = 9^3$

$10^3 - 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 - 1 = 1000 - 900 + 30 - 1 = 125 = 5^3$

$n^3 = (9 \dots 9)^3 = (1 \dots 1)^3 \cdot (9 \dots 9)^3$
 $= 1000 \dots 001$

$25^2 - 4 = 625 - 4 = 621$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7



СТРАНИЦА

1 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5.

Третьей, четвертой, седьмой, восьмой члены некоторой арифметической прогрессии очевидно являются 1, 2, 3, 4 членами прогрессии с тем же a и знаменателем.

Пусть 1-й член $-a_1$
2-й $-a_2$
3-й $-a_3$
4-й $-a_4$

Пусть разность прогр. $= d$.

По Th Виета:

$$\begin{cases} a^2 - 4a = a_2 + a_3 = 2a_1 + 3d \\ a^2 - 6a + 4 = a_2 \cdot a_3 = (a_1 + d \cdot 2)(a_1 + d) \Rightarrow \\ a^3 - 4a^2 = 2a_1 + 3d = a_1 + a_4 \\ -2a^3 - 6a - 15 = a_1 \cdot (a_1 + 3d) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a^2 - 4a &= a^3 - 4a^2 \Leftrightarrow a(a-4) = a^2(a-4) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a(a-4)(1-a) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=4 \\ a=1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I: } a=0 \\ \begin{cases} (a_1 + 2d)(a_1 + d) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 2d^2 + 2a_1d + a_1d = 4 \\ a_1^2 + 3a_1d = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \\ a_1(a_1 + 3d) = -15 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 3a_1d + 2d^2 = 4 \\ a_1^2 + 3a_1d = -15 \end{cases} \Leftrightarrow 2d^2 = 19 \Leftrightarrow d = \sqrt{\frac{19}{2}} \neq 0$$

$\Rightarrow$ прогр. не постоянная

* 1е уравнение:

$$x^2 - 0 \cdot x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4 = 0$$

$D < 0 \Rightarrow a=0$ не подходит

II $a=4$:

$$\begin{cases} a_1^2 + 3a_1d + 2d^2 = 4^2 - 24 + 4 \\ a_1^2 + 3a_1d = -2 \cdot 4^3 - 6 \cdot 4 - 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2d^2 + (-167) = -4 \\ a_1^2 + 3a_1d = -167 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow d^2 = \frac{163}{2} \Rightarrow d \neq 0 \Rightarrow \text{прогрессия не пос.}$$

* 1е уравнение:

$$x^2 - 0 \cdot x + 16 - 24 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$$

* 2е уравнение:

$$D > 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = x^2 - 6 \cdot 2x + 36 \cdot 3 + y^2 + z^2 - 12(y+z)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 12(x+y+z) + 36 \cdot 3$$

$$-6x^2 + x^3 = -6z^2 + z^3$$

$$x^3 - z^3 = 6x^2 - 6z^2$$

$$y^3 - z^3 = 6y^2 - 6z^2$$

$$z^3 - x^3 = 6z^2 - 6x^2$$

$$g^3 = 81 \cdot g = 729$$

$$11^2 =$$

$$99 = 11 \cdot 9$$

$$99^3 = 11^3 \cdot 9^3 = 121 \cdot 11 \cdot 729 =$$

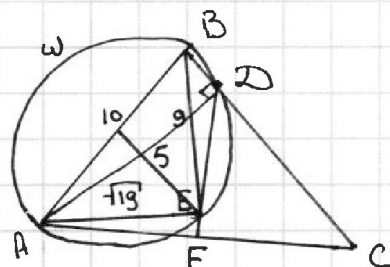
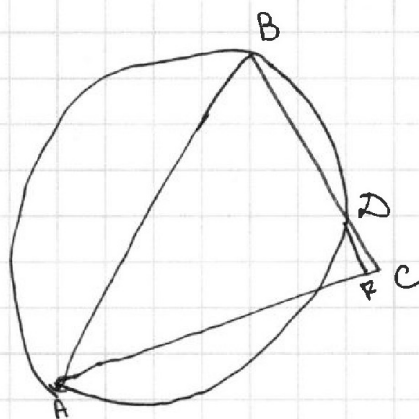
$$= \frac{11}{121} \cdot 11$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ \times 11 \\ \hline 121 \\ 121 \\ \hline 1332 \\ \times 729 \\ \hline 11979 \\ 2662 \\ 9317 \\ \hline 940299 \end{array}$$

$$\triangle ADF \sim \triangle DFC$$

$$\frac{AF}{DF} = \frac{FC}{DF}$$

AF-?



$$\begin{aligned} AC &= 20 \\ AB &= 10 \\ BE &= 9 \end{aligned}$$

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AF}{AE}$$

$$\angle AEB = 90^\circ, \text{ т.к. } AB \perp BE$$

$$AE = \sqrt{100 - 81} = \sqrt{19}$$

$$\angle BAE = 90^\circ - \angle ABE = \angle DAF$$

$$\triangle DAF \sim \triangle BAE$$

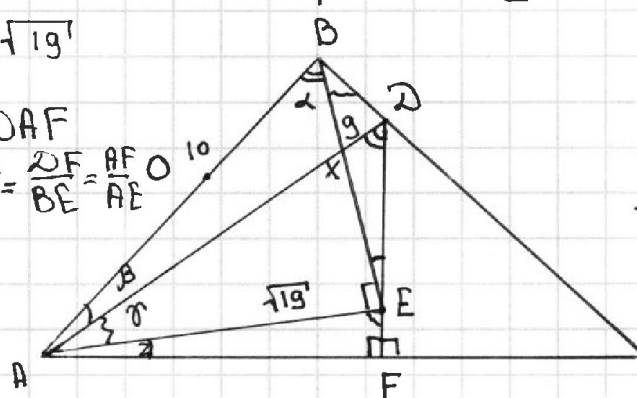
$$AC = AF + FC$$

$$\triangle ABD \sim \triangle AEF$$

$$\triangle ABD \sim \triangle BAE$$

$$\triangle ABD \sim \triangle BAE$$

Тогда:



$$\triangle ABx \sim \triangle DxE$$

$$\begin{aligned} AC &= 20 \\ BE &= 9 \\ AB &= 10 \end{aligned}$$

$$\frac{AD}{10} = \frac{DE}{9} = \frac{AE}{\sqrt{19}}$$

$$\frac{AD}{AE}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = 111 \dots 1 \cdot 9$$

$$n^3 = (111 \dots 1)^3 \cdot 729$$

$$111 \dots 1^3 =$$

$$\begin{array}{r} 999999999 \\ + 300000000 \\ \hline 332559999 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 1367631 \\ 729 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12409679 \\ 2735262 \\ 9563417 \\ \hline 135396469 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 999999999 \\ + 300000000 \\ \hline 902999999 \end{array}$$

15

$$\begin{array}{r} 111 \\ \times 111 \\ \hline 111 \\ 111 \\ 111 \\ \hline 12321 \\ \times 12321 \\ \hline 12321 \\ 2321 \\ 2321 \\ 12321 \\ \hline 1367631 \end{array}$$

$$121 \cdot 9 =$$

$$\begin{array}{r} \times 121 \\ 9 \\ \hline 1089 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 1367631 \\ 72 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 81 \\ 9 \\ \hline 729 \end{array}$$

9

$$n^3$$

$$999 \dots 9$$

$$111 \dots 1 : 3$$

$$n \cdot 9 = 99$$

$$\begin{array}{r} \times 1367631 \\ 729 \end{array}$$

$$1225679$$

$$\begin{array}{r} \times 999 \\ 999 \\ \hline 8991 \\ 8991 \\ \hline 8991 \end{array}$$

$$(10^3 - 1)^3 = 10^9 + 3 \cdot 10^6 - 3 \cdot 10^3 + 1$$

$$\begin{array}{r} 8991 \\ 8991 \\ \hline 8991 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 998201 \\ 999 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8983809 \\ 8983809 \\ \hline 8983809 \end{array}$$

$$999^3 = 111^3 \cdot 9^3 =$$

$$= 729 \cdot 111^3 = 9 \cdot 111^3 + 20 \cdot 111^3 + 700 \cdot 111^3 =$$

$$= 9$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 =$$

$$\frac{x}{z} = \frac{-6z + z^2}{-6x + x^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{z} = \frac{z(z-6)}{x(x-6)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{z^2} = \frac{(z-6)}{(x-6)}$$

$$x^2 + y^2 + z^2$$

$$a = \frac{1}{a}$$

$$(z-6)^2 = z^2 - 12z + 36 =$$

$$= xy + 12z - 36$$

$$xy - 6z + 36 \neq 36 \neq 36z +$$

$$(x-6)^2 = yz - 6x + 36$$

$$(z-y-6)^2 = xz - 6y + 36$$

$$yz - 6x + 36 = xz -$$

$$xz + yz + yx - 6(x+y+z) + 36 \cdot 3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

