



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шару. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N1 \quad \begin{cases} xy = (u+z)z \\ xz = (u+y)y \\ yz = (u+x)x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{xy}{z} = u+z \\ \frac{xz}{y} = u+y \\ \frac{yz}{x} = u+x \end{cases}$$

$$S = (u+z)^2 + (u+y)^2 + (u+x)^2 = \frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{x^2 z^2}{y^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2}$$

$$S = 16 + 2z + z^2 + 16 + 2y + y^2 + 16 + 2x + x^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 8(x+y+z) + 3 \cdot 16$$

$$xy \cdot xz \cdot yz = (u+z)(u+y)(u+x)xyz$$

$$xyz = (u+z)(u+y)(u+x)$$

$$\begin{cases} x^2 = (u+z)(u+y) \\ y^2 = (u+x)(u+z) \\ z^2 = (u+y)(u+x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \frac{(u+z)(u+y)z^2}{z^2} + \frac{(u+z)(u+y)z^2}{y^2} + \frac{z^2 y^2}{(u+z)(u+y)}$$

$$xyz = 64 + 16x + 16y + 4xy + 16z + 4xz + 4zy + xyz$$

$$0 = 16(x+y+z) + 4(xy+yz+zx) + 64$$

$$0 = 4(x+y+z) + (xy+yz+zx) + 16$$

$$0 = 4(x+y+z) + (z^2 + 4z + x^2 + 4x + y^2 + 4y) + 16$$

$$0 = 4(x+y+z) + z^2 + x^2 + y^2 + 16$$

$$\begin{cases} 0 = 4(x+y+z) + z^2 + x^2 + y^2 + 16 \\ S = 8(x+y+z) + x^2 + y^2 + z^2 + 3 \cdot 16 \end{cases} \Rightarrow S = 2 \cdot 16 = \underline{32}$$

Dono numero $K=25000$, con-uo genero 49999



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть n - всего конусов коробок,

тогда: $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}$ - способов выбрать пять коробок.

$\frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{5!}$ - способов выбрать пять коробок, где нет одного конуса.

3. $\frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{4!}$ - где есть ровно один.

3. $\frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{4!}$ - где ровно два конуса.

Пока вероятность успеха!

$\alpha = 1 - \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{5!} - 6 \frac{(n-1)(n-4)(n-5)(n-6)}{4!}$

Анонимно для второго случая

$\beta = 1 - \frac{(n-3) \dots (n-10)}{8!} - 6 \frac{(n-3) \dots (n-9)}{7!}$

$\alpha = \frac{5! \cdot 4! \cdot (n-3) \dots (n-7) \cdot 4!}{5!} - 6 \cdot 5!$

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{5! - (n-3) \dots (n-7) - 30(n-3) \dots (n-6)}{5!}$

$\frac{8! - (n-3) \dots (n-10) - 48(n-3) \dots (n-9)}{8!}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4 Пусть n - кол-во всех коробок

Всего вариантов выбора 5 коробок:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}$$

из них благоприятные $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$

К трем коробкам с маркировкой добавим еще одну.

тогда вероятность $a = \frac{\frac{(n-3)(n-4)}{2!}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}} = \frac{5!}{2! \cdot n(n-1)(n-2)}$

Аналогично для остальных коробок.

$\frac{n(n-1) \dots (n-7)}{8!}$ - все варианты.

$\frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{5!}$

$\frac{n(n-3) \dots (n-7)}{8!}$

$b = \frac{\frac{(n-3)(n-4) \dots (n-7)}{5!}}{\frac{n(n-1) \dots (n-7)}{8!}} = \frac{8!}{5! \cdot n(n-1)(n-2)}$

$\frac{a}{b} = \frac{\frac{5!}{2! \cdot n(n-1)(n-2)}}{\frac{8!}{5! \cdot n(n-1)(n-2)}} = \frac{5! \cdot 2}{8!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 8}{5} = 5,6 \text{ раз}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2 - a^3}{3} = 0$$

$$2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$$

Пусть ~~x_1, x_3~~ - корни первого уравнения, ~~x_4, x_5~~

А x_2, x_7 - корни второго

Пусть d - это разность между соседними членами прогрессии.

Пусть a ! Наши корни встроим в прогрессию x_2, x_4, x_5, x_7

$$x_4 = x_5 - d$$

$$x_2 = x_5 - 3d$$

$$x_7 = x_5 + 2d$$

$$x_4 + x_5 = 2x_5 - d$$

$$x_2 + x_7 = x_5 - 3d + x_5 + 2d = 2x_5 - d$$

~~Значит сумма корней равна.~~

Значит нам необходимо найти, при каких a сумма корней в каждом уравнении равна друг другу:

В квадратном уравнении

$$px^2 + qx + c = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{q}{p}$$

Значит:

$$x_4 + x_5 = \frac{a^2 - a}{1} = a^2 - a$$

$$x_2 + x_7 = \frac{a^3 - a^2}{2}$$

Приравняем:

$$a(a - 1) = \frac{a^2(a - 1)}{2}$$

$$2a(a - 1) = a^2(a - 1)$$

если $a \neq 0$ $a \neq 1$ разделим на $a(a - 1)$

$$2 = a$$

$a = 0$ - корень

$a = 1$ - корень.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверим корни порхорат ли а

$$a = 0.$$

$$x^2 + \frac{2}{3} = 0 \rightarrow \text{Здесь } x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + \frac{2}{3} > 0 \Leftrightarrow \text{не порхорат.}$$

$$a = 1.$$

$$x^2 - (1^2 - 1)a + \frac{2 - a^3}{3} = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{3} = 0 \quad \text{Аналогично } a \neq 1 \text{ не порхорат}$$

$$a = 2.$$

$$x^2 - 2x + \frac{2-8}{3} = 0$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{12}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

$$x_5 = \frac{2 + \sqrt{12}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

$$d = 2\sqrt{3}$$

порхорат

и тогда $d = 2\sqrt{3}$

$$2x^2 - 4x - 2^3 - 16 - 4 = 0$$

$$2x^2 - 4x - 148 = 0$$

$$x^2 - 2x - 74 = 0$$

$$x_2 = \frac{2 + \sqrt{300}}{2} = 1 + 5\sqrt{3}$$

$$x_3 = \frac{2 + \sqrt{300}}{2} = 1 + 5\sqrt{3}$$

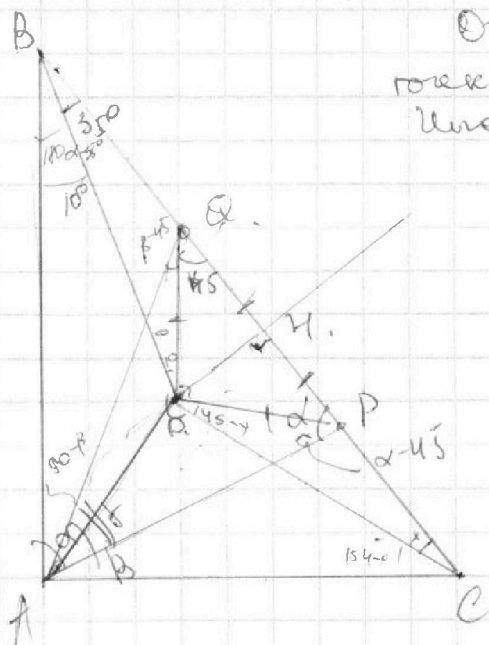


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

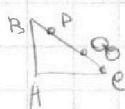
СТРАНИЦА
из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Очевидно, что расположение точек P и Q такое.

Итак:



$$\begin{aligned} BE &= BP + PQ + QE \\ BP &= AB \quad QE = HE \end{aligned} \Rightarrow BE = AC + BE + PQ$$

значит
построим отрезок
сумму двух которых
протянем.

$$\begin{aligned} \text{Пусть } \alpha &= \angle BAP = \angle BPH \\ \beta &= \angle QHE = \angle CQA \\ \delta &= \angle QAP. \end{aligned}$$

$$\alpha + \beta - \delta = 90^\circ$$

Рассмотрим $\triangle APQ$!

Тогда у нас α, β, δ знают.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \delta = 180 \\ \alpha + \beta - \delta = 90 \end{cases} \Rightarrow \delta = 45^\circ \quad \alpha + \beta = 135^\circ \quad \beta = 135 - \alpha$$

Точка D лежит на пер. Перпендикуляре
значит $\triangle DPA$ это 90° и 45° и 45°

$$\angle BDQ = 10^\circ$$

$$\angle AQP = \angle BDQ + \angle PQD \Rightarrow \angle AQP = \alpha - 45^\circ$$

$$\angle BPA = 30^\circ - \angle QAC = 90^\circ - \beta = 90^\circ - (135 - \alpha) = \alpha - 45^\circ$$

$$\begin{aligned} AQ - \text{соединяет } AB \text{ и } QD &\Rightarrow AB \parallel QD \\ \angle AQP = \alpha - 45^\circ = \angle BHD \end{aligned}$$

$$\text{Аналогично } PP \parallel AC \Rightarrow \angle PQD = 45^\circ = \angle CBA = 180 - 2\alpha$$

$$\alpha = 45^\circ \Rightarrow \beta = 135^\circ$$

$$\text{Значит } \alpha = \beta = 135^\circ$$

Тогда $AB = BE = AP = AQ \Rightarrow$ и середины $BC \Rightarrow \triangle BHD = \triangle CHD$

$$\angle BHD = \angle CHD = \angle HCB = 35^\circ$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2 - a^3}{3} = 0 \\ ax^2 - (a^2 - a^2)x - 2ab - 8a^2 = 0 \end{cases}$$

$$D = a^2(a-1)^2 - \frac{4}{3} \cdot \frac{2-a^3}{3} - \frac{8}{3} + \frac{4a^2}{3} =$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a_1} = x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2}$$

$$x_1 - x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a_1} - \left(\frac{-b - \sqrt{D}}{2a_1} \right) = \frac{\sqrt{D}}{a_1}$$

$$\sqrt{a^2(a-1)^2 - \frac{8-4a^3}{3}} = 5 \sqrt{a^4(a-1)^2 + 16a^6 + 64a^4 + 6}$$

$$a^4(a-1)^2 \cdot a^4 - 2a^3 + a^2 - \frac{8-4a^3}{3} = 5a^6 - 10a^5 + 5a^4 + 80a^6 + 320a^4 + 100$$

$$85a^6 - 10a^5 + 4a^4 + \frac{2}{3}a^3 - a^2 + 320a + \frac{248}{3} = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проворачивается. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(n-3)(n-4)(n-5)(n-6) \cdot (17)$$

$$n^5 + 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot n^4$$

$$\frac{5}{5} + \frac{5}{4} + \frac{5}{6} + \frac{5}{7} + \frac{5}{3}$$

$$360 - (145 \cdot 2) - 5$$

$$3. \frac{(n-3)(n-4)}{2}$$

$$25 \cdot 8 =$$

$$25 \cdot 12 = 300 \quad 20$$

$$25 \cdot 4 \cdot 3$$
$$10 \sqrt{3}$$

$$v_1 + v_2 = \frac{18}{a} \quad 17.$$

$$360 - 8 - 2 + 145 - 1 + 145$$

$$140 - 2 - 1 - 8$$

$$27$$
$$33$$

$$15 >$$

$$\begin{matrix} x-2 & x-2 & x-2 & x & x+2 & x+2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix}$$

$$2 \times d \quad 2 \times -d.$$

$$a^2 - a = a^3 - a^2$$

$$a(a-1) = a^2(a-1)$$

$$a=1$$
$$a=0.$$

$$(17)$$

$$2^3$$

$$\begin{matrix} 2^4 = 16 \\ 2^3 = 8 \\ 2^2 = 4 \\ 2^1 = 2 \\ 2^0 = 1 \end{matrix}$$

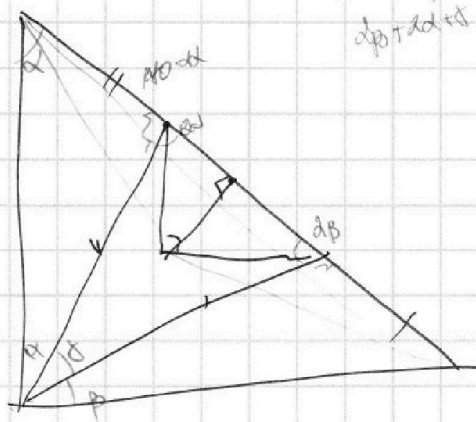
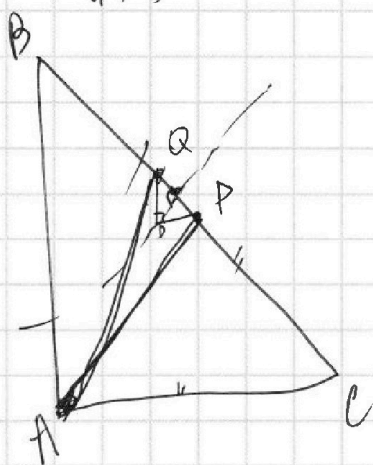
$$\begin{matrix} 272 \\ 272 \\ 272 \\ 272 \\ 272 \\ 272 \end{matrix}$$

$$50 \times 20 \times 3$$
$$85$$

$$\alpha + \delta + \beta = 90$$
$$\alpha + \beta + \delta + \delta = 180$$

$$4 + 2 +$$

$$11 + 5$$





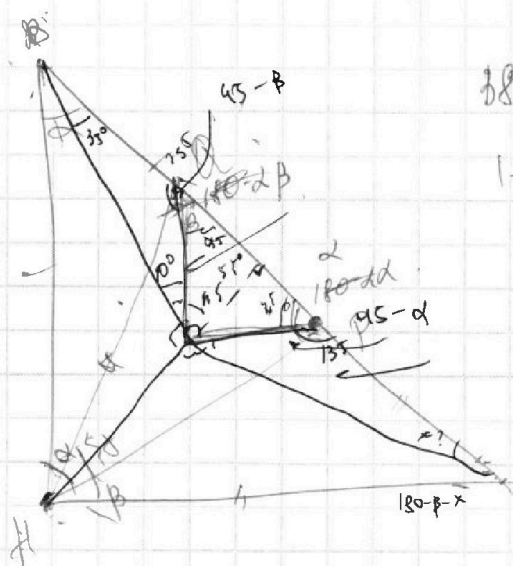
На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\alpha + \beta + \gamma = 90$$

$$180 - 2\beta - 2\alpha + \gamma = 0$$

$$180 - 2\beta - 2\alpha - 2\gamma + \gamma = 0$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180$$

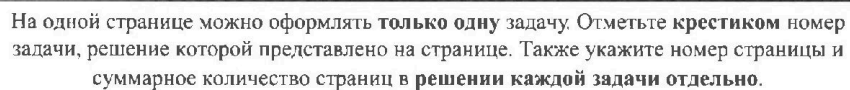
$$\alpha + \beta - \gamma = 90$$

$$\gamma = 45^\circ$$

$$\alpha + \beta = 145^\circ$$

$$270$$

$$180$$



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

