



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$$h = \frac{10^{25000} - 1}{10} \Rightarrow h^3 = 10^{75000} - 1 + 3 \cdot 10^{25000} (1 - 10^{25000}) =$$

$$= 10^{75000} - 3 \cdot 10^{50000} + 3 \cdot 10^{25000} - 1$$

$10^{75000} - 1$ — число из 75000 девяток

Если мы вычитаем $3 \cdot 10^{50000}$, то на 50000 месте с конца

мы заменим 9 на 6

Если в строке мы вычитаем $3 \cdot 10^{25000}$, то с количеством 25000 девяток

ничего не случится, а девятки слева и справа превратятся в 0 (без предыдущих разрядов), а 25000 с конца превратятся в 2, 6 в 7, то есть останется 4 9 999

Ответ: 50000 49999



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

Изначально шарик возвращается в исходное положение, от 1 до $n-1$ и возвращается с вероятностью $\frac{1}{n}$. Всего возможных точек - C_n^3 .

а. Шарик возвращается в исходное положение, то его шанс равен $\frac{C_n^3}{C_n^3} = 1$.

а. шанс - $\frac{C_n^3}{C_n^3} = 1$.

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{C_n^3}{C_n^3} = \frac{(n-3)! \cdot 3!}{n!} = \frac{5! \cdot 3!}{(n-3)!} = \frac{5! \cdot 3!}{(n-3)(n-4)(n-5)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

$$a_1 - 1 \text{ член пропущен} \Rightarrow a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 6d = a_2 + a_3 = 2a_1 + 7d,$$

$$a_4 = 2a_1 + 3d, a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow a_4 + a_5 = 2a_1 + 7d = a_2 + a_3.$$

Если из 2х уравнений будут независимые решения, то сумма решений 1-го равна сумме решений 2-го

$$\Rightarrow \frac{a^2 - a}{2} = \frac{a^3 - a^2}{2} \text{ по Т. Виета}$$

$$\Rightarrow a^3 - 3a^2 + a = 0 \Rightarrow a(a-1)(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \\ a=2 \end{cases}$$

проверим:

$$a=0: x^2 + \frac{2}{3} = 0 \text{ - нет решений}$$

$$a=1 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{3} = 0 \text{ - нет решений}$$

$$a=2 \Rightarrow x^2 - 2x - \frac{6}{5} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1.2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2.2} \text{ по Т. Виета}$$

$$\text{но } 2x^2 - 4x - 12.8 - 1.6 - 4 = x^2 - 2x - 6.4 - 0.8 = x^2 - 2x - 7.2 = 0,$$

$$b_{1,2} = 1 \pm \sqrt{7.2}, x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{7.2}$$

Если x_1, x_2 являются целыми чл. пр., то $a_5 - a_4 = d$

$$\text{и } d=4, \Rightarrow a_1 + a_4 - 3d = 1 - 12 = -11, a_2 = -13$$

Аналог. Если $d = -1 - 3 = -4$, Т.О. проясна с 1-м

первым членом - целочисл., а со вторым - нет.

Ответ: только а не б



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3} \quad a_5 - a_4 = d = \pm d = \pm \sqrt{3} \quad 2\sqrt{3} \Rightarrow a_1 = a_4 - 3d = 1 - \sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 1 - 7\sqrt{3}$$

$$16 - 2x^2 - 4x - 108 - 16 - 9 = x^2 - 2x - 79 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{81} = 1 \pm 9\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a_7 - a_2 = 5d \Rightarrow d = 2\sqrt{3} \Rightarrow a_1 = a_2 - d = 1 - 7\sqrt{3}$$

$$\text{Тогда } a_1 = 1 - 7\sqrt{3}, d = 2\sqrt{3}; a_2 = 1 - 5\sqrt{3}, a_4 = 1 - \sqrt{3}, a_5 = 1 + \sqrt{3},$$

$$a_7 = 1 + 9\sqrt{3}$$

$$\text{Ответ: } a = 2$$



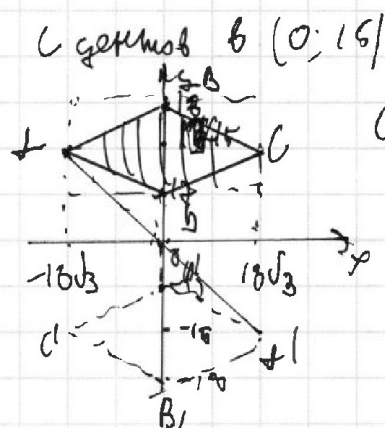
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

Найдите сумму площадей $\triangle$ по рис.



Она задается уравнением

$$y = 12 + \frac{x}{6\sqrt{3}}, \quad x \in [0, 18\sqrt{3}]$$

$$y = 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}, \quad x \in [-18\sqrt{3}, 0]$$

$$y = (15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}), \quad x \in [0, 18\sqrt{3}]$$

$$y = (12 - \frac{x}{6\sqrt{3}}), \quad x \in [-18\sqrt{3}, 0]$$

Заметим, что $OA^2 = 18^2 \cdot 3 + 15^2 \Rightarrow OB^2 = 18^2 \Rightarrow OA \perp OB \perp OA'$

Нам поворот в O , переводящий A в A' - заметим на окружности

с радиусом OA , A этот же поворот, переводящий B в B' , заметим на окружности с радиусом OB .

Итак, мы свели площадь $\triangle$ к площади полукруга $\triangle$ $+ S_{A'B'C'}$.

$$S_{\text{полукруга}} = \frac{1}{2}(\pi \cdot OA^2 - \pi \cdot OB^2) = \frac{\pi}{2}(OA^2 - OB^2) = \frac{\pi}{2}(18^2 \cdot 3 + 15^2 - 18^2) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot 9(108 + 15 - 18) = 4,5\pi \cdot 107$$

$$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot 30\sqrt{3} \cdot 6 = 108\sqrt{3}$$

Ответ: $108\sqrt{3} + 4,5 \cdot 107\pi$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

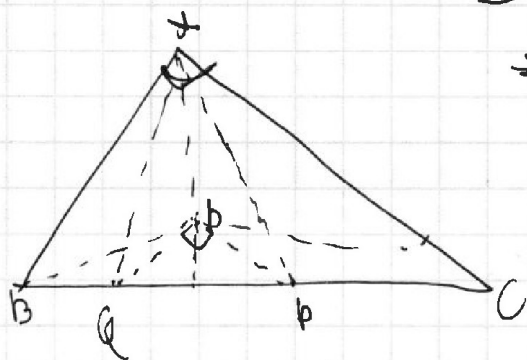
6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7



$$\triangle BDP \text{ и } \triangle CDP - \text{прям.}$$

$$\Rightarrow \angle BDP = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}$$

$$\angle CDP = 90^\circ - \frac{\angle C}{2}$$

$$\Rightarrow \angle QDP = 180^\circ - (90^\circ + 90^\circ) + \frac{\angle B + \angle C}{2} = \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 45^\circ$$

Точка D равноудалена от Q и P $\Rightarrow D$ лежит на

сер-пере к QP, т.к. $\angle QDP = 2\angle A + P$, то на сер-пере

и QP $\exists$ (сер-а) точки с такими св-вами $\Rightarrow D$ - центр

окр., опис. $\triangle QAP \Rightarrow D$ лежит на сер-пере к AP, то

$$\triangle BDP - \text{прям.} \Rightarrow \angle BDP = 90^\circ - \frac{\angle B}{2} \Rightarrow \angle B = 2\angle DBP \Rightarrow 30^\circ$$

$$\text{т.к. } D \text{ на сер-е } \angle C \Rightarrow \angle DCB = \frac{1}{2} \angle C = \frac{30^\circ - 30^\circ}{2} = 15^\circ$$

Ответ: 15°



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$$M = (x+y)^2 r (y+z)^2 r (z+x)^2$$

$$① \quad xy = 4z + z^2$$

$$② \quad yz = 4x + x^2$$

$$③ \quad zx = 4y + y^2$$

вычитаем из ① ②

$$y(x-z) = y(z-x) r (z-x)(x+z) = (z-x)(x+z+y)$$

$$\Rightarrow (x-z)(z-x)(x+z+y) = 0$$

I Если $z=x$ то в ③: $z^2 = 4y + y^2$. Вычитаем из ① ③

$$\text{получим } (x-y)(-z+x+y+4) = 0, \text{ если } x=y=z, \text{ то } z^2 = z^2 + 4z \Rightarrow z=0$$

тогда $M = 4^2 \cdot 3 = 48$

Если $x \neq z \neq y$ тогда $2z = y - 4, z^2 = 4y + y^2$

$$\Rightarrow \left(\frac{y-4}{2}\right)^2 = 4y + y^2, \frac{y^2}{4} - 2y + 4 = 4y + y^2; \frac{y^2}{4} - 6y + 8 = 0; D = 36 - 8 = 28$$

$$2y + 6 = 15, y = \frac{-3 \pm \sqrt{15}}{3} \cdot 4 = \frac{-12 \pm 4\sqrt{15}}{3} \Rightarrow z = \frac{-12 \pm 4\sqrt{15}}{6} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{15}}{3}$$

$$= \frac{-12 \pm 4\sqrt{15}}{3} = x \Rightarrow M = \begin{cases} 2\left(\frac{4\sqrt{15}-8}{3}\right)^2 + (4\sqrt{15})^2, y = \frac{-3+\sqrt{15}}{3} \cdot 4 \\ 2\left(\frac{-4\sqrt{15}-8}{3}\right)^2 + (4\sqrt{15})^2, y = \frac{-3-\sqrt{15}}{3} \cdot 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \begin{cases} 32\left(\frac{15-2\sqrt{15}-4}{9}\right) + 15 \cdot 16 = \frac{32 \cdot 11}{9} - \frac{64 \cdot 2\sqrt{15}}{9} + 15 \cdot 16 \\ 32\left(\frac{15+2\sqrt{15}-4}{9}\right) + 15 \cdot 16 = \frac{32 \cdot 11}{9} + \frac{64 \cdot 2\sqrt{15}}{9} + 15 \cdot 16 \end{cases}$$

II

Если $x \neq z$ и $y \neq z$ и $x \neq y$ (из симметричности системы, мы

получим, тогда M) то $\begin{cases} x+z+y=0 \\ x+y+z=0 \\ z+y+x=0 \end{cases} \Rightarrow x+y+z=0$

$$y = \frac{5+y}{2} \Rightarrow z = x$$

$$\Rightarrow y = -12$$

$$x+z+z=-4$$

$M=0$ но такое быть не может, т.к. $x \neq z$ по условию II

$$16^2 \checkmark$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

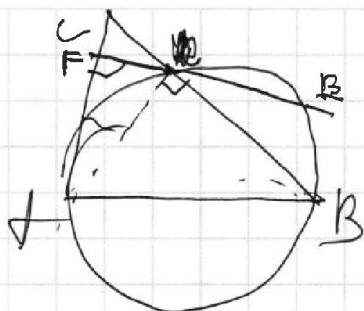
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 - (a^2 - a|x + \frac{2-a^2}{3}) = 0$$

$$a_1, a_2, a_3$$

$$4: a_1 + 3d$$

$$2: a_1 + d$$

$$5: a_1 + 4d$$

$$7: a_1 + 6d$$

$$\begin{cases} xy = 4x + x^2 \\ x^2 = 4y + y^2 \end{cases}$$

$$x(x-y) = y(y-x)$$

$$(x-y)(x+y) = 0$$

$$y = -x$$

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{2}$$

$$2a^2 - 2a = a^3 - a^2 \quad -4x = 4x + x^2$$

$$x^2 = -8$$

$$8a^2 - a^3 - 3a^2 + 2a = 0$$

$$a(a-1)(a-2) = 0$$

$$a = 0, 1, 2$$

$$\left(-5 - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right) + \left(-5 - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right) \leq 0$$

$$\left|5 + 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|5 + 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 8$$

$$(10^{10} - 1) \cdot 3 = 10^9 - 3 \cdot 10^6 + 3 \cdot 1000 - 1$$

$$= 999 \cdot 999 \cdot 999$$

$$999 \cdot 999 \cdot 999$$

$$999 \cdot 999 \cdot 999$$

$$999 \cdot 999 \cdot 999$$

$$999 \cdot 999 \cdot 999$$

$$999 \cdot 999 \cdot 999$$

$$999 \cdot 999 \cdot 999$$

$$999 \cdot 999 \cdot 999$$

$$999 \cdot 999 \cdot 999$$

$$999 \cdot 999 \cdot 999$$

$$999 \cdot 999 \cdot 999$$

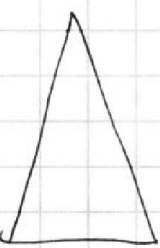
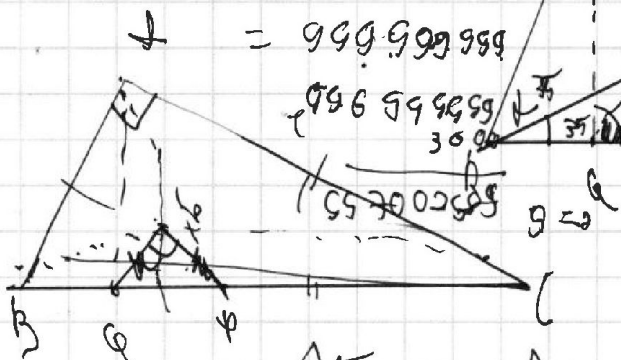
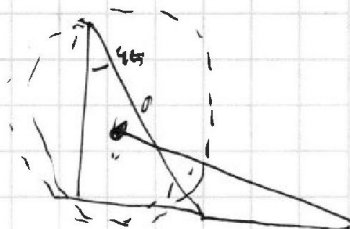
$$999 \cdot 999 \cdot 999$$

$$999 \cdot 999 \cdot 999$$

$$999 \cdot 999 \cdot 999$$

$$999 \cdot 999 \cdot 999$$

$$999 \cdot 999 \cdot 999$$



$$\begin{aligned} \angle BCF &= 90^\circ - \beta - \alpha - 3^\circ \\ &= 55^\circ 45' \\ \angle APB &= 90^\circ - \frac{25^\circ 30'}{2} \\ \angle AQP &= \frac{180^\circ - (90^\circ - 30^\circ)}{2} = \frac{90^\circ + 30^\circ}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle APQ &= 180^\circ - (\angle APB + \angle AQP) = 180^\circ - 135^\circ \\ &= 45^\circ \end{aligned}$$