



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



- ✗ [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

$xy = 4z + z^2$
 $xy^2 + 4y + 16$
 $xy^2 - 4xy$

$xy = -x^2 - y^2$
 $xy + y^2 + 2x = 0$
 $xy + 4y + 16 - 4x - y^2 = 0$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

- ✗ [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?

- ✗ [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.

4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.

6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.

- ✗ [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC = 35^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 & (1) \\ yz = 4x + x^2 & (2) \\ zx = 4y + y^2 \end{cases} \text{ ограничения: } x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$$

(1) $xy = 4z + z^2$: $x \neq 0$, т.к. $x \neq 0$ по условию

$$y = \frac{4z + z^2}{x}$$

Подставим $y = \frac{4z + z^2}{x}$ в (2), получим $\left(\frac{4z + z^2}{x}\right) \cdot z = 4x + x^2$

$$\frac{z^2(z+4)}{x} = x(x+4) \quad | \cdot x \neq 0$$

$$z^2(z+4) = x^2 x^2(x+4)$$

$$z^3 + 4z^2 = x^3 + 4x^2$$

$$z^3 - x^3 = 4x^2 - 4z^2$$

$$(z-x)(z^2 + zx + x^2) = 4(x-z)(x+z)$$

~~Рассмотрим случай, если $x \neq y, y \neq z, z \neq x$~~

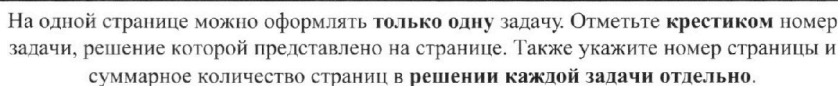
~~Аналогично, можно получить, что $(y-x)(y^2 + yx + x^2) = 4(y-z)(y+z)$ и $(y-z)(y^2 + yz + z^2)$~~

Рассмотрим случай, если $x \neq y, y \neq z, z \neq x$, тогда

имеем, $(z-x)(z^2 + zx + x^2) = 4(x-z)(x+z) \quad | : (z-x) \neq 0$, т.к. $z \neq x$

$$z^2 + zx + x^2 = -4(x+z) \quad (3)$$

т.к. $x \neq y$, то $x-y \neq 0$. т.к. $x-y \neq 0$, то аналогично, можно



СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Then we have:
$$\begin{cases} z^2 + 2x + x^2 = -4(z+x) & (5) \\ y^2 + xy + x^2 = -4(y+x) & (6) \end{cases}$$

$$(3)-(4): (2^2+2x+x^2)-(y^2+xy+x^2) = -4(2+x) - (-4(y+x))$$

$$z^2 - y^2 + 2x - xy = -1(2 + x - y - x)$$

$$(z-y)(z+y) + (z-y)x = -4(z-y) \quad | : (z-y) \neq 0, \text{ m. k. } z \neq y$$

$$z + y + x = -4 \quad | -y - x$$

$$Z = -x - y - x$$

Подставим $z = -4 - y - x$ в (1), получим $xy = 4 \cdot (-4 - y - x) + (-4 - y - x)^2$

$$xy = \underline{-16 - 4y - 4x + 16 + y^2 + x^2 + 2yx + 8y + 8x}$$

$$xy = 1y + 4x + y^2 + x^2 + 2xy \quad / -xy$$

$$0 = 4y + 4x + (y^2 + x^2 + xy)/5$$

Из (4) имеем, что $y^2 + xy + x^2 = -p(y+x)$. Подставим

 ~~$y^2 + xy + x^2 = -4(x+y)$ в 15), получим $0 = 4y + 4x - 4(y+x)$,~~

что правда, т.е. для ~~всех~~ ^{любых, т.е. для} $x, y, z \neq 0$, и $x+y+z = -4$,
являются решениями данной системы.

Maka $(x+y)^2 + (y+y)^2 + (z+y)^2 = (x+y)^2 + (y+y)^2 + (-y-y-x+y)^2 =$
 $= (x+y)^2 + (y+y)^2 + (-y-x)^2 = x^2 + 8x + 16 + y^2 + 8y + 16 + y^2 + x^2 + 2xy =$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1
☒2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$= 2(x^2 + y^2 + xy) + 8(x+y) + 32 = 2 \cdot (-4(y+x)) + 8(x+y) = 32$$

И.е. если решением данной системы является тройка чисел

(x, y, z) , где $x \neq y, y \neq z, z \neq x$, то $(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = 32$.
Если не выполнено условие $x \neq y$ и $y \neq z$ и $z \neq x$, тогда

были бы равны, не учитывая общности, $x = y$, то подставим $y = x$ в (1) и (2), получим систему
$$\begin{cases} x^2 = 4z + z^2 & (6) \\ xz = 4x^2 + x^2 & (7) \end{cases}$$

$$(7): xz = 4x + x^2 / : x \neq 0$$

$$z = 4 + x$$

Подставляем $z = 4 + x$ в (6), получаем $x^2 = 4(4+x) + (4+x)^2$

$$x^2 = 16 + 4x + 16 + x^2 + 8x / -x^2$$

$$0 = 32 + 12x / : 4$$

$$0 = 8 + 3x / -8$$

$$3x = -8$$

$$x = -\frac{8}{3}$$

Значит, что $x = y = -\frac{8}{3}, z = \frac{4}{3}$ является решением данной системы.

$$\text{Тогда } z = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}, y = x = -\frac{8}{3}. \text{ Тогда } (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} + \frac{16}{9} + \frac{256}{9} = \frac{288}{9} = 32.$$

То есть, если не выполнено условие $x \neq y$ и $y \neq z$ и



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$z \neq x, \text{ то } (x+4)^2 + (z+4)^2 + (y+4)^2 = 32.$$

Ноже а рассматривая случаи, когда ^{были} ~~были~~ числа x, y, z подходят под описанное выше условие, то $(x+4)^2 + (z+4)^2 + (y+4)^2 = 32$, а если не подходят, то $(x+4)^2 + (z+4)^2 + (y+4)^2 = 32$. Т.к. данная система имеет хотя бы одно решение в натуральных числах, то $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = 32$.

Ответ: 32



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $x = 25000$. ~~Число~~ П.к. десятичная запись n состоит из $x = 25000$ девяток, то $n = 10^x - 1$.
 $n^3 = (10^x - 1)^3 = 10^{3x} - 3 \cdot 10^{2x} + 3 \cdot 10^x - 1 = (10^{3x} - 1) - 3 \cdot 10^{2x} + 3 \cdot 10^x$

Десятичная запись числа $10^{3x} - 1$ состоит из $3x$ девяток. Десятичная запись числа $3 \cdot 10^{2x}$ состоит из одной тройки и $2x$ нулей, стоящих после неё. Вычтем столбиком из числа $10^{3x} - 1$ число $3 \cdot 10^{2x}$.

$$\begin{array}{r} \underbrace{99 \dots 99}_{x} \underbrace{99 \dots 9}_{2x} \\ - \underbrace{300 \dots 0}_{2x} \\ \hline \underbrace{9 \dots 99}_{x-1} \underbrace{699 \dots 9}_{2x} \end{array}$$

Десятичная запись числа $(10^{3x} - 1 - 3 \cdot 10^{2x})$ состоит из $x-1$ девяток, идущих подряд, стоящей после них шестёрки, стоящих после шестёрки $2x$ подряд идущих девяток.

Десятичная запись числа $3 \cdot 10^x$ состоит из одной тройки и идущих подряд x нулей, стоя-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☒☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Итак после неё: сложим столбиком числа

$$10^{3x} - 1 - 3 \cdot 10^{2x} \text{ и } 3 \cdot 10^x :$$

$$\begin{array}{r} + \underbrace{99 \dots 9}_{x-1} \underbrace{6,99 \dots 9}_{x-1} \underbrace{9,99 \dots 9}_{x-1} \\ \quad \quad \quad \underbrace{3,00 \dots 0}_x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underbrace{99 \dots 9}_{x-1} \underbrace{7,00 \dots 0}_{x-1} \underbrace{0,99 \dots 9}_x \end{array}$$

Десятичная запись числа $10^{3x} - 1 - 3 \cdot 10^{2x} + 3 \cdot 10^x$ состоит из $2x-1 = 2 \cdot 25000 - 1 = 49999$ девяток.

Ответ: 49999



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

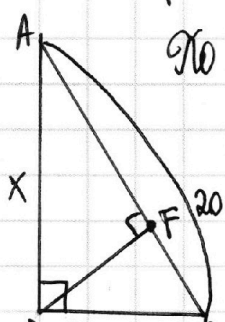


СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$= \sin \angle ADF$, т.е. $\sin \alpha = \sin 20$; Ранее я получила, что $\sin \alpha = \frac{5\sqrt{5}}{15}$. Тогда $\sin \alpha = \frac{AD}{AC}$ и $\sin \alpha = \frac{5\sqrt{5}}{15} \Rightarrow \frac{20}{x} = \frac{x}{15} \Rightarrow x^2 = 15 \cdot 20 \Rightarrow x = 5\sqrt{3}$; $\frac{AF}{AD} = \frac{5\sqrt{5}}{15}$;

Рассмотрим $\triangle ADC$.



По м. Пифагора для прямоугольного $\triangle ADC$ $DC^2 + AD^2 = AC^2$

$$DC = \sqrt{AC^2 - AD^2}$$

$$DC = \sqrt{400 - x^2}$$

т.к. $\angle DAF = \angle DAC$, $\angle AFD = \angle ADC$; то $\triangle AFD \sim \triangle ADC \Rightarrow$

$$\frac{AF}{AD} = \frac{AD}{AC} = \frac{DF}{DC} \Rightarrow DF = \frac{AD}{AC} \cdot DC = \frac{20}{x} \cdot \sqrt{400 - x^2};$$

По м. Пифагора для прямоугольного треугольника $\triangle AFD$

$$AF^2 + DF^2 = AD^2 \Rightarrow AF = \sqrt{AD^2 - DF^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2(400 - x^2)}{400}}$$

Ранее я получила, что $\frac{AF}{AD} = \frac{5\sqrt{5}}{15} \Rightarrow \frac{AF^2}{AD^2} = \frac{5}{9}$

$$\frac{AF^2}{AD^2} = \frac{x^2 - \frac{x^2(400 - x^2)}{400}}{x^2} = 1 - \frac{400 - x^2}{400} = \frac{x^2}{400}$$

Тогда $\frac{x^2}{400} = \frac{5}{9} \Rightarrow x^2 = \frac{400 \cdot 5}{9} \Rightarrow x = \frac{20\sqrt{5}}{3}$, т.к. $x > 0$, т.к. x —

длина отрезка. Тогда $AF = \sqrt{x^2 - \frac{x^2(400 - x^2)}{400}} = x \sqrt{\frac{x^2}{400}} = \frac{x^2}{20} =$

$$= \frac{400 \cdot 5}{9 \cdot 20} = \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}, \text{ т.к. } x > 0, \text{ т.к. } x \text{ — длина отрезка}$$

Ответ: $11\frac{1}{9}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть всего x коробок.

Василии знает, если шар ^{указывает} ~~может упасть~~ 5 коробок и ~~открыть их~~ ~~если не~~.

Василии считает вероятность выигрыша.

Всего C_x^5 вариантов выбрать 5 коробок.

Василии считает количество вариантов, когда шарок выигрывает. Он выигрывает тогда и только тогда, когда выбрал три коробки, в каждой из которых лежит шар и ещё какие-то 2 коробки из оставшихся $(x-3)$ коробок, в которых не лежит шар. Тогда т.к. выигрывает ровно в 3 коробки положили шар то, чтобы выиграть и эти 3 коробки должны быть

обязательно указаны шариками. Тогда количество вариантов, в которых шарок выигрывает равно количеству вариантов ^{указать} ~~выбрать~~ ~~какие-то~~ 2 коробки из $(x-3)$ коробок, в которых не лежит шарик, т.е. C_{x-3}^2 . Тогда вероятность



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

вероятность равна $\frac{C_{x-3}^2}{C_x^5}$;

Рассмотрим случай, когда игрок ^{указывает} разрешен ~~выбрать~~ 8 коробок.

Всего считаем вероятность выигрыша.

Количество вариантов выбрать 8 коробок равно C_x^8 .

П.к. ведущий несет по 1 шару ровно в 3 коробки, то чтобы выиграть игрок обязательно должен указать эти 3 коробки. Тогда количество вариантов, в которых игрок выигрывает равно количеству вариантов ^{указ} ~~как~~ выбрать 5 коробок из $(x-3)$ коробок, в которых ^{не} несет шарик, т.е. C_{x-3}^5 . Тогда вероятность выигрыша равна $\frac{C_{x-3}^5}{C_x^8}$. Тогда вероятность выигрыша возрастает в $\frac{C_{x-3}^5}{C_x^8} \cdot \frac{C_{x-3}^2}{C_x^5} =$

$$= \frac{C_{x-3}^5 \cdot C_x^5}{C_x^8 \cdot C_{x-3}^2} = \frac{(x-3)(x-4) \cdot \dots \cdot (x-7)}{5!} \cdot \frac{x(x-1) \cdot \dots \cdot (x-4)}{5!} = \frac{1}{5!} \cdot \frac{C_{x-3}^5 \cdot C_{x-3}^2}{C_x^5} =$$

$$= \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2!} = \frac{8! \cdot 8!}{5! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{7 \cdot 4}{5} = \frac{28}{5} = 5\frac{3}{5} \text{ раз. Ответ: } 5\frac{3}{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☒☐☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2 - a^3}{3} = 0$$

$$D_1 = (a^2 - a)^2 - 4 \frac{(2 - a^3)}{3}$$

$$2) 2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$$

$$D_2 = (a^3 - a^2)^2 + 8(2a^6 + 8a + 4)$$

Заметим, что корни 1-го уравнения отличаются на $\sqrt{D_1}$, а корни 2-го на $\sqrt{D_2}$

~~Чтобы~~ найти ~~с~~ ~~необ~~ Тогда разность арифметической прогрессии равна $\pm \sqrt{D_1}$. Если с другой стороны разность равна $\frac{\sqrt{D_2}}{2-5}$

Тогда, чтобы найти разность нужно решить $\sqrt{D_2} = \frac{\sqrt{D_1}}{10}$ и проверить подходит ли $\sqrt{D_2} = -\sqrt{D_1}$ это реш-е из ОДЗ.

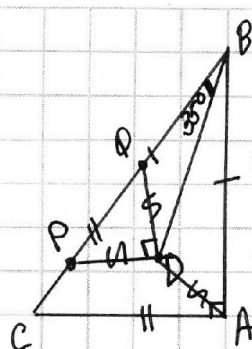


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\angle PQD = \angle PDQ = 45^\circ$, т.к. $\triangle PQD$ — равнобедренный треугольник, где $PQ = PD$ и $\angle QPD = 90^\circ$. Пусть $\angle ABC = d \Rightarrow \angle BCA = 180^\circ - \angle ABC - \angle CAB = 180^\circ - d - 90^\circ = 90^\circ - d$.

т.к. $\triangle PBA$ — равнобедренный треугольник с основанием PA и $\angle PBA = d$, то $\angle BPA = \angle BAP = 90^\circ - \frac{d}{2}$;

т.к. $\triangle QCA$ — равнобедренный треугольник с основанием QA и $\angle QCA = 90^\circ - d$, то $\angle CQA = \angle CAQ = 45^\circ + \frac{d}{2}$;

$$\angle BQA = 180^\circ - \angle CQA = 180^\circ - (45^\circ + \frac{d}{2}) = 135^\circ - \frac{d}{2};$$

$$\angle CPA = 180^\circ - \angle BPA = 180^\circ - (90^\circ - \frac{d}{2}) = 90^\circ + \frac{d}{2};$$

$$\angle QAB = 180^\circ - \angle AQB - \angle ABQ = 180^\circ - (135^\circ - \frac{d}{2}) - \angle PBA = 180^\circ - (135^\circ - \frac{d}{2}) - d = 45^\circ + \frac{d}{2} - d = 45^\circ - \frac{d}{2};$$

$$\angle PAQ = \angle PAB - \angle QAB = 90^\circ - \frac{d}{2} - (45^\circ - \frac{d}{2}) = 45^\circ.$$

Рассмотрим $\triangle PQA$, заметим, что угол $\angle PQA = 90^\circ$ в

2 раза больше угла $\angle PAQ = 45^\circ$, а $\angle PQA = 90^\circ$ и $PQ = QA \Rightarrow$

$\Rightarrow D$ — центр описанной окружности $\triangle PQA \Rightarrow PD =$

$$= QD = DA \text{ и } \angle QDA = 2\angle QPA = 2\angle BPA = 2 \cdot (90^\circ - \frac{d}{2}) = 180^\circ - d.$$

Тогда $\angle QDA = 180^\circ - d$ и $\angle QBA = d \Rightarrow \angle QDA + \angle QBA = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \square QDAB$ — вписанный четырехугольник. Аналогично, докажем

то, что $\square QDAB$ — вписанный четырехугольник,

получим, что $\square PDAC$ — вписанный четырехугольник.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle DQA = \angle AQC - \angle CQD = (45^\circ + \frac{\alpha}{2}) - \angle PQD = (45^\circ + \frac{\alpha}{2}) - 45^\circ = \frac{\alpha}{2};$$

т.к. четырехугольник QDAB вписанный, то $\angle DBA = \angle DQA = \frac{\alpha}{2}$; $\angle CBA = \angle DBA + \angle DBC = \frac{\alpha}{2} + 35^\circ$; Также $\angle ABC = \alpha$;

$$\text{Тогда } \frac{\alpha}{2} + 35^\circ = \alpha \Rightarrow \alpha = 70^\circ.$$

$$\angle PAC = 180^\circ - \angle PCA - \angle CPA = 180^\circ - \angle BCA - \angle CPA = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \frac{\alpha}{2}) - (90^\circ + \frac{\alpha}{2}) \\ = \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2};$$

т.к. ~~точка P, D, A~~ четырехугольник PDAC - вписанный, то

$$\angle PDA = \angle PDC = \angle PAC = \frac{\alpha}{2}, \angle BDC = \angle PDC + \angle PDQ + \angle QDB =$$

$$= \frac{\alpha}{2} + 90^\circ + \angle QDB = \frac{\alpha}{2} + 90^\circ + \angle QAB, \text{ т.к. четырехугольник QBAD - вписанный. Тогда } \angle BDC = \frac{\alpha}{2} + 90^\circ + \angle QAB = \frac{\alpha}{2} + 90^\circ + 45^\circ - \frac{\alpha}{2} = 135^\circ.$$

$$\angle DCB = 180^\circ - \angle DBC - \angle CDB = 180^\circ - 35^\circ - 135^\circ = 10^\circ.$$

Ответ: 10°



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

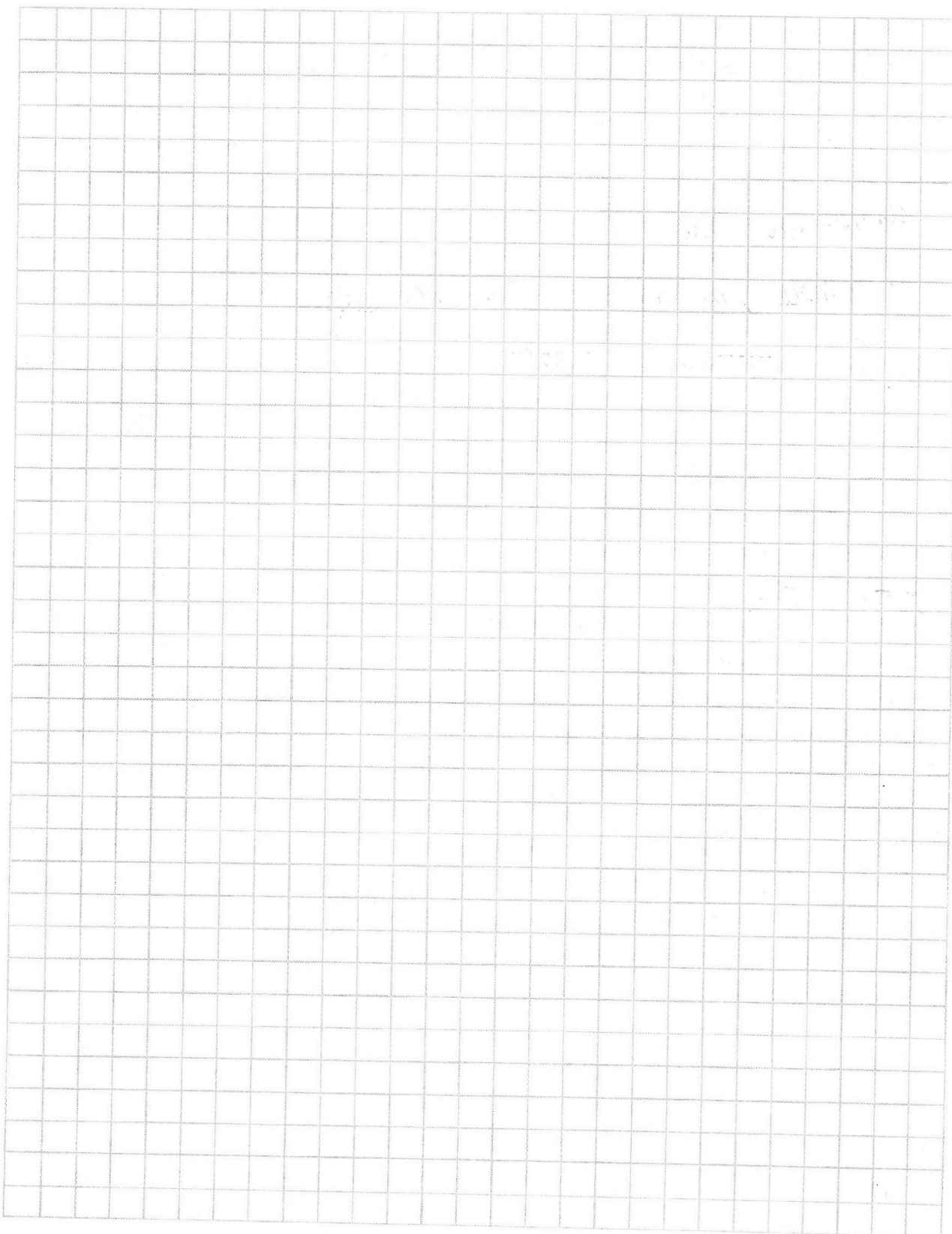
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☐ 5

☐ 6

☐ 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(a^2-a)^2 - \frac{4(2-a^3)}{3} = \frac{(a^3-a^2)^2 + 8(2a^6+8a+4)}{3} \quad \frac{2(2-a^3)(-a^3) + 4a+6}{a^6+4a+2}$$

$$a^4+a^2-2a^3 - \frac{8-4a^3}{3} = \frac{(a^6+a^3-2a^3)+16a^6+64a+32}{3}$$

$$(12a^4) + (12a^6) - 8a^3 - 32 + 16a^6 = 3a^6 - 8a^5 + 3a^4 + 192a + 96$$

$$51a^6 - 6a^5 - 9a^4 + 8a^3 - 12a^2 + 192a + 128 = 0$$

$$(51 + 6) - 9 - 8 - 12 - 192 + 128$$

$$2x^2 - (a^3-a^2)x - 2a^6-8a-4=0$$

$$D_2 = (a^3-a^2)^2 + 8(2a^6+8a+4)$$

$$D_1 = \frac{D_2}{100}$$

$$(a^2-a)^2 - \frac{4(2-a^3)}{3} = \frac{(a^3-a^2)^2 + 8(2a^6+8a+4)}{100}$$

$$300(a^2-a)^2 - 400(2-a^3) = 3(a^3-a^2)^2 + 24(2a^6+8a+4)$$

$$300a^4 - 200a^3 + 300a^2 - 800 =$$

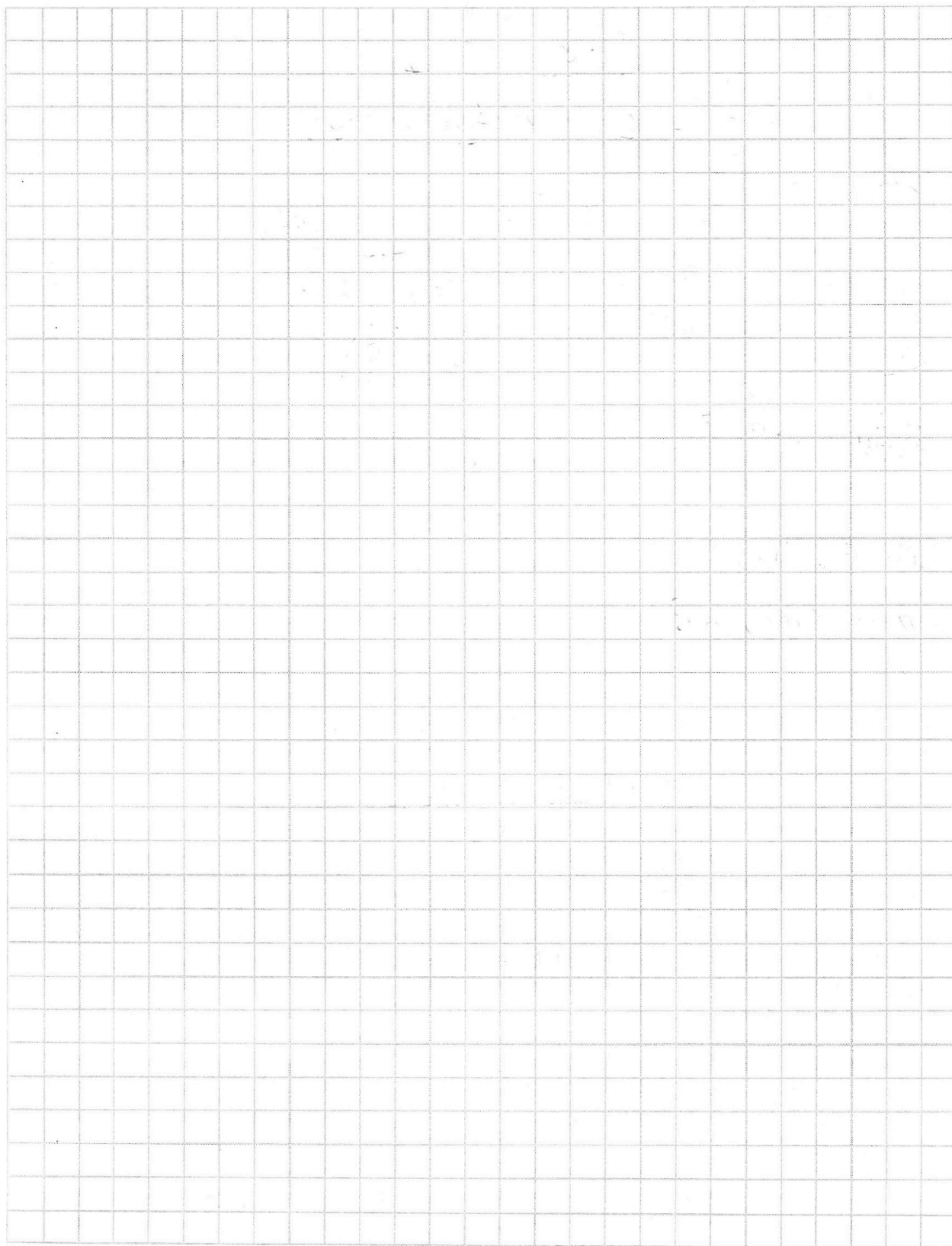


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



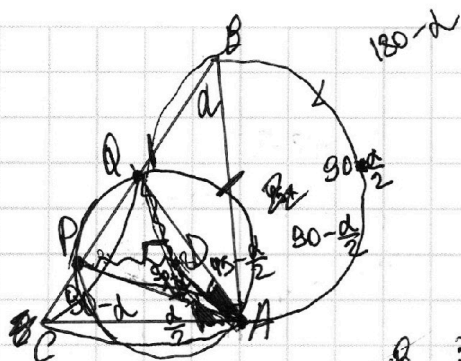


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

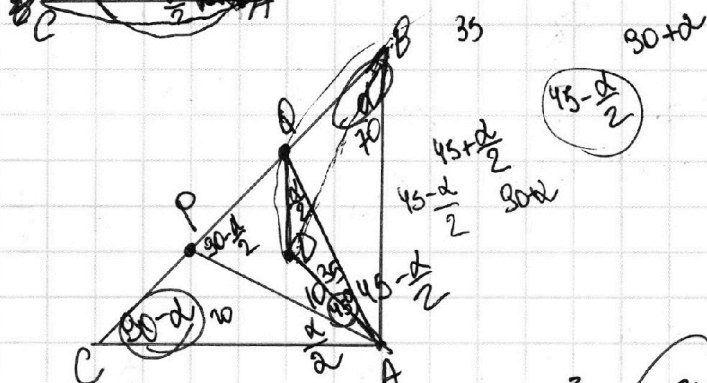
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle QAB = 45^\circ - \frac{d}{2}$$

$$\angle PAC = 180^\circ - 90^\circ + d - 90^\circ - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}$$



$$C_x: 12 = \frac{99 \dots 9}{25x} \quad 10^{25-10} \cdot 1$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56 \quad 10 \cdot \frac{56}{a}$$

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10 \quad \times 100x$$

$$\frac{C_x^3}{C_x^3} \cdot \frac{C_{x-3}^2}{C_x^2} \cdot \frac{C_{x-3}^5}{C_x^5} \cdot \frac{C_{x-3}^8}{C_x^8} = 5$$

$$(x-2)(x-1)x$$

$$x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$$

$$D_1 = (a^2 - a)^2 - 4 \cdot \frac{2-a^3}{3} = a^4 - 2a^3 + a^2 - \frac{8}{3} + \frac{4a^3}{3} = \frac{a^4 - 2a^3 + a^2 - 8 + 4a^3}{3}$$

$$a^2 - a \pm \sqrt{\frac{a^4 - 2a^3 + a^2 - 8 + 4a^3}{3}}$$

$$\sqrt{D_1} = \frac{\sqrt{3(a^4 - 2a^3 + a^2 - 8 + 4a^3)}}{2} \quad a_1 = \frac{a^2 - a + \sqrt{D_1}}{2}$$

$$(10^x - 1)^3 = 10^{3x} - 3 \cdot 10^{2x} + 3 \cdot 10^x - 1$$

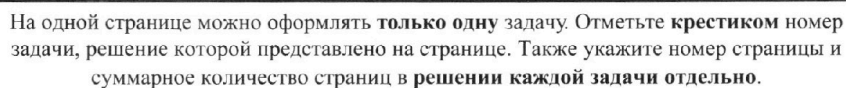
$$\underbrace{9 \dots 9}_{x} \dots \underbrace{9 \dots 9}_{x} \dots \underbrace{9 \dots 9}_{x} \dots 9$$

$$\underbrace{9 \dots 9}_{x} \dots \underbrace{9 \dots 9}_{x} \dots \underbrace{9 \dots 9}_{x} \dots 9$$

$$\rightarrow -5 \quad 3a^3 - 5a^2 + 8a - 8$$

$$(a+1)(a^3 - \frac{5}{3}a^2 + \frac{8}{3}a - \frac{8}{3})$$

$$\frac{1}{a^4} - \frac{2a^3}{3} + \frac{a^2}{3} - \frac{8}{3} = 3a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 8 = 3(a+1)(a^3 - \frac{5}{3}a^2 - \dots)$$



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!**

$$\frac{16}{9} = -\frac{16}{3} + \frac{16}{9}$$

$$x^2 = 48 + 2^2$$

$$\text{X2} \Delta \quad x^2 = 4x + x^2$$

$$Z = 4 + X$$

$$x^2 = 4(u+x) + (u+x)^2$$

$$\cancel{x^2} = 16 + 4x + 16 + 8x + \cancel{x^2}$$

$$32 + 12x = 0$$

$$x = \frac{-32}{12} = -\frac{8}{3}$$

$$x = y = -\frac{8}{3}$$

$$Z = \frac{4}{3}$$

$$2\left(-\frac{8}{3}+4\right)^2$$

$$32^2 + 82 + 16$$

$$\frac{16}{3} - \frac{64}{3} + 16$$

$$\frac{16}{2} + \frac{32}{3} + 16$$

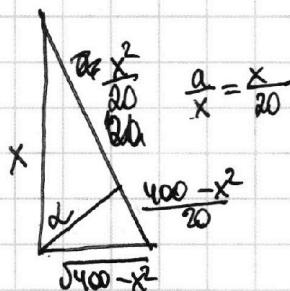
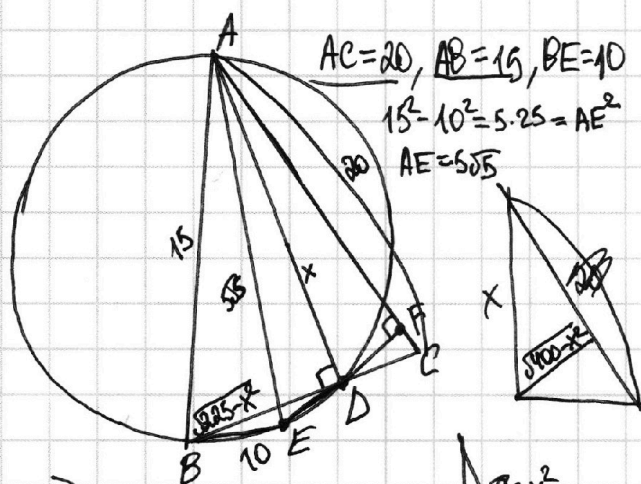
$$\sin \angle EDA = \frac{5\sqrt{5}}{15} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{5}$$

$$\frac{x^2}{20x} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$x = \frac{2055}{3}$$

$$AF = \frac{20^2 \cdot 5}{9 \cdot 20} = \frac{100}{9}$$



$$\frac{505}{2 \sin 45^\circ} = 7,5$$

$$\frac{525}{\text{SINLEDA}} = 15$$

$$\sin \angle EDA = \frac{5\sqrt{5}}{15} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{5}$$

$$\frac{x^2}{20x} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$x = \frac{2055}{3}$$

$$AF = \frac{20^2 \cdot 5}{9 \cdot 20} = \frac{100}{9}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 & (x+y)^2 + (y+y)^2 + (z+y)^2 \\ yz = 4x + x^2 & \text{прим. } x \\ zx = 4y + y^2 & \end{cases}$$

$$xy - 4y - 4x - y^2 - x^2 - 2xy = 0$$

$$(y+z) + (x+y) + (y+z+x)^2$$

$$a^2 + b^2 + (-8 - a - b)^2 = 0$$

$$a^2 + b^2 + (a^2 + b^2 + 64 + 2ab + 16a + 16b + 2ab) = 0$$

$$2a^2 + 2b^2 + 16(a+b) + 64 + 2ab = 0$$

$$x = \frac{4y+y^2}{2}$$

$$\left(\frac{4y+y^2}{2}\right)^2 + 2(4y+y^2) = yz$$

$$4y^2 + \frac{y^4}{2} + 2y^3 + 8y = yz$$

$$\frac{4y}{2} \frac{y^2}{2}$$

$$z^2 + 4z - xy = 0 \quad K$$

$$x^2 + 4x - yz = 0$$

$$y^2 + 4y - 2x = 0$$

$$(x+y+z)^2 - 3(xy+yz+zx) + 4(x+y+z) =$$

$$y(x+z) = 4(x+z) + z^2 + x^2$$

$$y(x+z+8+2y) = (x+z)(x+z+4)$$

$$y(2y+x+z+8) = (x+z)(x+z+4)$$

$$(x+y+z+4)(x+y+z+4)$$

$$(x+y+z+2)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 4(x+y+z) + 4 + 2(xy+yz+zx) = 3(xy+yz+zx) + 4$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4(x+y+z) + 4 + 2(z^2 + x^2 + y^2 + 4(x+y+z))$$

$$3(x^2 + y^2 + z^2) + 12(x+y+z) + 4 = 3(xy+yz+zx) + 4$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4(x+y+z) = xy + yz + zx$$

$$(x-y)(y-z)(z-x)$$

$$(x+y+z)^2 + 4(x+y+z) = xy + yz + zx + z^2 + 4z + y^2 + 4y + x^2 + 4x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$xy = 4z + z^2$$

$$y = \frac{4z + z^2}{x}$$

$$\frac{4z + z^2}{x} \cdot z = 4x + x^2$$

$$z^2(2+y) = x^2(x+y) = y^2(y+x)$$

$$x^3 + 4x^2 = y^3 + 4y^2$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 4(y-x)(y+x)$$

$$y = -4$$

$$x + y + 2 = -4$$

$$z^2 + 2x + x^2 = x + 2$$

$$2x = 4y + y^2$$

$$2x = 4(-4 - x - 2) + (-4 - x - 2)^2$$

$$2x = -16 - 4x - 42 + 16 + x^2 + 2x^2 + 8x + 82$$

$$y + x - x^2 - y^2 = 4z + z^2$$

$$x = y$$

$$x^2 = 4z + z^2$$

$$x^2 = 4x + x^2$$

$$2x = 4x + x^2$$

$$x^2 = 4z + z^2$$

$$2 = 4 + x$$

$$x^2 = 4(4+x) + (4+x)^2$$

$$x^2 = 16 + 4x + 16 + x^2 + 8x$$

$$0 = 32 + 12x$$

$$0 = 8 + 3x \quad x = -\frac{3}{8}$$

$$xy = 4(1-x-y) + (1-x-y)^2$$

$$(xy) = 4 - 4x - 4y + 1 + x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y$$

$$xy = 4$$

$$0 = x^2 + y^2 + xy - 6(x+y) + 5$$

$$y + x - 6(x+y) + 5$$

$$5(x+y) = 5$$

$$x + y = 1$$

$$x^2 + xy + y^2 = y + x \Rightarrow xy = y + x - x^2 - y^2$$

$$(x+y) \quad x^2 + x(y-1) + (y-1)y = 0 \quad y-1-4y$$

$$x = (y-1)^2 - 4(y-1)y = (y-1)(-3y-1)$$

$$x = \frac{1-y \pm}{2}$$

$$= \frac{1}{3} \quad 1$$

$$x^2 + xy + y^2 = y + x$$

$$(x+y)^2 = y + x + xy$$

$$x^2 + xy + y^2 - x - y = 0$$

$$(x-1)(y-1) + x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$(y-1)(x+y) + x^2 = 0$$

$$(x-x-y-2)^2$$

$$(y+z)^2 + (y+x)^2 + (x+z)^2$$

$$(y+z)^2 + (y+x)^2 + (z+y)^2 =$$

$$= 2y^2 + 2z^2 + 8y + 8z + 2yz + 32$$

$$y^2 + z^2 + 4y + 4z + yz + 16$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4(y+x+z) + 16$$

$$x^2 + xy + y^2 = x + y$$

$$x^2 + 2x + z^2 = x + 2$$

$$xy + y^2 - 2x + z^2 = y - 2$$

$$(y-2)(y+2+x) = y-2$$

$$y+2+x = 1$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 +$$

$$+ xy + yz + 2x = 2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy -$$

$$- yz - 2x$$

$$(x+y+z)^2$$