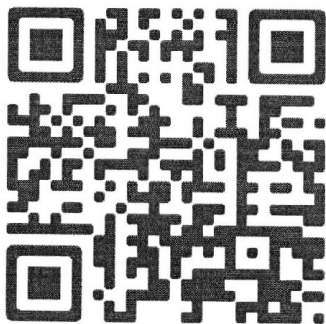




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Умножим $n \times n$: $\underbrace{9 \dots 9}_{40000} \times \underbrace{9 \dots 9}_{40000} = \underbrace{9 \dots 9}_{40000} \underbrace{80 \dots 0}_{10000}$
 $- \underbrace{9 \dots 9}_{40000}$ По правилам вычитания, в первом разряде останется 1, далее 39999 раз 0 и из первой «девятки» заимствуем 1. Имеем:
 $\underbrace{9 \dots 9}_{39999} \underbrace{80 \dots 0}_{39999} 1$ Умножим еще на n :
 $\underbrace{9 \dots 9}_{39999} \underbrace{80 \dots 0}_{39999} 1 \underbrace{0 \dots 0}_{40000} - \underbrace{9 \dots 9}_{40000}$ снова имеем в конце числа 1, 39999 нулей и из 1 отнимем 1. Остается $\underbrace{9 \dots 9}_{39999} \underbrace{80 \dots 0}_{80000}$
Итого 39999 девяток
Ответ: 39999



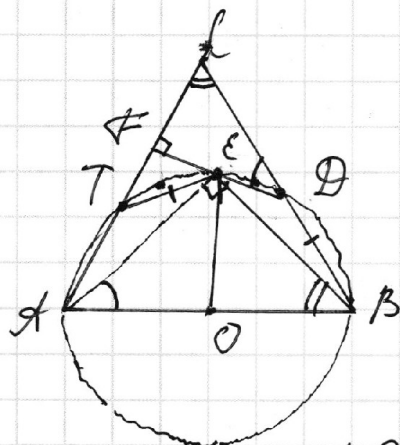
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



O - центр ω .

$$\angle AFD = \underbrace{\angle AD - \angle TE}_{\text{вн}} = \frac{\angle AD - \angle TE}{2} \Rightarrow$$

$$\angle TE = \angle DB \Rightarrow DB = TE$$

$$\text{Потому } \angle TD = \angle EB \Rightarrow$$

$$TD = BE = 5.$$

Потому как AB - диаметр, $\angle ADB = 90^\circ \Rightarrow$
 $\triangle ADC$ - прямоугольный. Потому как AC = 10, $TD = 5$, то $AT = TD = TC = 5$.

Потому как AEDB - вписанный, $\angle EAB = \angle FDC \Rightarrow \triangle FDC \sim \triangle AEB \Rightarrow \angle FCD = \angle EBA \Rightarrow \triangle AEB \sim \triangle ACD$.

Итак: $\triangle AEB \sim \triangle ACD: \frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow CD = \frac{25}{3}$.
 $\triangle FDC \sim \triangle AEB: \frac{CD}{FC} = \frac{AB}{BE} \Rightarrow FC = \frac{125}{18}$.
 Тогда $AF = 10 - \frac{125}{18} = \frac{180}{18} - \frac{125}{18} = \frac{55}{18} = 3\frac{1}{18}$.

Ответ: $3\frac{1}{18}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Посчитаем вероятность успешного успеха.
Пусть в игре n коробок. Успешные выборы - это 3 коробки с шариками того же цвета.
Но есть всего успехов $C_{n-3}^2 = \frac{(n-3)!}{2 \cdot (n-5)!}$.
Количество исходов всего: $C_n^5 = \frac{n!}{5! \cdot (n-5)!}$.

Когда в первом случае вероятность успеха:
$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{(n-3)! \cdot 5!}{2 \cdot n!}$$

Второй случай: аналогично первому, успешных событий - три случайно взятые коробки:
$$C_{n-3}^3 = \frac{(n-3)!}{6 \cdot (n-6)!}$$

Всего событий: $C_n^6 = \frac{n!}{6! \cdot (n-6)!}$

Вероятность успеха: $\frac{C_{n-3}^3}{C_n^6} = \frac{(n-3)! \cdot 6!}{n! \cdot 6} = \frac{(n-3)! \cdot 5!}{n!}$

Поделим вторую вероятность на первую:
очевидно, у первой знаменатель вдвое больше, значит, вероятность успеха вырастет в 2 раза.

Ответ: в 2 раза.

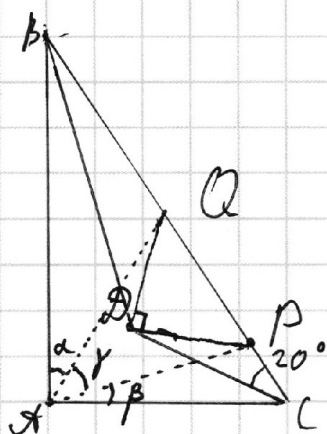


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle DCB = 20^\circ$$

$$\text{Так как } \angle PDQ = 90^\circ, \angle DQP = \angle DPQ = 45^\circ$$

$$\text{Пусть } \angle BAQ = \alpha; \angle QAP = \beta$$

и $\angle PAC = \beta$. Так как $\triangle ABP$ и $\triangle AQC$ равнобедренные, можем найти γ : $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$

$$\text{Из } \triangle ABP \text{ и } \triangle AQC: \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta + 180^\circ - 2\beta - 2\gamma = 360^\circ - 2\alpha - 2\beta - 4\gamma = 90^\circ.$$

$$2\alpha + 2\beta + 4\gamma = 270^\circ; \quad 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ$$

$\gamma = 45^\circ$. Возьмём окружность с центром D и радиусом DQ. $\angle QAP = 45^\circ \Rightarrow$

данная окружность описана около $\triangle APQ$.

Имеем: $AD = DQ = DP$. Тогда $\triangle ADC = \triangle QDC$ по трём сторонам. Аналогично $\triangle ABD = \triangle BDP$. Тогда $\angle ACB = 40^\circ$; $\angle ABC = 50^\circ$ и $\angle DBC = 25^\circ$

Ответ: 25°



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cancel{3x} \cdot 2(2+3) = xy$$

$$x(x+3) = y^2$$

$$y(y+3) = x^2$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (2+3)^2 = 3x - 3y - 3z - xy - xz - yz - 27 = 0$$

$$3x + 3y + 3z + xy + xz + yz + 27 = x^2 + y^2 + z^2 + (x+y+z)^2$$
$$= x(x+6) + y(y+6) + z(z+6) + 27$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (2+3)^2 = x(x+6) + y(y+6) + z(z+6) + 27$$

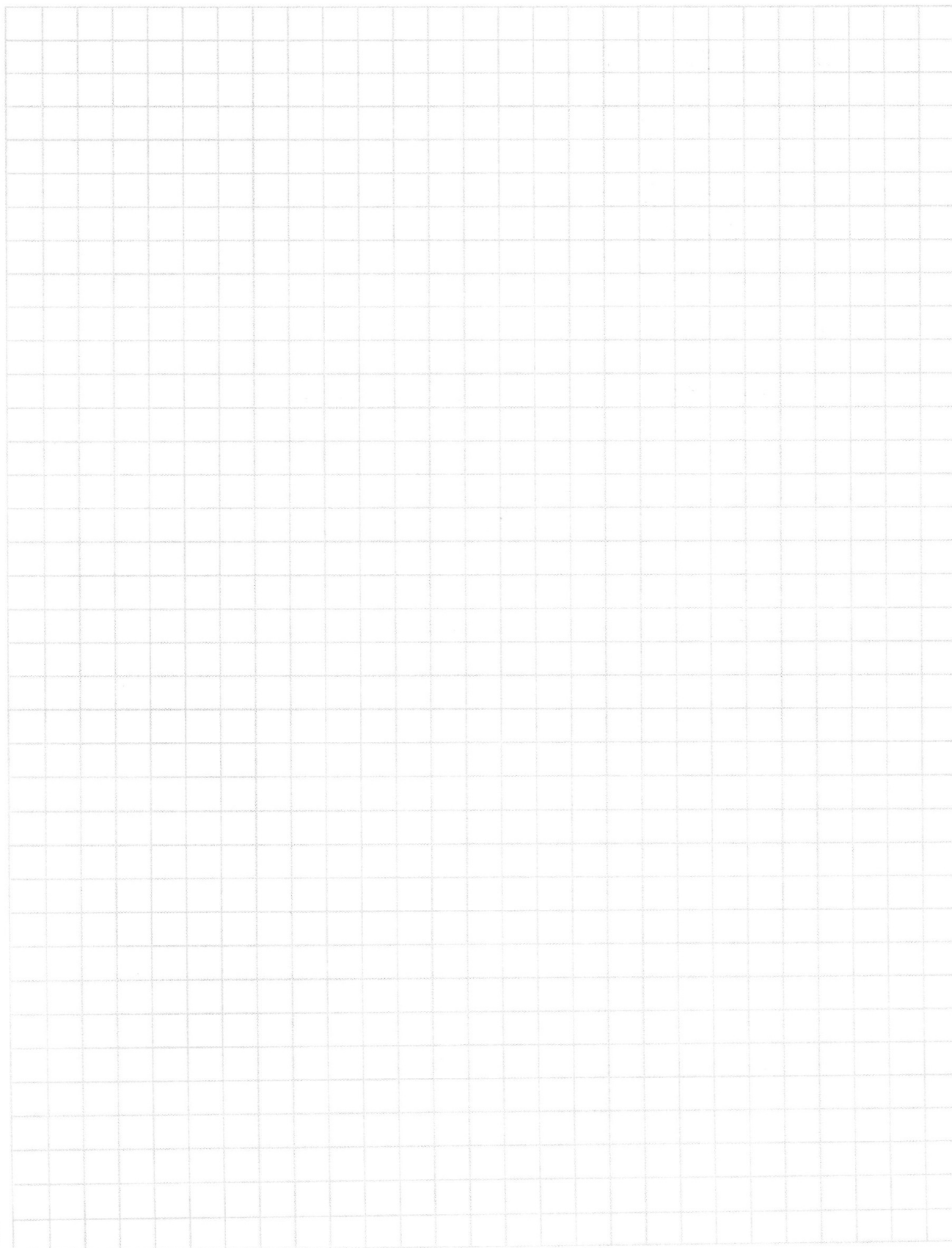


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$C_{n-3}^3 = \frac{n-3!}{3! \cdot (n-6)!} = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{6}$$

$$C_n^6 = \frac{n!}{6! \cdot (n-6)!}$$

$$\frac{C_{n-3}^3}{C_n^6} = \frac{\frac{(n-3)!}{3! \cdot (n-6)!}}{\frac{n!}{6! \cdot (n-6)!}} = \frac{\frac{n-3!}{6}}{\frac{n!}{6!}} = \frac{5!}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}$$

✓ 4 ✓

$$2^2 + x^2 + y^2 + 6x + 6y + 62 + 2x^2 =$$

$$\begin{cases} xy = 32 + 2^2 \\ y2 = 3x + x^2 \\ 2x = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$= 3x + 3y + 32 + xy + x2 + y2 + 2x^2$$

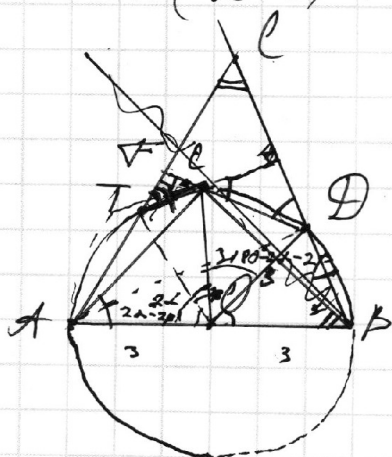
$$2^2 + x^2 + y^2 + 3x + 3y + 32 \leq x2 + y2 + 4xy$$

$$x^2 + y^2 + 2^2 + 3x + 3y + 32 = xy + y2 + x2$$

$$x^2 + y^2 + 2^2 + 2x^2 + 6xy + 6x2 + 6y2 = 2x^2 + 6xy + 6y2$$

$$2(2+3) + x(x+3) + y(y+3) \leq xy + x2 + y2$$

$$AC = \sqrt{11}$$



$$C = 4d$$

$$\angle AD + \angle TE = 180^\circ$$

$$\Rightarrow DB = TE \quad C = 3, 14 \cdot 6$$

$$DB^2 = 36 - AD^2 = \sqrt{36 - AD^2} = \sqrt{TF^2 + FE^2}$$

$$2x(2+3) + x(x+3) + y(y+3) \leq xy + y2 + x2 + 2x^2 + 3y + 32$$

$$y(3+x) + 2(3+2y) + x(3+2) + 2y$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

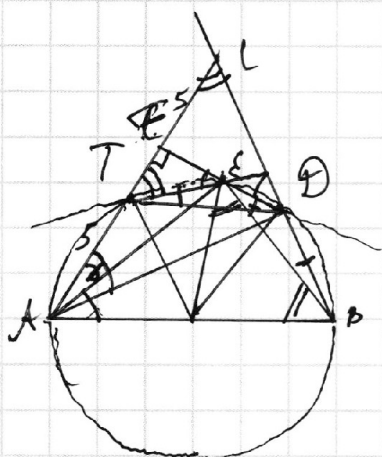
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$xy + x^2 + y^2 + 3x + 3y + 3z + 27 = (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$$

24 n



$$BE = TD = 5 \Rightarrow \text{...}$$

$$CD \perp AD \Rightarrow AT = TC = 5$$

$$\text{...}$$

$$\triangle ACD \sim \triangle ECB \Rightarrow$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{CD} = \frac{3}{5}$$

$$AD = \frac{5}{3} \sqrt{11}$$

$$DB = \sqrt{\frac{25}{9} \cdot 11 + 36} = \sqrt{\frac{275 + 324}{9}}$$

$$= \sqrt{\frac{599}{9}}$$

$$= \frac{\sqrt{599}}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{BE}{CD} = \frac{3}{5}$$

$$CD = \frac{25}{3}$$

$$FC =$$

$$\frac{\frac{25}{3}}{3} = \frac{FC}{5}$$

$$FC = \frac{125}{9}$$

$$\frac{55}{18}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD} = \frac{6}{5} \Rightarrow CD = \frac{25}{3}$$

$$\frac{CD}{FC} = \frac{AB}{BE} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{125}{18}$$

$$\frac{125}{18}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$ab \neq 3c + c^2$$

$$bc = 3a + a^2$$

$$a^2 - a$$

$$ac \leq 3b + b^2$$

$$a^2 - a = x_1 + x_2$$

$$2(2+3) + 2(2+3) +$$

$$a - 5 = x_1, x_2$$

$$4y(y+3) \leq 4y +$$

$$2a^4 + 2a^3 - a^4 - 4 \leq 9x_3 x_1$$

$$+ y^2 + x^2$$

$$a^2 - a \leq x_1 + x_2$$

$$x^2 + y^2 + 2^2 + 3x + 3y + 31.$$

$$a - 5 \leq x_1, x_2$$

$$-xy - x^2 - y^2 \leq 0$$

$$\frac{a^3 - a^2}{n} = x_3 + x_2$$

$$(2+3)^2 + (2+3)^2 + (y+3)^2 =$$

$$= 3x + 3x + 3y + 27 + xy + x^2 + y^2$$

$$2a^4 + 2a^3 - a^4 - 4 \leq 9x_3 x_1$$

$$(a_1 + 4d) / (a_1 + 5d) = a - 5$$

$$9(a_1 + 2d)(a_1 + 4d) = 2a^4 + 2a^3 - a^4 - 4$$

$$x \geq y > 0$$

$$2 < 0$$

$$xy = 3x + 2^2, x \geq 0$$

$$0 > y > 2.$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 +$$

$$0 > x \geq y \geq 2$$

$$x^2 = 3y + y^2$$

$$+ (2+3)^2 \leq$$

$$x^2 + 3x \leq y^2$$

$$y^2 \geq 3x + x^2$$

$$= x^2 + y^2 + 2^2 +$$

$$x \geq y \geq 2 > 0$$

$$+ 6x + 6y + 6z + 27$$

$$x^2 + 3x \geq y^2$$

$$3x$$